

НЕКОТОРЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ВЕТВЯЩИХСЯ СТЕРЖНЕЙ

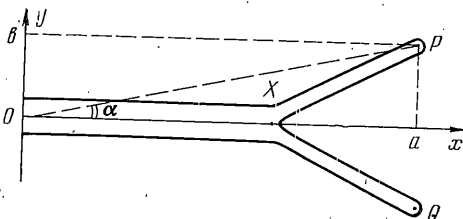
Ф. Л. ЧЕРНОУСЬКО

(Москва)

Лостроены некоторые оптимальные конфигурации ветвящихся стержневых систем, обладающие наименьшим объемом при заданных ограничениях по прочности. Рассмотрены конструкции, нагруженные сосредоточенными силами или собственным весом. Найдены критические значения параметров, при которых оптимальной является конструкция с разветвлением. Результаты могут представлять интерес в связи с оптимизацией конструкций в технике и с исследованием ветвей растений как упругих систем. Отметим, что проблемам оптимизации стержневых систем посвящена большая литература [1-2].

1. Рассмотрим стержневую конструкцию из трех однородных прямых упругих стержней (фиг. 1). Стержень OX расположен вдоль оси x , стержни XP , XQ лежат в горизонтальной плоскости xy , одинаковы и симметричны один другому относительно вертикальной плоскости xz . Координаты точек O , X , P , Q в плоскости xy равны $(0,0)$, $(x, 0)$, (a, b) , $(a, -b)$ соответственно, где $a \geq 0$ и $b \geq 0$ — заданные числа, а координата развилки заключена в пределах $0 \leq x \leq a$.

Предположим, что сечения стержней постоянны по длине каждого стержня и характеризуются линейными размерами r_1 для стержней XP ,



Фиг. 1

XQ и r_2 для стержня OX . При этом будем различать три случая геометрии сечений: толщина стержней по оси z постоянна и одна и та же для всех стержней, а форма сечений является результатом растяжения некоторой заданной области вдоль горизонтальной оси, перпендикулярной оси стержня; толщина стержней в плоскости xy постоянна и одна и та же для всех

стержней, а форма сечений является результатом растяжения некоторой заданной области вдоль оси z ; сечения стержней подобны некоторой заданной области. Линейные размеры r_1 , r_2 имеют в первом случае смысл горизонтальной толщины стержней, во втором — их вертикальной толщины, в третьем — некоторого (любого) характерного размера сечения. В частности, в случае круглых стержней r_1 , r_2 — их радиусы.

В точке O стержень OX заделан, в точке X все стержни жестко соединены между собой. Конструкция нагружена заданными силами, параллельными оси z и симметричными относительно плоскости xz .

Сформулируем следующую задачу: определить оптимальную конфигурацию стержневой системы $OXPQ$, обладающую наименьшим объемом V и удовлетворяющую ограничению $\sigma \leq \sigma_0$, где σ — наибольшая величина напряжения в конструкции при заданных внешних нагрузках, σ_0 — задан-

ная положительная постоянная. Величина σ связана с изгибающим моментом M известным соотношением $\sigma = MhJ^{-1}$, где J — момент инерции сечения относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести сечения, h — наибольшее расстояние от этой оси до точек сечения. Ограничение $\sigma \leq \sigma_0$ с учетом данного соотношения можно переписать в виде

$$M_i \leq c\sigma_0 r_i^m \quad (i=1, 2) \quad (1.1)$$

где M_1, M_2 — наибольшие изгибающие моменты для стержней XP, OX соответственно, число $m=1, 2, 3$ отвечает указанным выше трем случаям различной геометрии. Постоянная c зависит от m и от формы сечения; в частности, для круглых стержней имеем $m=3, c=\pi/4$.

Объем конструкции запишется в виде

$$V = c_0 \{2r_1^n [(a-x)^2 + b^2]^{1/2} + r_2^n x\} \quad (1.2)$$

где c_0 — постоянная, зависящая от формы сечения (для круглых стержней $c_0 = \pi$); $n=1$ при $m=1, 2$ и $n=2$ при $m=3$. Поставленная задача свелась к минимизации функции (1.2) по параметрам x, r_1, r_2 , удовлетворяющим неравенствам (1.1) и ограничениям

$$0 \leq x \leq a, \quad r_1 \geq 0, \quad r_2 \geq 0 \quad (1.3)$$

Далее приводится решение задачи для двух видов внешней нагрузки.

2. Пусть на конструкцию действуют две равные сосредоточенные силы F , параллельные оси z и приложенные в точках P, Q . Наибольшие изгибающие моменты для стержней XP, OX достигаются в точках X, O соответственно, и неравенства (1.1) имеют вид

$$M_1 = F[(a-x)^2 + b^2]^{1/2} \leq c\sigma_0 r_1^m, \quad M_2 = 2Fa \leq c\sigma_0 r_2^m \quad (2.1)$$

Для фиксированного x минимум объема (1.2) по r_1, r_2 при ограничениях (2.1), (1.3) достигается при минимально возможных r_1, r_2 , допускаемых этими ограничениями. Имеем

$$r_1 = \left\{ \frac{F}{c\sigma_0} [(a-x)^2 + b^2]^{1/2} \right\}^{1/m}, \quad r_2 = \left(\frac{2Fa}{c\sigma_0} \right)^{1/m} \quad (2.2)$$

Подставляя выражения (2.2) в соотношение (1.2), получим после преобразования и введения безразмерных переменных

$$V = V_0 v(\xi), \quad V_0 = 2c_0 \left(\frac{F}{c\sigma_0} \right)^{2p-1} (a^2 + b^2)^p \quad (2.3)$$

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad p = \frac{1}{2} + \frac{n}{2m} \quad (2.4)$$

$$v(\xi) = \cos^{2p} \alpha \{ [(1-\xi)^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha]^p + 2^{2p-2} \xi \}$$

Здесь V_0 — объем конструкции из двух стержней OP, OQ при отсутствии разветвления (т. е. при $x=0$), α — угол POx (фиг. 1), число p равно 1, $3/4$ и $5/6$ в случаях $m=1, 2, 3$ соответственно.

Исходная задача сводится к отысканию минимума функции v из (2.4) по $\xi \in [0, 1]$. Дифференцируя v , получим

$$v_\xi = \cos^{2p} \alpha \{-2p[(1-\xi)^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha]^{p-1}(1-\xi) + 2^{2p-2}\} \quad (2.5)$$

$$v_{\xi\xi} > 0 \text{ при } \xi \geq 0, \quad 3/4 \leq p \leq 1$$

Из формул (2.5) имеем $v_\xi \rightarrow -\infty$ при $\xi \rightarrow -\infty$ и $v_\xi > 0$ при $\xi = 1$. Следовательно, выпуклая по ξ функция $v(\xi)$ имеет на интервале $\xi \in (-\infty, 1]$ абсолютный минимум при значении ξ_* , которое есть единственный корень

уравнения $v_{\xi}=0$, или

$$p(1-\xi_*)[(1-\xi_*)^2+\operatorname{tg}^2\alpha]^{p-1}=2^{2p-3} \quad (2.6)$$

Если $\xi_* \geq 0$, то искомый минимум v по $\xi \in [0, 1]$ достигается при $\xi = \xi_*$; в противном случае ($\xi_* < 0$) функция v монотонно возрастает на отрезке $0 \leq \xi \leq 1$ и достигает минимума при $\xi = 0$. Поэтому искомая точка минимума ξ_0 представима в виде

$$\xi_0 = \max [0, \xi_*] \quad (2.7)$$

Отметим, что равенству $\xi_0 = 0$ отвечает, согласно (2.4), случай отсутствия разветвления ($x=0$), когда конструкция состоит фактически из двух отдельных стержней OP , OQ . Ее безразмерный объем v в этом случае, согласно (2.4), равен $v(0) = 1$. Объем оптимальной конструкции обозначим через $v_0 = v(\xi_0) \leq 1$. Величина $1 - v_0$ характеризует относительную экономию материала для оптимальной конструкции по сравнению с конструкцией из двух стержней.

Введем отношение линейных размеров сечений стержней (2.2) для оптимальной конструкции

$$\eta = r_1/r_2 = \{1/4[(1-\xi_0)^2 + \operatorname{tg}^2\alpha]\}^{1/m} \quad (2.8)$$

В случае стержней постоянной вертикальной толщины ($m=1$, $p=1$) из формул (2.6)–(2.8), (2.4) получим искомое решение в виде

$$\begin{aligned} \xi_0 = \xi_* = 1/2, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi/2 \\ v_0(\alpha) = 1 - 1/4 \cos^2\alpha, \quad \eta(\alpha) = 1/2(1/4 + \operatorname{tg}^2\alpha)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь оптимальная конструкция всегда имеет разветвление, расположенное посередине отрезка $[0, a]$ оси x . Максимальная относительная экономия материала $1 - v_0$ по сравнению с конструкцией из двух стержней достигается, согласно (2.9), при $\alpha = 0$ и составляет $1/4$. Эта экономия достигается за счет перераспределения материала по длине стержня: здесь $\eta = 1/4$, т. е. ширина r_1 стержней XP , XQ оказывается в четыре раза меньше, чем ширина r_2 стержня OX , что следует также из формул (2.2) при $b=0$, $x=a/2$.

В случаях $m=2, 3$ имеем $p < 1$. Анализ уравнения (2.6) показывает, что $\xi_* < 0$ при $\alpha > \alpha_0$ и $\xi_* > 0$ при $\alpha < \alpha_0$. Здесь угол α_0 есть то значение α , при котором уравнение (2.6) имеет корень $\xi_* = 0$. Из (2.6) при $\xi_* = 0$ найдем.

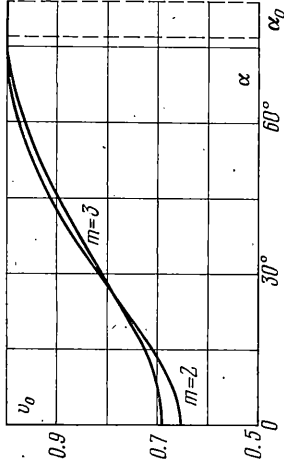
$$\begin{aligned} \alpha_0 = \arccos \left[1/2(2p)^{1/(2p-2)} \right] \\ \alpha_0 = \arccos 2/9 \approx 77.^\circ 16' \quad (m=2), \quad p=3/4 \\ \alpha_0 = \arccos 0.108 \approx 83.^\circ 80' \quad (m=3), \quad p=5/6 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Итак, при $\alpha \geq \alpha_0$ оптимальная конструкция состоит из двух отдельных стержней ($\xi_0 = 0$), а при $\alpha < \alpha_0$ имеет место разветвление ($\xi_0 > 0$). При $\alpha \geq \alpha_0$ имеем из соотношений (2.4)

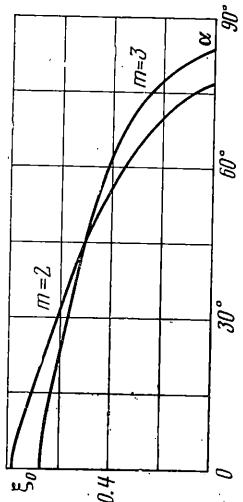
$$\xi_0 = 0, \quad v_0 = 1, \quad \alpha \geq \alpha_0 \quad (m=2, 3) \quad (2.11)$$

Приведем еще соотношения, полученные из формул (2.6)–(2.8), (2.4) в частном случае $\alpha = 0$:

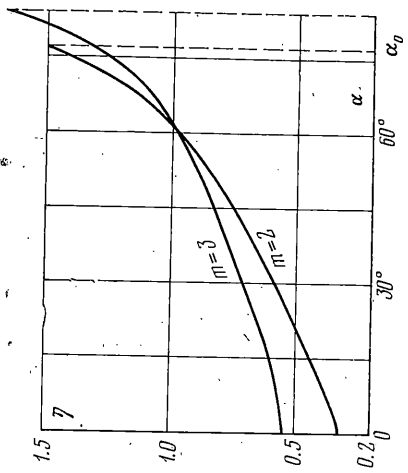
$$\begin{aligned} \xi_0 = \xi_* = 1 - 2(4p)^{1/(1-2p)}, \quad v_0 = (1 - \xi_0)^{2p} + 2^{2p-2}\xi_0, \\ \eta = (4p)^{1/(1-m)}, \quad \alpha = 0 \quad (m=2, 3) \\ \xi_0 \approx 0.7778, \quad v_0 \approx 0.6547, \quad \eta \approx 0.3333 \quad (m=2); \\ \xi_0 \approx 0.6714, \quad v_0 \approx 0.6894, \quad \eta \approx 0.5477 \quad (m=3) \end{aligned} \quad (2.12)$$



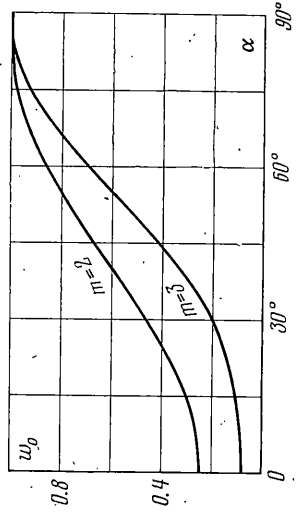
Фиг. 3



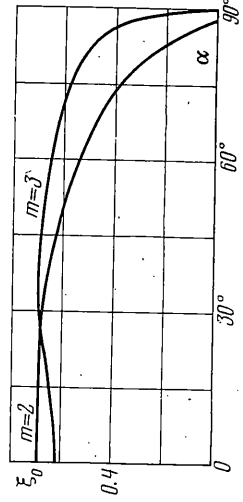
Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 6



Фиг. 5

На фиг. 2 представлены полученные численно при помощи соотношений (2.6), (2.7) зависимости $\xi_0(\alpha)$ от угла α для $m=2$, $p=3/4$ (стержни фиксированной толщины в горизонтальном направлении) и для $m=3$, $p=5/6$ (стержни с подобными, например, круглыми сечениями). На фиг. 3 изображены в зависимости от α соответствующие безразмерные объемы оптимальных конструкций $v_0(\alpha)$. На фиг. 4 даны безразмерные отношения (2.8) линейных размеров сечений стержней. Все кривые фиг. 2—4 построены на интервале $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$, где α_0 дано в (2.10).

3. Рассмотрим случай, когда конструкция фиг. 1, расположенная в горизонтальной плоскости, нагружена собственным весом. Вычисляя наибольшие изгибающие моменты в стержнях XP , OX и подставляя их в неравенства (1.1), получим аналогично (2.1)

$$M_1 = 1/2 c_0 \rho g r_1^n [(a-x)^2 + b^2] \leq c \sigma_0 r_1^m \quad (3.1)$$

$$M_2 = c_0 \rho g \{ 2r_1^n [(a-x)^2 + b^2]^{1/2} [x + 1/2(a-x)] + 1/2 r_2^n x^2 \} \leq c \sigma_0 r_2^m$$

Здесь ρ — объемная плотность материала, величины c_0 и n те же, что в соотношении (1.2), g — ускорение силы тяжести. Неравенства (3.1) можно удовлетворить тривиальным решением $r_1 = r_2 = 0$, которому отвечает вырожденная конструкция нулевого объема. В дальнейшем будем искать оптимальное невырожденное решение, для которого $r_1 > 0$, $r_2 > 0$. При этом ситуация оказывается качественно различной в случае $m=1$ и при $m=2, 3$.

Если $m=1$, то $n=1$, и обе части неравенств (3.1) однородны по r_1 , r_2 . Поэтому если при некотором x существует хотя бы одно положительное решение неравенств (3.1), то существует и решение со сколь угодно малыми r_1 , r_2 . Положительное решение неравенств (3.1) существует, если выполнены условия

$$(a-x)^2 + b^2 \leq k^2, \quad x^2 < k^2, \quad k^2 = 2c\sigma_0(c_0\rho g)^{-1} \quad (3.2)$$

причем k имеет смысл максимальной длины одного стержня, удовлетворяющего заданным ограничениям по прочности. Разрешая неравенства (3.2) относительно x и учитывая, что $x \in [0, a]$, получим

$$a - \sqrt{k^2 - b^2} \leq x < k, \quad 0 \leq x \leq a \quad (3.3)$$

Неравенства (3.3) имеют смысл, если

$$b \leq k, \quad a < k + \sqrt{k^2 - b^2} \quad (3.4)$$

При выполнении условий (3.4) существуют невырожденные конструкции сколь угодно малого объема V с некоторым x , удовлетворяющим неравенствам (3.3), и со сколь угодно малыми $r_1 > 0$, $r_2 > 0$. Если же условия (3.4) не имеют места, то ни при каких $x \in [0, a]$ и $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ нельзя удовлетворить неравенствам (3.1), т. е. невырожденных допустимых конструкций не существует.

Для случаев $m=2$ и $m=3$ имеем: $n=m-1$, и при $r_1 \rightarrow 0$, $r_2 \rightarrow 0$ левые части неравенств (3.1) меньше правых. Следовательно, тривиальное (вырожденное) решение $r_1 = r_2 = 0$ является изолированным, в его окрестности нет других допустимых решений, удовлетворяющих ограничениям. Отбросим это решение и будем искать минимум объема (1.2) при дополнительном условии невырожденности $r_1 > 0$, $r_2 > 0$.

Исследуем зависимость объема (1.2) и ограничений (3.1) от r_1 , r_2 . Пусть $x \in [0, a]$ и r_1, r_2 — некоторые допустимые значения, удовлетворяющие условиям (3.1). Зафиксируем сначала x, r_2 и будем уменьшать r_1 . При этом второе неравенство (3.1) не нарушается (оно лишь усиливается),

а объем (1.2) убывает. Уменьшение r_1 можно проводить до тех пор, пока первое неравенство (3.1) не обратится в равенство. Так как $m=n+1$, для оптимальной конструкции получим

$$r_1 = [(a-x)^2 + b^2] k^{-2} \quad (3.5)$$

Величина k по-прежнему определяется соотношением из (3.2), но имеет другую размерность, чем при $m=1$. Смысл максимальной длины стержня, удовлетворяющего ограничениям, имеет здесь не k , а величина k^2 .

Зафиксируем $x \in [0, a]$ и r_1 , согласно (3.5), и будем уменьшать r_2 , начиная от некоторого допустимого значения. Объем (1.2) при этом убывает, и процесс уменьшения r_2 можно продолжать до тех пор, пока не обратится в равенство второе неравенство (3.1). Отсюда, используя еще соотношения (3.2) для k , (3.5) и $n=m-1$, получим

$$2[(a-x)^2 + b^2]^{m-1/2} k^{2-2m} (a+x) + r_2^{m-1} x^2 = k^2 r_2^m \quad (3.6)$$

Перейдем к безразмерным переменным: $\operatorname{tg} \alpha = b/a$, $\xi = x/a$, $r_1 = a^2 k^{-2} R_1$, $r_2 = a^2 k^{-2} R_2$, $V = V_1 w(\xi, R_2)$, $V_1 = 2c_0 k^{2-2m} (a^2 + b^2)^{m-1/2}$.

Здесь R_1, R_2 — безразмерные линейные размеры сечений стержней, отнесенные к размеру (3.5) при $b=x=0$; V_1 — объем конструкции при отсутствии ветвления, т. е. при $x=0$; w — безразмерный объем оптимальной конструкции, отнесенный к объему при отсутствии ветвления. После замены переменных задача о минимуме объема (1.2) при условиях $0 \leq x \leq a$ и (3.5), (3.6) приведет к задаче на минимум по ξ, R_2 функции

$$w(\xi, R_2) = (\cos \alpha)^{2m-1} [q(\xi) + 1/2 R_2^{m-1} \xi] \quad (3.7)$$

при ограничениях

$$2(1+\xi)q(\xi) + R_2^{m-1} \xi^2 = R_2^m, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (3.8)$$

$$q(\xi) = [(1-\xi)^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha]^{m-1/2}$$

Для решения задачи на условный экстремум (3.7), (3.8) при $m=2$ и $m=3$ сначала разрешим уравнение (3.8) относительно R_2 . Получим

$$R_2(\xi) = 1/2 \xi^2 + [1/4 \xi^4 + 2(1+\xi)q(\xi)]^{1/2} \quad (m=2)$$

$$R_2(\xi) = 1/3 \xi^2 + (D_1 + D_2)^{1/2} + (D_1 - D_2)^{1/2}$$

$$D_1 = 1/27 \xi^6 + (1+\xi)q(\xi) \quad (3.9)$$

$$D_2 = [2/27 \xi^6 (1+\xi)q(\xi) + (1+\xi)^2 q^2(\xi)]^{1/2} \quad (m=3)$$

причем (3.9) суть единственные положительные решения уравнений (3.8) для $m=2$ и $m=3$. Подставив зависимости (3.9) в соотношение (3.7), получим задачу на минимум функции одной переменной

$$w_0 = \min[w(\xi, R_2(\xi))], \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (3.10)$$

Минимум (3.10) при $m=2$ и $m=3$ определялся численно для $\alpha \in [0, \pi/2]$. В результате получены оптимальные зависимости $\xi = \xi_0(\alpha)$ и соответствующие им $w_0(\alpha)$ для $m=2$ и $m=3$. После этого оптимальные величины R_1, R_2 в зависимости от α найдены путем подстановки функций $\xi = \xi_0(\alpha)$ в соотношения (3.9) и в формулу

$$R_1(\xi) = (1-\xi)^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (3.11)$$

которая следует из (3.5).

Отметим, что оптимальное решение, как и в п. 2, обладает следующим свойством. Существует угол α_0 , такой, что при $\alpha \geq \alpha_0$ оптимальная конструкция состоит из двух отдельных стержней (здесь $\xi_0 = 0$), а при $\alpha < \alpha_0$ имеет место разветвление: $\xi_0 > 0$. Критическую величину α_0 определим из того условия, что при $\alpha = \alpha_0$ значение $\xi = 0$ является экстремальным для функции (3.7), т. е.

$$\left. \frac{dw(\xi, R_2(\xi))}{d\xi} \right|_{\xi=0} = \cos^{2m-1} \alpha_0 \left[q_{\xi}(0) + \frac{1}{2} R_2^{m-1}(0) \right] = 0 \quad (3.12)$$

Подставляя в (3.12) выражение $R_2(0)$, найденное из (3.8) при $\xi = 0$, получим

$$q_{\xi}(0) + \frac{1}{2} [2q(0)]^{(m-1)/m} = 0 \quad (3.13)$$

В соотношение (3.13) подставим выражение (3.8) для функции $q(\xi)$. После упрощения получим уравнение для искомой величины $\alpha = \alpha_0$ в виде

$$2m - 1 = (2 \cos \alpha)^{-1/m} \quad (3.14)$$

Единственное решение уравнения (3.14) в отрезке $\alpha \in [0, \pi/2]$ равно

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \arccos [1/2 (2m-1)^{-m}] \\ \alpha_0 &= \arccos (1/18) = 86^\circ.82 \quad (m=2) \\ \alpha_0 &= \arccos 0.004 = 89^\circ.77 \quad (m=3) \end{aligned} \quad (3.15)$$

При $\alpha \geq \alpha_0$ для оптимальной конструкции, состоящей из двух отдельных стержней, по формулам (3.7), (3.11) получим

$$\xi_0 = 0, \quad w_0 = 1, \quad R_1 = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (3.16)$$

Найденные в результате численных расчетов безразмерные зависимости $\xi_0(\alpha)$, $w_0(\alpha)$ для оптимальных конструкций при $m=2$ и $m=3$ представлены на фиг. 5, 6. В частном случае $\alpha=0$ получены следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &\approx 0.6873, & w_0 &\approx 0.24876 \\ R_1 &\approx 0.0978, & R_2 &\approx 0.6349 \end{aligned} \right\} (m=2), \quad \left. \begin{aligned} \xi_0 &\approx 0.6209, & w_0 &\approx 0.08263 \\ R_1 &\approx 0.1437, & R_2 &\approx 0.4909 \end{aligned} \right\} (m=3) \quad (3.17)$$

Отметим некоторые особенности оптимальных конструкций, построенных в п. 2 для нагрузки сосредоточенными силами, и в п. 3 для нагрузки собственным весом.

Соотношения (3.15)–(3.17) аналогичны формулам (2.10)–(2.12). Сопоставляя формулы (2.10) и (3.15), видим, что критические углы α_0 из (3.15) оказываются ближе к 90° , чем соответствующие углы (2.10). Иными словами, область значений угла α , для которых оптимальная конструкция имеет разветвление ($\xi > 0$), в случае нагрузки собственным весом оказывается шире, чем при сосредоточенных нагрузках, и почти совпадает со всем промежутком $[0, \pi/2]$.

Сравним числовые значения (2.12) и (3.17). Оптимальные значения ξ_0 здесь имеют один и тот же порядок величины. Однако отличие в объеме оптимальных конструкций по сравнению с конструкцией из двух стержней оказывается значительно большим для случая нагрузки собственным весом. Если в случае (2.12) оптимизация дает относительную экономию материала $1 - v_0$ не более 35%, то для случая (3.17) экономия составляет более 75% при $m=2$ и более 91% при $m=3$. Указанное обстоятельство проявляется и при других α в сходстве кривых $\xi_0(\alpha)$ на фиг. 2 и 5 и в значительном отличии значений v_0 , $w_0(\alpha)$ на фиг. 3 и 6.

Отметим, что зависимость $\xi_0(\alpha)$ для $m=3$ на фиг. 5 обладает одной отличительной особенностью: она немонотонна и достигает максимума, равного 0.696, при $\alpha \approx 38^\circ$.

Зависимость линейных размеров сечений стержней описывается кривыми фиг. 4, где дано отношение $\eta = r_1/r_2$ для п. 2.

Соответствующие зависимости для случая нагрузки собственным весом аналогичны фиг. 4 и поэтому не приводятся.

Для обоих случаев отношение r_1/r_2 возрастает с ростом угла α , причем при малых α имеем $r_1 < r_2$, а при больших — $r_1 > r_2$. Таким образом, стержень OX для оптимальной конструкции в случае больших углов α оказывается тоньше (уже) стержней XP , XQ , что понятно с точки зрения механики: при больших α на этот стержень действует меньшая нагрузка.

Полученные результаты делают понятной выгоду ветвящихся конструкций с точки зрения механики и качественно объясняют структуру горизонтальных ветвей деревьев.

Автор благодарит В. Л. Зака, М. А. Каюпова и А. И. Овсевича за помощь в проведении расчетов.

Поступила 12 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Прагер В. Основы теории оптимального проектирования конструкций. М., «Мир», 1977.
2. Вакуленко Л. Д., Мазалов В. Н. Оптимальное проектирование конструкций Библиографический указатель отечественной и иностранной литературы за 1948–1974 гг., ч. I, II. Институт гидродинамики СО АН СССР, Новосибирск, 1975.