МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1979

УДК 539.3:534.1

К ВОПРОСУ О КОЛЕБАНИЯХ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКИ В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

С. А. АМБАРЦУМЯН

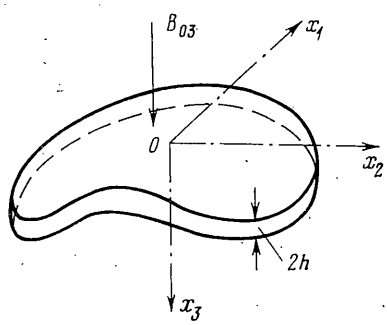
(Ереван)

Рассматривается задача колебаний упругой пластинки в поперечном магнитном поле постоянной интенсивности с учетом поперечных сдвиговых деформаций и соответствующих взаимодействий.

1. Пусть тонкая упругая пластинка постоянной толщины $2h$ с конечной электропроводностью σ колеблется во внешнем магнитном поле с постоянным вектором напряженности $\mathbf{H}_0(0,\ 0,\ H_{03})$, нормальным к срединной плоскости пластинки.

Пластинка в декартовой системе координат x_i расположена так, что срединная плоскость совпадает с координатной плоскостью x_1ox_2 (фиг. 1).

Считается, что задача магнитостатики для невозмущенного состояния решена. Известны векторы магнитной индукции для внешней $\mathbf{B}_0^{(e)}$ и внутренней (для тела пластинки) $\mathbf{B}_0$ областей, которые удовлетворяют следующим уравнениям электростатики и условиям на поверхности контакта двух областей [1]:



Фиг. 1

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_0=0, \quad \operatorname{div}\mathbf{B}_0=0, \quad \mathbf{E}_0=0$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_0^{(e)}=0, \quad \operatorname{div}\mathbf{B}_0^{(e)}=0, \quad \mathbf{E}_0^{(e)}=0$$

$$[\mathbf{B}_0^{(e)}-\mathbf{B}_0]\cdot\mathbf{n}_0=0, \quad [\mathbf{H}_0^{(e)}-\mathbf{H}_0]\times\mathbf{n}_0=0$$

где $\mathbf{H}_0^{(e)}=\mathbf{B}_0^{(e)}$ и $\mathbf{H}_0=\mathbf{B}_0$ — векторы напряженности начального магнитного поля соответственно для внешней и внутренней областей, $\mathbf{n}_0$ — вектор нормали к поверхности контакта двух областей в начальном невозмущенном состоянии. Здесь и в дальнейшем принимается, что диэлектрические постоянные ε, $\varepsilon^{(e)}$ и коэффициенты магнитной проницаемости μ, $\mu^{(e)}$ как во внешней области (вакуум), так и в теле пластинки равны единице.

Будем пользоваться линеаризованными уравнениями магнитоупругости [2].

Во внутренней области уравнения электродинамики имеют вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{h}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\mathbf{e}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\times\mathbf{B}_0\right), \quad \operatorname{div}\mathbf{e}=4\pi\rho_e \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{e}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{h}=0$$

где $\mathbf{h}(h_1, h_2, h_3)$, $\mathbf{e}(e_1, e_2, e_3)$ — компоненты индуцированного электромагнитного поля, которые настолько малы, что позволяют линеаризацию уравнений электродинамики, c — электродинамическая постоянная, численно равная скорости света в пустоте, ρ_e — объемная плотность электрического заряда, $\mathbf{u}$ — вектор перемещения.

Уравнения движения примем в форме

$$\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}+X_i=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i,k=1,2,3) \tag{1.2}$$

$$\rho K(X_1, X_2, X_3)=\frac{\sigma}{c}\left(\mathbf{e}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\times\mathbf{B}_0\right)\times\mathbf{B}_0 \tag{1.3}$$

Геометрические и физические соотношения представим так

$$\varepsilon_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \quad (i,k=1,2,3) \tag{1.4}$$

$$\sigma_{ii}=\frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ii}+\frac{\nu}{1-2\nu}e\right), \qquad \sigma_i=G\varepsilon_{ik} \tag{1.5}$$

$$e=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}$$

где σ_{ik} — компоненты напряжения, ε_{ik} — компоненты деформации, u_i — компоненты перемещения, E — модуль упругости, $G=E/2(1+\nu)$ — модуль сдвига (в случае трансверсально изотропной пластинки модуль сдвига может иметь и иное значение — G'), ν — коэффициент Пуассона.

Во внешней области (вакуум) уравнение электродинамики

$$\operatorname{rot}\mathbf{h}^{(e)}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{e}^{(e)}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{h}^{(e)}=0$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{e}^{(e)}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{h}^{(e)}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{e}^{(e)}=0$$

К приведенным уравнениям присоединим условия на поверхностях пластинки ($x_3=\pm h$):

$$h_i=h_i^{(e)}, \quad e_1=e_1^{(e)}, \quad e_2=e_2^{(e)}$$

а также граничные условия на торцах пластинки и условия на бесконечности.

2. Исходными гипотезами, на основании которых строится предлагаемая теория, являются:

часть гипотезы магнитоупругости тонких тел [2], согласно которой, приближенно полагается, что

$$e_1=\varphi(x_1, x_2, t), \quad e_2=\psi(x_1, x_2, t), \quad h_3=f(x_1, x_2, t) \tag{2.1}$$

гипотеза уточненной теории изгиба пластинки [3], согласно которой

$$u_1=u-x_3\frac{\partial w}{\partial x_1}+\frac{J_0}{G'}\Phi(x_1, x_2, t) \tag{2.2}$$

$$u_2=v-x_3\frac{\partial w}{\partial x_2}+\frac{J_0}{G'}\Psi(x_1, x_2, t)$$

$$u_3=w(x_1, x_2, t)$$

где φ, ψ, f — искомые компоненты возбуждаемого электромагнитного поля; w, $u(x_1, x_2, t)$, $v(x_1, x_2, t)$ — искомые перемещения срединной плоскости пластинки; Φ, Ψ — искомые функции, характеризующие поперечные сдвиговые деформации пластинки; J_0 — заданная функция x_3, характеризующая изменения сдвиговых величин по толщине пластинки. В частности, для J_0 здесь принимаем [3]:

$$J_0={}^1/_2x_3(h^2-{}^1/_2x_3^2)$$

В силу (2.1) и (2.2) из (1.4) получим

$$\frac{\partial h_1}{\partial x_3}=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{4\pi\sigma}{c}\left[\psi-\frac{1}{c}\left(B_{03}\frac{\partial u}{\partial t}-x_3B_{03}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial t}+\frac{J_0B_{03}}{G'}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\right] \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x_3}=\frac{\partial f}{\partial x_2}-\frac{4\pi\sigma}{c}\left[\varphi+\frac{1}{c}\left(B_{03}\frac{\partial v}{\partial t}-x_3B_{03}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial t}+\frac{J_0B_{03}}{G'}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)\right]$$

$$\frac{4\pi\sigma}{c}e_3=\frac{\partial h_2}{\partial x_1}-\frac{\partial h_1}{\partial x_2},\quad \frac{\partial\psi}{\partial x_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}=0$$

Рассматривая уравнения (2.3), замечаем, что в первых двух уравнениях появляются члены, представляющие взаимодействия нового типа между магнитным полем и деформациями. Эти члены, в отличие от обычных представлений взаимодействия, упругие характеристики пластинки (модуль поперечного сдвига G') содержат в явном виде.

Полагая $G'=\infty$, т. е. оставаясь на уровне гипотезы недеформируемых нормалей, очевидно, мы не могли бы обнаружить взаимодействия нового типа [3], которые, как будет показано ниже, вносят существенные изменения в характер магнитоупругих колебаний электропроводных пластин в магнитном поле.

Интегрируя первые два уравнения (2.4) по x_3 в пределах от нуля до x_3, с учетом поверхностных условий

$$h_i=h_i^+ \text{ при } x_3=h \text{ и } h_i=h_i^- \text{ при } x_3=-h \tag{2.4}$$

для h_i получим

$$h_1=\frac{h_1^++h_1^-}{2}+x_3\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{4\pi\sigma}{c}\psi\right)-$$
$$-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\left(b_1\frac{\partial u}{\partial t}-b_2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial t}+\frac{b_3}{G'}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) \tag{2.5}$$
$$h_2=\frac{h_2^++h_2^-}{2}+x_3\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}-\frac{4\pi\sigma}{c}\varphi\right)-$$
$$-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\left(b_1\frac{\partial v}{\partial t}-b_2\frac{\partial^2 w}{\partial x_2\,\partial t}+\frac{b_3}{G'}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)$$
$$b_1=B_{03}x_3,\quad b_2=B_{03}{}^1/_2(x_3^2-h^2)$$
$$b_3=\left[\frac{x_3^2}{4}\left(h^2-\frac{x_3^2}{6}\right)-\frac{5h^4}{24}\right]B_{03}$$

Наконец, из третьего уравнения (2.4), согласно (2.6), для третьей компоненты возбужденного электрического поля получим

$$e_3=-x_3\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[b_1\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}-\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{b_3}{G'}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}-\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\right)\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2^++h_2^-)-\frac{\partial}{\partial x_2}(h_1^++h_1^-)\right] \tag{2.6}$$

Таким образом, принимая гипотезу магнитоупругости [2] и гипотезы уточненной теории пластинок [3], все компоненты возбуждаемого в пластинке электромагнитного поля с помощью формул (2.1), (2.5) и (2.6) представляются восемью искомыми функциями u, v, w, Φ, Ψ, φ, ψ, f и значениями компонент индуцированного магнитного поля h_1 и h_2 на поверхностях пластинки. При этом важно отметить, что все искомые величины — функции двух координат x_1, x_2 и времени t, т. е. по существу трехмерная внутренняя задача магнитоупругости тонкой пластинки сведена к двумерной.

3. Из (1.5), согласно (1.4) и (2.2), для напряжений в пластинке получим известные представления уточненной теории [3]:

$$\sigma_{11}=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial v}{\partial x_2}-x_3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)+\frac{J_0}{G'}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial \Psi}{\partial x_2}\right)\right]$$

$$\sigma_{22}=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial v}{\partial x_2}+\nu\frac{\partial u}{\partial x_1}-x_3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)+\frac{J_0}{G'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2}+\nu\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right)\right] \tag{3.1}$$

$$\sigma_{12}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial v}{\partial x_1}-2x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}+\frac{J_0}{G'}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}+\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}\right)\right]$$

$$\sigma_{13}=f_0(x)\,\Phi,\qquad \sigma_{23}=f_0(x_3)\,\Psi,\qquad f_0(x_3)={}^1/_2(h^2-x_3^2) \tag{3.2}$$

Отсюда очевидно, что на плоскостях $x_3=\pm h$ напряжения σ_{13}, σ_{23} равны нулю, а по толщине пластинки изменяются по параболическому закону.

Согласно (2.2), из (1.3) для компонент «грузового» члена получим

$$\rho K_1=\frac{\sigma}{c}\left[\psi B_{03}-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial t}+\frac{J_0}{G'}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)B_{03}^2\right] \tag{3.3}$$

$$\rho K_2=\frac{\sigma}{c}\left[-\varphi B_{03}-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial v}{\partial t}-x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_2\,\partial t}+\frac{J_0}{G'}\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)B_{03}^2\right]$$

$$\rho K_3=0$$

Как и следовало ожидать, и здесь имеются члены (последние члены в первых двух формулах (3.3)), представляющие взаимодействия нового типа.

Рассматривая (3.1)—(3.3), замечаем, что как все компоненты напряжения в пластинке, так и «грузовые» члены, описывающие взаимодействия магнитного поля с пластинкой, записаны с помощью искомых величин, которые являются функциями лишь двух координат (x_1, x_2) и времени t. Это значит, что в последующем можно пользоваться уравнениями движения пластинки, приведенными к срединной плоскости.

Проинтегрировав каждое из уравнений равновесия (1.2) по x_3 в пределах от $x_3=-h$ до $x_3=h$ и далее умножив первые два уравнения системы (1.2) на x_3 и проинтегрировав результат по x_3 в тех же пределах, согласно (3.3), получим следующие пять осредненных по толщине уравнений движения пластинки:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1}+\frac{\partial S}{\partial x_2}+2h\frac{\sigma}{c}\left(\psi B_{03}-\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}B_{03}^2\right)=2\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x_2}+\frac{\partial S}{\partial x_1}-2h\frac{\sigma}{c}\left(\varphi B_{03}+\frac{1}{c}\frac{\partial v}{\partial t}B_{03}^2\right)=2\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1}+\frac{\partial N_2}{\partial x_2}=2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1}+\frac{\partial H}{\partial x_2}-N_1+\frac{\sigma}{c}\left[\frac{2}{3}\frac{h^3}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial t}B_{03}{}^2-\frac{4}{15}\frac{h^5}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{B_{03}{}^2}{G'}\right]= \tag{3.4}$$
$$=-\frac{2}{3}\rho h^3\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial t^2}+\frac{4}{15}\frac{\rho h^5}{G'}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial M_2}{\partial x_2}+\frac{\partial H}{\partial x_1}-N_2+\frac{\sigma}{c}\left[\frac{2}{3}\frac{h^3}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2\partial t}B_{03}{}^2-\frac{4}{15}\frac{h^5}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\frac{B_{03}{}^2}{G'}\right]=$$
$$=-\frac{2}{3}\rho h^3\frac{\partial^3 w}{\partial x_2\partial t^2}+\frac{4}{15}\frac{h^5\rho}{G'}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$

где, как и следовало ожидать, члены, представляющие новый тип взаимодействия, в явном виде имеются лишь в последних двух уравнениях, которые описывают изгибные явления в пластинке. Что же касается плоской задачи, т. е. первых двух уравнений движения, то здесь имеются взаимодействия классического типа.

Для внутренних сил и моментов, согласно (3.1) и (3.2), получим обычные представления [3]:

$$T_1=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial v}{\partial x_2}\right),\quad T_2=\ldots \tag{3.5}$$
$$S=\frac{Eh}{1+\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial v}{\partial x_1}\right),\qquad N_1=\frac{2h^3}{3}\Phi$$
$$H=-\frac{2Eh^3}{3(1+\nu)}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{2Eh^5}{15G'(1+\nu)}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\right)$$
$$M_1=-\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1{}^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2{}^2}\right)+\frac{4Eh^5}{15G'(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\right)$$
$$M_2=\ldots,\qquad N_2=\ldots$$

Подставляя значения внутренних сил и моментов из (3.5) в уравнения (3.4), получим следующие уравнения движения пластинки

$$\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2{}^2}\right)+$$
$$+\frac{2\sigma h}{c}\left(\psi B_{03}-\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}B_{03}{}^2\right)=2\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2{}^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1{}^2}\right)-$$
$$-\frac{2\sigma h}{c}\left(\varphi B_{03}+\frac{1}{c}\frac{\partial v}{\partial t}B_{03}{}^2\right)=2\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$
$$\frac{2h^3}{3}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\right)=2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$
$$\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x_1{}^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial x_2{}^2}\right)-\frac{4Eh^5}{15G'(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1{}^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2{}^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1\partial x_2}\right)+\frac{2h^3}{3}\Phi-\frac{\sigma}{c}\left(\frac{2h^3}{3c}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial t}-\right.$$

$$-\frac{4h^5}{15cG'}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big)B_{03}^2=\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\,\partial t}-\frac{4\rho h^5}{15G'}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \tag{3.6}$$

$$\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x_2\,\partial x_1^2}\right)-\frac{4Eh^5}{15G'(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_2^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_2}\right)+\frac{2h^3}{3}\Psi-\frac{\sigma}{c}\left(\frac{2h^3}{3c}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2\partial t}-\right.$$

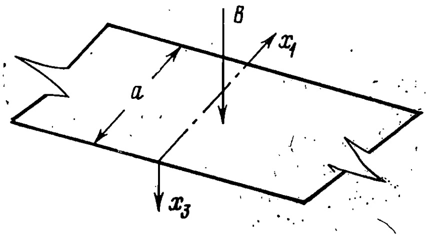
$$\left.-\frac{4h^5}{15cG'}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)B_{03}^2=\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^3 w}{\partial x_2\,\partial t^2}-\frac{4\rho h^5}{15G'}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$

К системе (3.6) должны быть присоединены осредненные по толщине пластинки уравнения электродинамики. Интегрируя первые два уравнения (2.4) по x_3 в пределах $x_3=-h$ до $x_3=h$ с учетом условий на плоскостях (2.5) и присоединяя к ним четвертое уравнение (2.4), окончательно получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\psi-\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}B_{03}\right)=\frac{h_1^+-h_1^-}{2h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}-\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\varphi+\frac{1}{c}\frac{\partial v}{\partial t}B_{03}\right)=\frac{h_2^+-h_2^-}{2h}$$



Фиг. 2

Таким образом получим полную систему уравнений магнитоупругости упругих тонких пластин конечной электропроводности. Очевидно, в общем случае эти уравнения должны быть рассмотрены совместно с уравнениями электродинамики во внешней области.

Полученная полная система дифференциальных уравнений позволяет исследовать волновые процессы в пластинке в магнитном поле, вектор интенсивности которого нормален к срединной плоскости пластинки. Однако в этой работе, опуская волновые процессы, ограничимся обсуждением пластинки с учетом поперечных сдвигов и соответствующих электромагнитных взаимодействий нового типа.

4. Рассмотрим задачу поперечных колебаний свободно опертой по краям, бесконечно длинной трансверсально-изотропной пластинки (полосы шириной a) в поперечном магнитном поле с интенсивностью $B_{03}=B=\mathrm{const}$ (фиг. 2).

Из системы уравнений (3.6) для данного случая легко получить следующие исходные уравнения:

$$\frac{2h^3}{3}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}=2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{4.1}$$

$$\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3}-\frac{4Eh^5}{15G'(1-\nu^2)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}+\frac{2h^3}{3}\Phi-$$

$$-\frac{\sigma}{c}\left[\frac{2h^3}{3c}B^2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial t}-\frac{4h^5B^2}{15cG'}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]=$$

$$=\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\,\partial t^2}-\frac{4\rho h^5}{15G'}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$$

Рассматривая второе уравнение системы (4.1), замечаем, что здесь магнитоупругое взаимодействие представлено двумя членами

$$\frac{2\sigma h^3}{3c^2}B^2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial t}, \qquad \frac{4\sigma h^5}{15c^2}\frac{B^2}{G'}\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

Первый член описывает классическое взаимодействие [2], второй член — новый тип взаимодействия и содержит упругую постоянную пластинки G' в явном виде.

Полагая $G'=\infty$, получим соответствующие исходные уравнения теории, построенной на основании гипотезы недеформируемых нормалей. Принимая гипотезу недеформируемых нормалей, в исходных уравнениях (3.6) или (4.1) теряются члены, описывающие взаимодействия нового типа. По существу гипотеза недеформируемых нормалей безразлична к величине отношения B^2/G' и при больших значениях ее может дать существенные погрешности.

Решения системы (4.1) представим в виде

$$w=A_1e^{\Omega t}\sin\lambda_m x_1, \quad \Phi=A_2e^{\Omega t}\cos\lambda_m x_1, \quad \lambda_m=m\pi/a \tag{4.2}$$

удовлетворяя граничным условиям свободного опирания по краям $x_1=0$, $x_1=a$.

Подставляя значения w и Φ из (4.2) в систему уравнений (4.1) и приравнивая определитель из коэффициентов A_i нулю, для определения Ω получим следующее характеристическое уравнение четвертой степени:

$$\frac{2\rho h^2\omega_0^2}{5G'}\Omega^{\circ 4}+\frac{12\rho w_0^2}{5G'\lambda_m^2}\beta\Omega^{\circ 3}+\left[\frac{2Eh^2\lambda_m^2}{5G'(1-\nu^2)}+\frac{h^2\lambda_m^2}{3}+1\right]\Omega^{\circ 2}+2\beta\Omega^\circ+1=0$$

$$\Omega^\circ=\frac{\Omega}{\omega_0}, \quad \omega_0^2=\frac{Eh^2}{3\rho(1-\nu^2)}\lambda_m^4, \quad \beta=\frac{\sigma}{c}\frac{h^2\lambda_m^2B^2}{6c\rho\omega_0}, \quad \lambda_m=\frac{m\pi}{a}$$

где ω_0 — собственная частота колебания пластинки в отсутствие магнитного поля, β — коэффициент, характеризующий интенсивность влияния магнитного поля, m — целое число.

Пренебрегая инерцией вращения (последний член второго уравнения системы (4.1)), характеристическое уравнение (4.3) запишем в виде

$$\frac{12\rho\omega_0^2}{5C'\lambda_m^2}\beta\Omega^{\circ 3}+\left[\frac{2Eh^2\lambda_m^2}{5G'(1-\nu^2)}+\frac{h^2\lambda_m^2}{3}+1\right]\Omega^{\circ 2}+2\beta\Omega^\circ+1=0 \tag{4.3}$$

Далее, в частном случае, если перейти к гипотезе недеформируемых нормалей, характеристическое уравнение запишется следующим образом

$$(1+{}^1/_3h^2\lambda_m^2)\Omega_0^{\circ 2}+2\beta\Omega_0^\circ+1=0 \tag{4.4}$$

Рассмотрим численные примеры. Пусть $E/G'(1-\nu^2)=4.0$, $m=1$; для относительной толщины имеем следующие три значения $h/a=0.01$, 0.02, 0.1.

Значения действительных Re_j и мнимых Im_j частей корней Ω_j° ($j=1$, 2, 3) характеристического уравнения (4.3) в зависимости от некоторых значений параметра β для всех трех рассматриваемых случаев приводятся в табл. 1. Параметр $h^*=\pi^2Eh^2/[5a^2G'(1-\nu^2)]$ для этих случаев будет равен $7.9\cdot10^{-4}$, $3.2\cdot10^{-3}$, $7.9\cdot10^{-2}$.

Значения корней характеристического уравнения (4.4) представлены в табл. 2. Так как характер изменения этих корней во всех трех случаях одинаков, в таблице приводятся корни лишь для первого случая ($h/a=1/100$, $h^*=0$).

Для наглядности на фиг. 3–6 представлены графики зависимости относительного коэффициента затухания $(\mathrm{Re}\,\Omega)^\circ$ и относительной частоты колебаний $(\mathrm{Im}\,\Omega)^\circ$ от параметра β для всех приведенных случаев.

На фиг. 3 кривые *1*, *2* соответствуют $\mathrm{Re}\,\Omega_{01}^\circ$ и $\mathrm{Re}\,\Omega_{02}^\circ$, а кривая *3* соответствует $\mathrm{Im}\,\Omega_{01}^\circ$ и $\mathrm{Im}\,\Omega_{02}^\circ$. Поведение характеристических корней для уравнения (4.4)

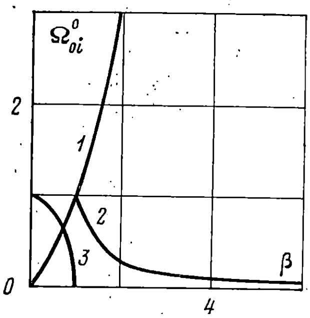
Таблица 1

β	Re_1			Re_2			Im_2			Re_3			Im_3		
0.0	—	—	—	0.0	0.0	0.0	0.999	0.996	0.913	0.0	0.0	0.0	−0.999	−0.996	−0.913
0.2	−1565	−398	−18.5	−0.199	−0.197	−0.146	0.979	0.977	0.908	−0.199	−0.197	−0.146	−0.979	−0.977	−0.908
0.4	−782	−198	−8.76	−0.399	−0.396	−0.306	0.916	0.916	0.893	−0.399	−0.396	−0.306	−0.916	−0.916	−0.893
0.6	−520	−131	−5.25	−0.599	−0.597	−0.501	0.801	0.803	0.861	−0.599	−0.597	−0.501	−0.801	−0.803	−0.861
0.8	−390	−98.1	−3.06	−0.800	−0.802	−0.812	0.601	0.605	0.785	−0.800	−0.802	−0.812	−0.601	−0.605	−0.785
1.0	−311	−77.7	−0.806	−1.04	−1.08	−1.47	0.0	0.0	1.31	−0.968	−0.939	−1.47	0.0	0.0	−1.31
2.0	−153	−35.4	−0.269	−3.82	−4.17	−0.803	0.0	0.0	2.28	−0.268	−0.268	−0.803	0.0	0.0	−2.28
4.0	−69.3	−0.127	−0.127	−8.88	−9.91	−0.405	0.0	7.59	2.45	−0.127	−9.91	−0.405	0.0	−7.59	−2.45
6.0	−18.4	−0.084	−0.084	−33.7	−6.61	−0.271	0.0	10.7	2.48	−0.084	−6.61	−0.271	0.0	−10.7	−2.48
8.0	−0.063	−0.063	−0.063	−19.5	−4.95	−0.203	15.5	11.5	2.49	−19.5	−4.95	−0.203	−15.5	−11.5	−2.49
10.0	−0.050	−0.050	−0.050	−15.6	−3.96	−0.162	19.5	11.9	2.49	−15.6	−3.96	−0.162	−19.5	−11.9	−2.49

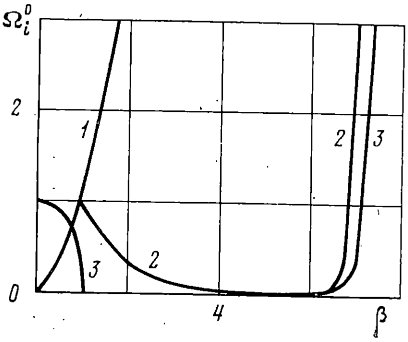
показано на фиг. 4–6; кривые *1*, *2* соответствуют Re Ω_2° и Re Ω_3°, а кривая *3* характеризует изменение Im Ω_2° и Im Ω_3°.

На графиках и в таблицах видно, что учет поперечных сдвигов, и тем самым нового типа взаимодействия, приводят к качественно новым типам колебаний в зависимости от напряженности магнитного поля.

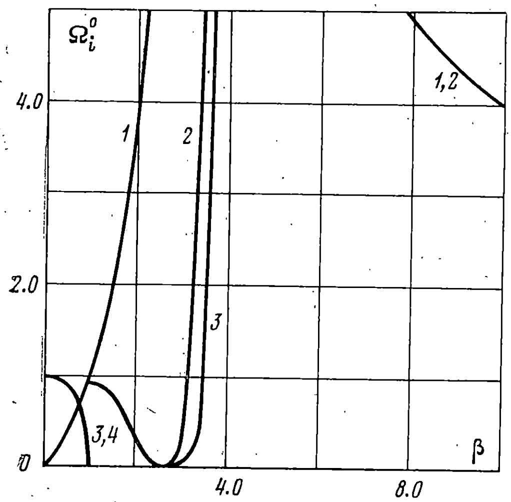
На графике (фиг. 3) и из табл. 2 видно, что в классическом случае (теория, построенная на основании гипотезы недеформируемых нормалей) с увеличением интенсивности магнитного поля частота колебаний уменьшается и достигает нулевого значения при определенном значении параметра β ($\beta\approx1$). При дальнейшем уве-



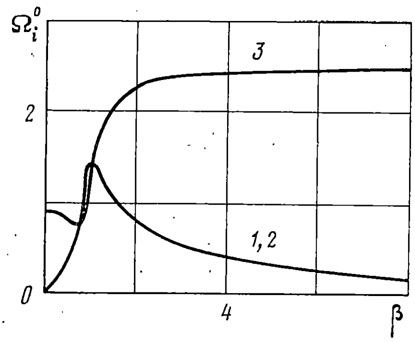
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

личении β происходит затухание возмущения без колебания. При этом каждое решение уравнения (4.1), соответствующее Ω_{0i}°, в целом имеет свой коэффициент затухания, за исключением начального участка ($0\leqslant\beta\leqslant1$), где коэффициенты затухания решений совпадают и имеет место колебание с затуханием.

Отметим, что новый тип взаимодействия, появившийся в результате учета явлений поперечного сдвига, существенно меняет картину колебания (фиг. 4–6, табл. 1).

Во всех трех случаях решения системы (4.1), соответствующие первым корням Ω_1°, представляют собой затухание без колебания.

При малом влиянии учета поперечного сдвига (при малом значении приведенной относительной толщины пластинки $h^*=7.9\cdot10^{-4}$) картина колебаний вначале напоминает классическую форму, т. е. до определенного значения β ($\beta\approx1$) частота колебаний с затуханием с увеличением интенсивности магнитного поля уменьшается, достигая нуля. Далее следует участок ($1\leqslant\beta\leqslant6$), где возмущения затухают без колебания и каждое решение уравнений (4.1) имеет свой коэффициент затухания. При дальнейшем увеличении β ($\beta>6$) появляется новый колебательный процесс с

Таблица 2

β	Re_{01}	Im_{01}	Re_{02}	Im_{02}
0.0	0.0	0.9999	0.0	−0.9999
0.2	−0.1999	0.9797	−0.1999	−0.9797
0.4	−0.3999	0.9164	−0.3999	−0.9164
0.6	−0.5998	0.7999	−0.5998	−0.7999
0.8	−0.7998	0.6001	−0.7998	−0.6001
1.0	−0.9997	0.0173	−0.9997	−0.0173
2.0	−3.731	0.0	−0.2679	0.0
4.0	−7.871	0.0	−0.1270	0.0
6.0	−11.91	0.0	−0.0839	0.0

существенно высокой частотой и с одинаковыми коэффициентами затухания, имеющими тенденцию к уменьшению с увеличением интенсивности магнитного поля, т. е. β (фиг. 4).

При дальнейшем увеличении сдвиговых явлений ($h^*=3.2\cdot10^{-3}$) картина колебаний остается такой же, как и в предыдущем случае. Однако существенным образом сокращается участок, где возмущения затухают без колебания ($1\leqslant\beta\leqslant3$) (фиг. 5).

Дальнейшее увеличение влияния явлений поперечных сдвигов ($h^*=7.9\cdot10^{-2}$) совершенно изменяет картину колебаний в зависимости от β. Здесь участок затухания возмущений без колебания совершенно исчезает (точки $\beta=1$ и $\beta=6$ или $\beta=3$ предыдущих случаев, как бы сближаясь, сливаются). Во всем промежутке изменения β имеют место колебания с затуханием, причем, как и следовало ожидать, оба решения системы (4.1) для каждого β имеют одинаковые коэффициенты затухания. Частоты колебаний, в начале изменения β ($0\leqslant\beta\leqslant1$) имеют тенденцию к уменьшению, а в дальнейшем увеличиваются с увеличением β, т. е. с увеличением интенсивности магнитного поля (фиг. 6).

Поступила 10 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М., «Наука», 1977.
3. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М., «Наука», 1967.