

ДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ
НА ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ОБОЛОЧКУ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Р. Г. ЯКУПОВ

(Уфа)

Динамическое поведение упругих цилиндрических оболочек под действием движущейся нагрузки изучалось ранее. Перечень работ, посвященных этой задаче, приведен в [1, 2]. Рассмотрена динамика оболочек, погруженных в акустическую среду или содержащих упругий наполнитель, с учетом взаимодействия оболочки с внешней акустической средой и внутренним наполнителем. Решение ряда задач в нелинейной постановке и экспериментальные данные содержатся также в [3].

Ниже определяются перемещения и напряжения в бесконечной цилиндрической оболочке, находящейся в упругой среде, под действием осесимметричной волны давления неизменного профиля, движущейся вдоль оболочки с постоянной скоростью v . Давление волны на оболочку радиальное и приложено к ее внутренней поверхности. Окружающая упругая среда и оболочка скреплены между собой жестко.

Задача решается в подвижной системе координат. Для наблюдателя, связанного с подвижной системой координат, картина движения не зависит от времени. Результаты, приведенные ниже, представляют приближенное решение задачи с начальными условиями для больших значений времени.

1. Уравнения осесимметричного движения тонкостенной цилиндрической оболочки записываем с учетом инерции вращения и деформации сдвига в форме [3]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_0^2} + v \frac{\partial w}{\partial \xi_0} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \sigma_{r\xi} \quad (1.1)$$

$$k^2 \frac{(1-v)}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_0} - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_0^2} \right) + v \frac{\partial u}{\partial \xi_0} = d(\xi_0) - \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \sigma_{rr}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_0^2} - 6k^2(1-v) \frac{R^2}{h^2} \left(\psi - \frac{\partial w}{\partial \xi_0} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}$$

$$u = u_0/R, w = w_0/R, \xi_0 = x/R, \tau = ct/R, c^2 = E/[(1-\nu^2)\rho_1]$$

$$\sigma = \sigma^*/E, d(\xi_0) = p(\xi_0)\alpha/E, \alpha = [(1-\nu^2)R]/h$$

где w_0, u_0 — радиальные и продольные компоненты перемещения; $p(\xi_0)$ — давление в волне; x — продольная координата; R, h — радиус и толщина стенки оболочки; E, ρ_1, ν — модуль упругости, плотность и коэффициент Пуассона материала оболочки; t — время; $\sigma_{r\xi}, \sigma_{rr}$ — касательные и радиальные напряжения на поверхности контакта с упругой средой; ψ — угол поворота элемента нормали к срединной поверхности в плоскости x, R ; $k^2 = 0.89$ — коэффициент сдвига.

Осесимметричные перемещения и напряжения однородной изотропной упругой среды определяем через потенциалы смещения Φ и Ψ [4]:

$$w_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_0}, \quad u_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\Psi}{r} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_0} \quad (1.2)$$

$$\sigma_{rr} = \eta \left(\frac{c}{a_1} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + \xi \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_0 \partial r} \right) \quad (1.3)$$

$$\sigma_{r\xi} = \frac{\xi}{2} \left(\frac{c}{a_2} \right)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} + \xi \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_0 \partial r} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_0^2} \right)$$

$$w = w_{01}/R, \quad u_1 = u_{01}/R, \quad r = r_0/R, \quad \eta = \lambda \alpha / E, \quad \xi = 2\mu \alpha / E$$

$$a_1^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho_2, \quad a_2^2 = \mu / \rho_2, \quad \Phi = \varphi / R^2, \quad \Psi = \psi_1 / R^2$$

где a_1, a_2 — скорости продольных и поперечных упругих волн в среде; r_0 — радиальная координата; u_{01}, w_{01} — продольные и радиальные смещения среды; λ, μ, ρ_2 — параметры Ляме и плотность среды; Φ, Ψ — безразмерные потенциалы смещения. Последние являются решениями волновых уравнений.

Введем безразмерную подвижную систему координат $\xi = (v\tau/c) - \xi_0$, связанную с фронтом давления, и используем преобразование Лапласа по координате ξ . Тогда дифференциальные уравнения для изображений потенциалов Φ° и Ψ° сводятся к следующим:

$$\frac{d^2 \Phi^\circ}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi^\circ}{dr} + \kappa_1^2 s^2 \Phi^\circ = 0$$

$$\frac{d^2 \Psi^\circ}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi^\circ}{dr} - \frac{\Psi^\circ}{r^2} + \kappa_2^2 s^2 \Psi^\circ = 0$$

(1.4)

$$\kappa_1^2 = |1 - \beta|, \quad \kappa_2^2 = |1 - \delta|, \quad \beta = (v/a_1)^2, \quad \delta = (v/a_2)^2$$

а выражения для изображений перемещений оболочки и окружающей среды имеют вид

$$w^\circ = \frac{(\kappa_5 - \kappa s^2)}{z} \left(d - \sigma_{rr}^\circ + \frac{v}{\kappa s} \sigma_{r\xi}^\circ \right)$$

(1.5)

$$u^\circ = \frac{1}{\kappa s} \left(v w^\circ + \frac{\sigma_{r\xi}^\circ}{s} \right), \quad \psi^\circ = \frac{\kappa_5 s}{\kappa s^2 - \kappa_5} w^\circ$$

$$z = \kappa \kappa_4 s^4 - [\kappa_1 (\kappa_3 - \kappa_4) \kappa_5 - v^2] s^2 + \kappa_5 \left(1 - \frac{v^2}{\kappa} \right), \quad \kappa = 1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2$$

$$\kappa_3 = k^2 \frac{(1-v)}{2}, \quad \kappa_4 = \kappa + \kappa_3 - 1, \quad \kappa_5 = 6k^2 (1-v) \left(\frac{R}{h} \right)^2$$

(1.6)

$$w_1^\circ = \frac{d\Phi^\circ}{dr} + s\Psi^\circ, \quad u_1^\circ = \frac{d\Psi^\circ}{dr} + \frac{\Psi^\circ}{r} - s\Psi^\circ$$

где s — параметр преобразования, нулик в верхнем индексе означает изображение. Выражения (1.5) записаны для безразмерной ступенчатой нагрузки d . Уравнения (1.4) интегрируются в цилиндрических функциях. Обозначим решения (1.4), удовлетворяющие условию затухания возмущений на бесконечности ($r \rightarrow \infty$), соответственно

$$\Phi^\circ = CZ_1(\kappa_1 sr), \quad \Psi^\circ = EZ_2(\kappa_2 sr)$$

(1.7)

Здесь C и E — постоянные интегрирования; Z_1, Z_2 — цилиндрические функции. В зависимости от значения v по сравнению с величинами a_1 и a_2 функции Z_1 и Z_2 будут иметь вид

$$Z_1 = H_0^{(2)}(\kappa_1 sr), \quad Z_2 = H_1^{(2)}(\kappa_2 sr), \quad v < a_2 < a_1$$

(1.8)

$$Z_1 = H_0^{(2)}(\kappa_1 sr), \quad Z_2 = 1/r, \quad v = a_2 < a_1$$

$$Z_1 = H_0^{(2)}(\kappa_1 sr), \quad Z_2 = K_1(\kappa_2 sr), \quad a_2 < v < a_1$$

$$Z_1 = 1, \quad Z_2 = K_1(\kappa_2 sr), \quad a_2 < v = a_1$$

$$Z_1 = K_0(\kappa_1 sr), \quad Z_2 = K_1(\kappa_2 sr), \quad a_2 < a_1 < v$$

где $H_0^{(2)}(z)$, $H_1^{(2)}(z)$ и $K_0(z)$, $K_1(z)$ — функции Ханкеля и Макдональда нулевого и первого порядка. Как видно из приведенных формул (1.8), потенциалы Φ° и Ψ° выражаются в элементарных функциях при совпадении скорости волны давления со скоростями распространения продольных и поперечных волн в упругой среде.

Постоянные интегрирования в (1.7) определяем из условия равенства радиальных и осевых смещений на наружной поверхности оболочки

$$w_1 = w, \quad u_1 = u + h\psi/2R \quad \text{при } r=1 \quad (1.9)$$

Используя (1.7), находим изображения смещений оболочки

$$w^\circ = \frac{d(\kappa_5 - \kappa s^2)}{G(s)} \left[s^2 Z_1 Z_2 + Z_1' Z_2' + \left(1 - \frac{\xi \delta}{2\kappa} \right) Z_1' Z_2 \right] \quad (1.10)$$

$$u^\circ = \frac{d(\kappa_5 - \kappa s^2)}{\kappa s G(s)} \left\{ \left(v - \xi + \frac{\xi \delta}{2} \right) s^2 Z_1 Z_2 + (v - \xi) Z_1' Z_2' + \left[v - \xi + \frac{h\kappa_5 \xi \delta s^2}{4R(\kappa s^2 - \kappa_5)} \right] Z_1' Z_2 \right\}$$

$$G(s) = s^2 g_1 Z_1 Z_2 + s^2 (\kappa_5 - \kappa s^2) g_2 Z_1 Z_2' + g_3 Z_1' Z_2 + g_4 Z_1' Z_2' + \xi g_5 Z_1'' Z_2 + \xi (\kappa_5 - \kappa s^2) Z_1' Z_2$$

$$g_1 = z + s^2 \left[\frac{h\eta\beta\kappa_5}{2R} - \eta\beta \left(\kappa - \frac{\xi\delta}{2} - v + \xi \right) + v\xi \left(\frac{\delta}{2} - 1 \right) \right] +$$

$$+ \frac{\kappa_5}{\kappa} \left[\eta\beta \left(\kappa - \frac{\xi\delta}{2} - v - \xi \right) - v\xi \left(\frac{\delta}{2} - 1 \right) \right], \quad g_2 = \xi + \eta\beta$$

$$g_3 = z \left(1 - \frac{\xi\delta}{2\kappa} \right) + s^2 \left[\frac{v\xi\delta\kappa_5 h}{4\kappa R} - v\xi \left(1 - \frac{v\delta}{2} \right) \right] + \frac{v\xi\kappa_5}{\kappa} \left(1 - \frac{v\delta}{2} \right)$$

$$g_4 = z - s^2 \left(\frac{h\xi\kappa_5}{2R} + 2v\xi - \xi^2 \right) + \frac{\xi\kappa_5}{\kappa} (2v - \xi)$$

$$g_5 = s^2 \left(\frac{h\kappa_5}{2R} - \kappa + \frac{\xi\delta}{2} + v - \xi \right) + \frac{\kappa_5}{\kappa} \left(\kappa - \frac{\xi\delta}{2} - v + \xi \right)$$

где штрихи означают дифференцирование по r . Выражения (1.10) имеют наиболее простой вид для случая $v = a_1$.

Приведем также формулы для определения изображений безразмерных суммарных напряжений изгиба и растяжения срединной поверхности оболочки в направлении образующей $\sigma_z^\circ = \sigma_u^\circ + \sigma_p^\circ$ и кольцевых напряжений σ_φ° :

$$\sigma_z^\circ = \frac{1}{1-v^2} \left\{ \left[\left(\frac{h\kappa_5}{2R} - v\kappa \right) s^2 + v\kappa_5 \right] \frac{w^\circ}{(\kappa_5 - \kappa s^2)} - su^\circ \right\} \quad (1.11)$$

$$\sigma_\varphi^\circ = \frac{[\kappa - v(v + \eta)]}{\kappa(1-v^2)} w^\circ$$

2. Переход к оригиналам для перемещений и напряжений связан с рядом трудностей. Поэтому, используя вместо функций Ханкеля и Макдональда их асимптотические выражения для больших значений аргумента ($s \rightarrow \infty$) [5], находим более простые соотношения для определения перемещений и напряжений на участках оболочки, близких к фронту волны давления.

Асимптотические выражения (1.10) при значениях $v > a_1$ имеют вид

$$w^0 = d\chi_1(s)/G_1(s), \quad u^0 = d\chi_2(s)/G_1(s) \quad (2.1)$$

$$G_1 = m_0 s^5 + m_1 s^4 + m_2 s^3 + m_3 s^2 + m_4 s + m_5$$

$$m_0 = (1 + \kappa_1 \kappa_2) \kappa \kappa_4, \quad m_1 = 1/2 \xi \delta \kappa_1 \kappa_4 + (\xi + \eta \beta) \kappa \kappa_2 + \xi \kappa_1^2 \kappa_2$$

$$m_2 = 1/2 (h \kappa_5 / R) (\eta \beta - \xi \kappa_1 \kappa_2 + \xi \kappa_1^2) + (\delta / 2 - 1) (v \xi + \xi^2 \kappa_1^2 + \xi \eta \beta) + v \eta \beta + \xi \kappa_1 (v \kappa_1 + \xi \kappa_2 - 2 v \kappa_2) - (\kappa - \kappa_3 \kappa_5 + \kappa_4 \kappa_5 - v^2 - \kappa \xi) (1 + \kappa_1 \kappa_2)$$

$$m_3 = \frac{\xi \delta \kappa_1}{2} \left[\xi - v^2 + 1 + \frac{\kappa_5}{\kappa} \left(\kappa_3 - \kappa_4 + \frac{v^2}{\kappa_5} - \frac{h v}{2R} \right) \right] - \kappa_2 \kappa_5 [\eta \beta + \xi (1 + \kappa_1^2)]$$

$$m_4 = (\kappa_5 / \kappa) \{ (\kappa - v^2 - \xi \kappa) (1 + \kappa_1 \kappa_2) - (\delta / 2 - 1) \xi (\eta \beta + v - \xi \kappa_1^2) - v \eta \beta + \xi \kappa_1 [\kappa_2 (2v - \xi) - v \kappa_1] \}, \quad m_5 = (\xi \delta \kappa_1 \kappa_5 / 2 \kappa) [1 + (v^2 / \kappa) (1 - \kappa) - \xi]$$

$$\chi_1(s) = -\kappa (1 + \kappa_1 \kappa_2) s^3 - 1/2 \xi \delta \kappa_1 s^2 + \kappa_5 (1 + \kappa_1 \kappa_2) s + \xi \delta \kappa_1 \kappa_5 / 2 \kappa$$

$$\chi_2(s) = -s^2 [(v - \xi) (1 + \kappa_1 \kappa_2) + 1/2 \xi \delta] + [h \xi \delta \kappa_1 \kappa_5 s / (4 \kappa R)] + (\kappa_5 / \kappa) [(v - \xi) (1 + \kappa_1 \kappa_2) + 1/2 \xi \delta]$$

Заметим, что выражения w^0 и u^0 для $v = a_1$ можно получить из (2.1), если принять $\kappa_1 = 0, \beta = 1$.

Определим перемещения w_0 , напряжения σ_x^* и σ_φ^* в стальной оболочке с параметрами $h/R = 0.01165, E = 2.06 \cdot 10^{11}$ н/м², $\rho_1 = 7.8 \cdot 10^3$ кг/м³, $v = 0.3$, находящейся в упругой среде с параметрами $\lambda = 1.2 \cdot 10^8$ н/м², $\mu = 0.79 \cdot 10^8$ н/м², $\rho_2 = 1.55 \cdot 10^3$ кг/м³, $v_2 = 0.3$. Значения скорости фронта волны принимаем $v = a_1 = 458, 600$ и 800 м/с.

Для перехода к оригиналам используем асимптотические соотношения (2.1) и теорему о вычетах. Полюсами функций (2.1) являются корни уравнения $G_1(s) = 0$. Для принятых параметров оболочки при $v = a_1$ уравнение $G_1 = 0$ имеет два комплексно-сопряженных корня, а при $v > a_1$ — один действительный и два комплексно-сопряженных корня. Для удовлетворения условиям на бесконечности ($\xi \rightarrow \pm \infty$) вычеты относительно положительных действительных и комплексных корней с положительной действительной частью отнесем к области $\xi < 0$.

При $v = a_1$ выражение для расчета радиальных перемещений имеет вид

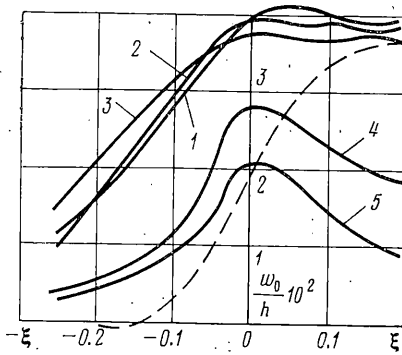
$$w = \frac{p \alpha}{\kappa \kappa_4 E} \left[\frac{\kappa_5}{S_1} + \sum_{i=1}^4 \frac{(\kappa_5 - \kappa s^2) e^{\xi s t}}{S_2} \right] \quad (i \neq j)$$

$$S_1 = \prod_{i=1}^4 s_i, \quad S_2 = \prod_{i=1}^4 s_i \quad (s_i - s_j)$$

Считаем, что действующая нагрузка ступенчатая, давление на фронте волны $p = 1$ МПа.

Результаты расчета перемещений и напряжений в виде графика безразмерных величин $w/h, \sigma_x^*/p$ и σ_φ^*/p приведены на фиг. 1—3. Кривые 1 на фигурах относятся к значению $v = a_1$, кривые 2 и 3 — к значению $v = 600$ и 800 м/с. Пунктирной линией показаны прогиб и напряжения при статическом нагружении без учета влияния окружающей среды.

Из приведенных графиков видно, что радиальные смещения оболочки перед фронтом нагрузки монотонно падают, за фронтом представляют

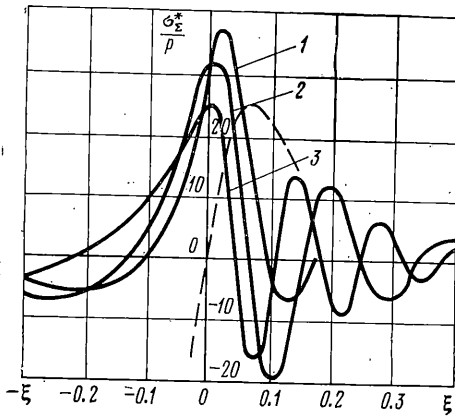


Фиг. 1

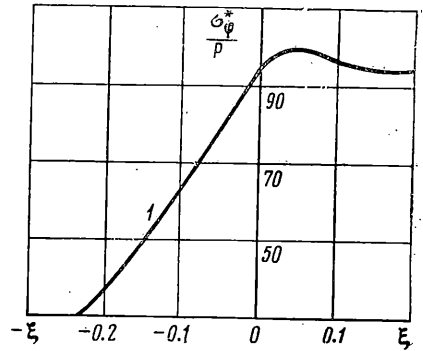
затухающие колебания и приближаются к постоянной величине. С увеличением скорости v прогиб впереди фронта возрастает, следовательно, увеличивается зона, охваченная движением. Прогиб и напряжения имеют наибольшие значения вблизи фронта. Величины прогиба в сечении $\xi=0$ можно определить по формулам соответственно для значения $v=a_1$ и $v=a_2$:

$$w = \frac{p\kappa\alpha}{E[\kappa - v^2 - \eta(2v + \eta) - \kappa\xi]}$$

$$w = \frac{p\kappa\alpha}{E[\kappa(1-\xi) - v^2(1-\kappa)]}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Окружные напряжения σ_ϕ^* пропорциональны радиальному прогибу и наибольшие значения σ_ϕ^* больше напряжений σ_z^* в несколько раз. Выражение для определения σ_ϕ на фронте волны имеет вид

$$\sigma_\phi = [\kappa - v(v + \eta)] w / (1 - v^2) \kappa$$

Результаты численного примера показывают, что совпадение скорости v со скоростью продольной волны в среде приводит к увеличению напряжений σ_z^* в оболочке.

3. Приведенные решения можно рассматривать как функцию влияния и определить w и σ для волны с произвольным профилем давления за фронтом с помощью интеграла

$$w_2 = p(0) w_0 + \int_0^\xi \frac{dp(\varepsilon)}{d\varepsilon} w_0 (\xi - \varepsilon) d\varepsilon$$

где w_2 — перемещение под действием волны давления $p(\xi)$, w_0 — перемещение, вызванное ступенчатой волной.

Пусть давление за фронтом волны затухает по экспоненте

$$p(\xi) = p \exp(-y\xi) \tag{3.4}$$

где y — безразмерный показатель экспоненты, определяющий закон изменения давления за фронтом. Графики безразмерных прогибов w_2/h , возникающих под действием волны (3.1), представлены на фиг. 1 (кривые 4 и 5 соответственно для $y=2, 4$, $v=a_1$, $p=1$ МПа). Как видно, при одинаковых давлениях на фронте прогибы, вызванные волной (3.1), меньше по сравнению с прогибами, возникающими под действием ступенчатой волны, и за фронтом они быстро затухают.

Поступила 3 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Якушев Н. З. Динамика строительных систем под воздействием движущихся нагрузок, ч. II. Полупространства, пластинки и оболочки под действием подвижных нагрузок. В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек, вып. 9. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1972.
2. Григolloк Э. И., Горшков А. Г. Взаимодействие слабых ударных волн с упругими конструкциями. Научн. тр. Ин-та механики МГУ, 1970, № 2.
3. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М., «Наука», 1972.
4. Панкович П. Ф. Теория упругости. Л.—М., Оборонгиз, 1939.
5. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1949.