МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1979

УДК 531.383

НЕКОНСЕРВАТИВНЫЕ МОМЕНТЫ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА ПРЕЦЕССИЮ НЕКОНТАКТНОГО ГИРОСКОПА

Г. Г. ДЕНИСОВ, В. Н. КОМАРОВ

(Горький)

Исследование прецессионных уравнений движения гироскопа с неконтактным подвесом ротора [1–5] под действием моментов, имеющих силовую функцию, позволило, с одной стороны, детально проанализировать движение в некоторых частных случаях силовой функции и, с другой стороны, установить некоторые общие закономерности, присущие траекториям при произвольных консервативных моментах. В частности, установлено, что в неподвижной относительно Земли системе координат траектории замкнуты и симметричны относительно плоскости местного меридиана.

При большом количестве работ, посвященных влиянию трения на работу гироприборов (см., например, библиографию к обзорам [6, 7]), лишь в некоторых освещены вопросы движения в сопротивляющейся среде твердого тела с закрепленной точкой [8–11]. В данной работе выявлены некоторые общие свойства неконсервативных моментов в гироскопах с неконтактным подвесом и проанализировано их влияние на движение гироскопа.

1. Рассмотрим задачу о траекториях гироскопа с неконтактным осесимметричным подвесом ротора в режиме слежения, при котором с целью уменьшения уводящих моментов ось симметрии подвеса совмещается с кинетическим моментом ротора. В этом случае действующие на ротор моменты определяются лишь углом между вертикалью и осью прибора. При рассмотрении будем считать, что энергия моментного воздействия поля подвеса на ротор мала по сравнению с кинетической энергией ротора и связь поступательных и угловых движений ротора пренебрежимо мала.

При сделанных предположениях в неподвижной относительно Земли системе координат прецессионное движение кинетического момента $\mathbf{H}$ описывается уравнением

$$d\mathbf{H}/dt+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{H}=M \tag{1.1}$$

где $\mathbf{\Omega}$ — угловая скорость вращения Земли, а $\mathbf{M}$ — усредненный по свободному движению ротора момент.

Рассмотрим сначала случай, когда момент $\mathbf{M}$ имеет консервативную природу. Усредненная по свободному движению ротора силовая функция W [3] его взаимодействия с осесимметричным полем подвеса является четной и периодической функцией угла Θ между вертикалью и кинетическим моментом, что позволяет представить ее суммой полиномов Лежандра [4, 5]:

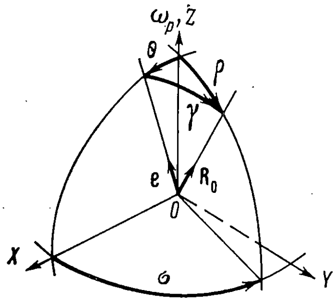
$$W=\sum_{l}^{L_w} A_l P_l(\cos\Theta) \tag{1.2}$$

откуда для консервативного момента имеем

$$\mathbf{M}=\frac{\mathbf{e}\times\mathbf{h}_0}{\sin\Theta}\frac{dW}{d\Theta}=-(\mathbf{e}\times\mathbf{h}_0)W' \tag{1.3}$$

где штрих означает дифференцирование по $\cos\Theta$, а $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}_0$ — орты вертикали и кинетического момента.

Если же момент $\mathbf{M}$ имеет неконсервативную природу, то естественно предположить, что он создается тангенциальными силами, действующими на поверхности ротора, причем локально эти силы направлены против скорости $\mathbf{u}$ движения поверхности, а плотность их f_τ зависит от величины u и пропорциональна плотности нормальных сил f_n. Рассмотрим сферически симметричную систему «подвес — ротор», в которой в отсутствие силы тяжести плотность сил f_n в любой точке поверхности ротора постоянна. При действии силы тяжести устанавливается некоторое распределение $f_n(\cos\gamma)$ на поверхности ротора с осью симметрии вдоль вертикали, где $\cos\gamma=\mathbf{e}\cdot\mathbf{R}_0$.



Фиг. 1

Введем правую систему координат XYZ с началом в неподвижной точке ротора, полярной осью OZ вдоль мгновенной угловой скорости ротора $\boldsymbol{\omega}_p$ относительно подвеса и осью OY по нормали к плоскости векторов $\boldsymbol{\omega}_p$ и $\mathbf{g}$ (фиг. 1). Координаты текущей точки $\mathbf{R}$ поверхности сферического ротора зададим углами ρ и σ.

С учетом сделанных предположений тангенциальная сила, действующая на элемент ds поверхности ротора, запишется в виде

$$\mathbf{f}_\tau(\gamma, \mathbf{u})\,ds = -f_n(\cos\gamma)\,Q(u)\,\mathbf{u}_0\,ds$$

$$f_n(\cos\gamma)=\sum_l^L f_l P_l(\cos\gamma), \qquad Q(u)=\sum_k q_k u^k$$

где функция $f_n(\cos\gamma)$ характеризует распределение нормальных сил на поверхности ротора, а $Q(u)$ определяет зависимость плотности тангенциальных сил от скорости $u=\omega_p R\sin\rho$ элемента поверхности. (Если ряд содержит лишь один член с $k=0$ — сухое трение; $k=1$ — вязкое.) Учитывая приведенные разложения, запишем окончательное выражение для плотности тангенциальных сил на поверхности ротора и неконсервативного момента

$$\mathbf{f}_\tau = -\frac{1}{R^3}\mathbf{u}_0 \sum_k \sum_l^L f_{lk} P_l(\cos\gamma)\sin^k\rho \tag{1.4}$$

$$f_{lk}=f_l q_k \omega_p{}^k R^{k+3}, \qquad \mathbf{M}=\int_S (\mathbf{R}\times\mathbf{f}_\tau)\,ds$$

где интегрирование проводится по поверхности сферического ротора.

С использованием теоремы сложения для полиномов Лежандра

$$P_l(\cos\gamma)=P_l(\cos\Theta)P_l(\cos\rho)+2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l{}^m(\cos\Theta)P_l{}^m(\cos\rho)\cos m\sigma$$

после интегрирования по углу σ получим

$$\mathbf{M}=\mathbf{i}M_x+\mathbf{k}M_z=-\mathbf{i}\sum_k\sum_l^L 2\pi f_{lk}\frac{P_l^1(\cos\Theta)}{l(l+1)}\int_0^\pi \cos\rho\sin^{k+1}\rho P_l^1(\cos\rho)\,d\rho-$$

$$-\mathbf{k}\sum_k\sum_l^L 2\pi f_{lk}P_l(\cos\Theta)\int_0^\pi \sin^{k+2}\rho P_l(\cos\rho)\,d\rho= \tag{1.5}$$

$$=\mathbf{i}\sum_{l=2}^{L_v} B_l P_l^1(\cos\Theta)+\mathbf{k}\sum_{l=0}^{L_v}\Lambda_l P_l(\cos\Theta)$$

В силу свойств интегралов для нечетных l имеем $B_l=\Lambda_l=0$, а суммирование производится до $L_v=\min\{k+1,\ 2E(^1/_2L)\}$ при нечетных k (при $l>L_v$ $B_l=\Lambda_l=0$) и до $L_v=2E(^1/_2L)$ при четных k.

Пример 1. Сухое трение: $Q(u)=\alpha_0$

$$M_x=-{}^1/_{64}\pi^2[f_{20}P_2^1(\cos\Theta)+{}^1/_8f_{40}P_4^1(\cos\Theta)+{}^1/_{128}f_{60}P_6^1(\cos\Theta)+\ldots]$$
$$M_z=-{}^1/_2\pi^2[f_{00}P_0(\cos\Theta)-{}^1/_8f_{20}P_2(\cos\Theta)-{}^1/_{64}f_{40}P_4(\cos\Theta)+\ldots]$$

где ряды заканчиваются высшей четной гармоникой разложения $f_n(\cos\gamma)$ в ряд по полиномам Лежандра $L_v=2E(^1/_2L)$.

Пример 2. Вязкое трение: $Q(u)=\alpha_1 u$

$$M_x=-{}^4/_{15}\pi f_{21}P_2^1(\cos\Theta),\qquad M_z=-{}^8/_{15}\pi[f_{01}P_0(\cos\Theta)-{}^1/_5f_{21}P_2(\cos\Theta)]$$

независимо от L.

Таким образом, если трение вязкое, то при произвольной плотности сил уводящий момент содержит только $P_2^1(\cos\Theta)$ и определяется амплитудой лишь второй гармоники f_2 разложения плотности сил по полиномам Лежандра. Следовательно, если создать конфигурацию поля подвеса такой, что $f_2=0$, то при вязком трении уводящий момент исчезает, а тормозящий момент не зависит от наклона подвеса.

Сделаем некоторые общие заключения о характере неконсервативных моментов.

Мгновенный момент находится в плоскости векторов $\boldsymbol{\omega}_p$ и $\mathbf{g}$. Заметим, что так как для установившегося режима вращения ротора среднее положение $\boldsymbol{\omega}_p$ совпадает с направлением его кинетического момента, то усредненные по свободному движению ротора неконсервативные моменты лежат в плоскости векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{g}$[1]. Вид и направление полученных моментов позволяет записать средние значения уводящего момента $\mathbf{M}_\tau$ и тормозящего момента $\mathbf{M}_h$ следующим образом:

$$\mathbf{M}_\tau=\frac{(\mathbf{e}\times\mathbf{h}_0)\times\mathbf{h}_0}{\sin\Theta}\sum_{l=2}^{L_v}B_lP_l^1(\cos\Theta)$$
$$\mathbf{M}_h=-\mathbf{h}_0\sum_{l=0}^{L_v}\Lambda_lP_l(\cos\Theta),\qquad \cos\Theta=\mathbf{e}\cdot\mathbf{h}_0 \tag{1.6}$$

[1] Можно показать, что если $(\mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\omega}_p)\leqslant 0$ для всех Θ, то установившийся режим вращения ротора представляет собой асимптотически устойчивое вращение вокруг оси с наибольшим моментом инерции.

В выражения (1.6) входят полиномы Лежандра лишь с четными номерами. Это является отражением того факта, что для неконсервативного момента должно выполняться условие

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\omega})=-\mathbf{M}(-\boldsymbol{\omega}) \tag{1.7}$$

Действительно, в выражениях (1.6) вместе с заменой $\boldsymbol{\omega}$ на $-\boldsymbol{\omega}$ необходимо еще произвести замену Θ на $\pi-\Theta$. При этом для выполнения условия (1.7) необходимо, чтобы $P_l(\cos\Theta)=P_l(-\cos\Theta)$, $P_l^1(\cos\Theta)=-P_l^1(-\cos\Theta)$, что возможно лишь при четных l.

В силу общности условия (1.7) четность l для неконсервативных моментов будет иметь место не только при поверхностном воздействии поля на ротор, но и в более общем случае.

Приведенные результаты получены из рассмотрения сферически симметричного подвеса, но, как показывают вычисления, они остаются в силе и для осесимметричного подвеса с плоскостью симметрии.

Обычно $\mathbf{M}_h$ либо компенсируется специальным двигателем, либо настолько мал, что его действием можно пренебречь. В связи с этим в уравнении (1.1) будем учитывать лишь уводящие моменты.

Выражение (1.6) для уводящего неконсервативного момента позволяет ввести формально функцию

$$V(\cos\Theta)=\sum_{l=2}^{L_v} B_l P_l(\cos\Theta)$$

и представить этот момент в виде

$$M=\frac{(\mathbf{e}\times\mathbf{h}_0)\times\mathbf{h}_0}{\sin\Theta}\frac{dV}{d\Theta}=-V'(\mathbf{e}\times\mathbf{h}_0)\times\mathbf{h}_0$$

2. С введением силовых функций $W(\cos\Theta)$ и $V(\cos\Theta)$ уравнение движения запишется в виде

$$d\mathbf{H}/dt+\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{H}=-W'(\mathbf{e}\times\mathbf{h}_0)-V'(\mathbf{e}\times\mathbf{h}_0)\times\mathbf{h}_0 \tag{2.1}$$

причем $H^2=\text{const}$, в чем легко убедиться, умножив уравнение скалярно на $\mathbf{H}$. Предполагая использование асимптотических методов для исследования приведенного уравнения, перейдем к безразмерным переменным и параметрам:

$$\tau=\omega_* t,\quad \omega=\Omega/\omega_*,\quad w=W/H\omega_*,\quad v=V/H\omega_*,$$

$$a_l=A_l/H\omega_*,\quad b_l=B_l/H\omega_*,\quad a=\sqrt{\sum_l a_l^2},\quad b=\sqrt{\sum_l b_l^2}.$$

В произвольной неподвижной относительно Земли системе координат X_i $(i=1,2,3)$, где орты $\mathbf{h}_0$, $\mathbf{e}$, $\boldsymbol{\Omega}_0$ заданы через соответствующие сферические углы

$$\mathbf{h}_0\{\sin\vartheta\cos\varphi,\ \sin\vartheta\sin\varphi,\ \cos\vartheta\},\qquad \mathbf{e}\{\sin\rho_1\cos\sigma_1,\ \sin\rho_1\sin\sigma_1,\ \cos\rho_1\}$$

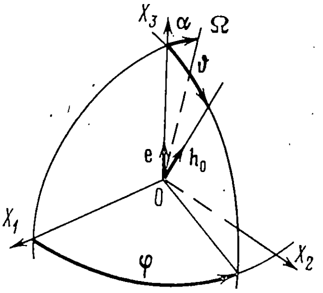
$$\boldsymbol{\Omega}_0\{\sin\rho_2\cos\sigma_2,\ \sin\rho_2\sin\sigma_2,\ \cos\rho_2\}$$

уравнение (2.1) эквивалентно системе двух скалярных уравнений

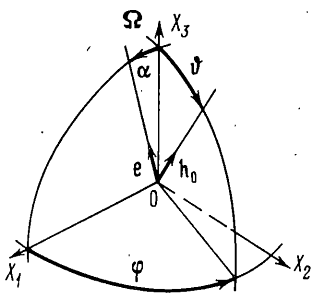
$$\begin{gathered}\vartheta^{\bullet}=-\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+\frac{\partial v}{\partial\vartheta}+\omega\sin\rho_2\sin(\varphi-\sigma_2)\\ \varphi^{\bullet}\sin\vartheta=\frac{\partial w}{\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\omega[\sin\rho_2\cos\vartheta\cos(\varphi-\sigma_2)-\cos\rho_2\sin\vartheta]\end{gathered} \tag{2.2}$$

где точкой обозначено дифференцирование по τ. Выбор конкретной системы координат и масштаба времени ω_*^{-1} определяется решаемой задачей и соотношением входящих в уравнение параметров.

Таким образом, задача о прецессионном движении неконтактного гироскопа свелась к исследованию нелинейной динамической системы второго порядка на сфере. Представляет интерес качественный вид траекторий на единичной сфере $h_0^2=1$ и зависимость их от параметров системы. Как известно [12, 13], для выяснения качественной картины разбиения сферы на ячейки с одинаковым характером траекторий, задаваемых уравне-



Фиг. 2



Фиг. 3

ниями (2.2), достаточно знания особых траекторий: состояний равновесия, предельных циклов и их устойчивости, сепаратрисных траекторий.

Для отыскания состояний равновесия и исследования их устойчивости при произвольном соотношении параметров уравнений удобно перейти в систему координат (фиг. 2) с полярной осью OX_3, направленной по вертикали ($\rho_1=0$), и отсчетной осью OX_1, лежащей в плоскости местного меридиана ($\rho_2=\alpha$, $\sigma_2=\pi$). В этом случае $\Theta=\vartheta$ и уравнения (2.2) принимают вид

$$\begin{gathered}\vartheta^{\cdot}=-\sin\vartheta v'(\cos\vartheta)-\omega\sin\alpha\sin\varphi\\ \varphi^{\cdot}\sin\vartheta=-\sin\vartheta w'(\cos\vartheta)-\omega(\sin\alpha\cos\vartheta\cos\varphi+\cos\alpha\sin\vartheta)\end{gathered}\tag{2.3}$$

где α — дополнение к широте места.

Состояния равновесия ϑ_p, φ_p определяются системой уравнений

$$\begin{gathered}\sin^2\vartheta[(v'\cos\vartheta)^2+(w'+\omega\cos\alpha)^2]=\omega^2\sin^2\alpha\cos^2\vartheta\\ \operatorname{tg}\varphi=v'\cos\vartheta(w'+\omega\cos\alpha)^{-1}\end{gathered}\tag{2.4}$$

а их устойчивость обеспечивается при выполнении неравенств

$$\begin{gathered}\operatorname{tg}\vartheta\frac{d}{d\vartheta}[(v'\cos\vartheta)^2+(w'+\omega\cos\alpha)^2]+2\omega^2\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\vartheta}\Big|_{\vartheta_p}>0\\ \sin^2\vartheta v''-2\cos\vartheta v'=-\sum_{l=2}^{L_v}b_l l(l+1)P_l(\cos\vartheta)\,|_{\vartheta_p}<0\end{gathered}\tag{2.5}$$

Выполнение первого из неравенств обеспечивает неседловой характер состояния равновесия (узел или фокус), а второго — его асимптотическую устойчивость, определяемую лишь неконсервативными моментами.

Из уравнений (2.4) следует, что число m состояний равновесия всегда четно и $m\leqslant 2\max\{L_w, L_v+1\}$.

Отыскание предельных циклов системы уравнений (2.2) в общем случае едва ли возможно из-за отсутствия регулярных и достаточно эффективных методов, однако в некоторых частных случаях эта задача легко решается.

3. Рассмотрим движение при больших по сравнению с влиянием вращения Земли моментах: ($ab=1$; $\omega\sim\varepsilon\ll 1$). Уравнения (2.3) для этого случая запишем в виде

$$\begin{gathered}\vartheta^{\cdot}+\sin\vartheta v'=-\varepsilon\sin\alpha\sin\varphi\\(\varphi^{\cdot}+w')\sin\vartheta=-\varepsilon(\sin\alpha\cos\vartheta\cos\varphi+\cos\alpha\sin\vartheta)\end{gathered}\tag{3.1}$$

Будем искать решение в виде $\vartheta=\vartheta^{(0)}+\varepsilon\vartheta^{(1)}+\ldots$; $\varphi=\varphi^{(0)}+\varepsilon\varphi^{(1)}+\ldots$.

В порождающей системе ($\varepsilon=0$) существуют лишь два изолированных состояния равновесия $\vartheta_p=0$; π, устойчивые при $\cos\vartheta v'|_{\vartheta_p}>0$ и неустойчивые при $\cos\vartheta v'|_{\vartheta_p}<0$. В системе имеются замкнутые траектории (предельные циклы), число и положение которых определяется корнями уравнения $v'(\cos\vartheta)=0$. Очевидно, что число их не превышает (L_v-1). Угловая скорость прецессии гироскопа на этих циклах постоянна и равна $\varphi^{\cdot}=-w'$. В частном случае совпадения корней уравнений $v'=0$ и $w'=0$ эти циклы представляют собой континуумы состояний равновесия. Устойчивость циклов, как и состояний равновесия, определяется лишь неконсервативными моментами: цикл устойчив при $v''<0$ и неустойчив при $v''>0$.

Заметим, что порождающая система при произвольных начальных условиях решается в квадратурах

$$\tau-\tau_0=\int\limits_{\cos\vartheta_0}^{\cos\vartheta}\frac{d\xi}{(1-\xi^2)v'(\xi)},\qquad \varphi-\varphi_0=-\int\limits_{\tau_0}^{\tau}w'[\cos\vartheta(\xi)]d\xi$$

Функции $\vartheta^{(1)}$ и $\varphi^{(1)}$ подчиняются уравнениям

$$\begin{gathered}\vartheta^{\cdot(1)}+(\cos\vartheta^{(0)}v'-\sin^2\vartheta^{(0)}v'')\vartheta^{(1)}=-\sin\alpha\sin\varphi^{(0)}\\ \varphi^{\cdot(1)}\sin\vartheta^{(0)}-\sin^2\vartheta^{(0)}w''\vartheta^{(1)}=-(\sin\alpha\cos\vartheta^{(0)}\cos\varphi^{(0)}+\cos\alpha\sin\vartheta^{(0)})\end{gathered}\tag{3.2}$$

Уточнение решения, т. е. нахождение $\vartheta^{(1)}(\tau)$ и $\varphi^{(1)}(\tau)$, затруднено сложностью зависимостей $\vartheta^{(0)}(\tau)$ и $\varphi^{(0)}(\tau)$. Значительно проще уточняются траектории. Действительно, так как из (3.1) $d\tau=-d\vartheta^{(0)}/\sin\vartheta^{(0)}v'$, то нетрудно получить

$$\vartheta^{(1)}=\sin\alpha\sin\vartheta v'\int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta}\frac{\sin\varphi(\vartheta)}{(\sin\vartheta v')^2}d\vartheta$$

$$\varphi^{(1)}=\int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta}\frac{\sin\alpha\cos\vartheta\cos\varphi(\vartheta)+\cos\alpha\sin\vartheta-\vartheta^{(1)}\sin^2\vartheta w''}{\sin^2\vartheta v'}d\vartheta$$

где ϑ и φ берутся вдоль порождающего решения.

Анализ уравнений (3.2) показывает, что если в порождающей системе имелись предельные циклы, то они сохраняются, несколько изменяя свою форму ($\vartheta\neq\mathrm{const}$), и при учете членов первого приближения.

Таким образом, при больших моментах поверхность единичной сферы $h_0^2=1$ оказывается разделенной на охватывающие вертикаль пояса, границами которых служат предельные циклы. При начальных условиях (ϑ_0, φ_0) вне циклов и состояний равновесия траектории гироскопа представляют собой спирали, скручивающиеся с неустойчивых предельных циклов и состояний равновесия и накручивающиеся на устойчивые предельные циклы и состояния равновесия.

Пример 3. Прецессия гироскопа под действием моментов с функциями $w=a_1P_1+{}^1/_3a_2P_2$ и $v={}^1/_3b_2P_2$, где функция w может быть обусловлена, например, небалансом ротора и его эллипсоидальностью, а v — вязким трением.

При $\varepsilon=0$ траектории задаются уравнением

$$b_2\varphi-a_1\ln|\operatorname{tg}\vartheta|-a_2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right|=C$$

а зависимость от времени определяется выражением

$$\operatorname{tg}\vartheta=\operatorname{tg}\vartheta_0\exp\left[-b_2(\tau-\tau_0)\right]$$

В зависимости от начальных условий (ϑ_0, φ_0) траектория целиком лежит в одной из полусфер $0\leqslant\vartheta<{}^1/_2\pi$ (${}^1/_2\pi<\vartheta\leqslant\pi$), стягиваясь (при $b_2>0$) к устойчивому состоянию равновесия $\vartheta_p=0$ ($\vartheta_p=\pi$). Граница раздела полусфер $\vartheta={}^1/_2\pi$ представляет собой неустойчивый предельный цикл с постоянной вдоль него угловой скоростью, определяемой лишь небалансом: $\varphi^\cdot=-a_1$. Учет скорости вращения Земли позволяет уточнить форму цикла

$$\vartheta\approx{}^1/_2\pi+\varepsilon(a_1^2+b_2^2)^{-1}\sin\alpha(b_2\sin\varphi+\cos\varphi)$$

и угловой скорости вдоль него

$$\varphi^\cdot\approx-(a_1+\varepsilon\cos\alpha)+\varepsilon(a_1^2+b_2^2)^{-1}a_2\sin\alpha(b_2\sin\varphi+\cos\varphi)$$

Со сменой знака b_2 меняется устойчивость состояний равновесия и цикла.

4. Случай малых моментов ($\omega_*=\Omega$, $\sqrt{ab}\sim\varepsilon\ll1$) удобнее рассмотреть в системе координат X_i с полярной осью OX_3 (см. фиг. 3) вдоль $\mathbf{\Omega}$ ($\rho_2=0$, $\rho_1=\alpha$, $\sigma_1=0$), где уравнения (2.2) примут вид

$$\vartheta^\cdot=-\varepsilon\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial w}{\partial\varphi}-\frac{\partial v}{\partial\vartheta}\right),\qquad\varphi^\cdot+1=\frac{\varepsilon}{\sin\vartheta}\left(\frac{\partial w}{\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)$$

Представив переменные ϑ и φ в виде: $\vartheta=\vartheta^{(0)}+\varepsilon\vartheta^{(1)}+\ldots$; $\varphi=\varphi^{(0)}+\varepsilon\varphi^{(1)}+\ldots$, где $\vartheta^{(0)}$ и $\varphi^{(0)}$ — порождающее решение: $\vartheta^{(0)}=\mathrm{const}$; $\varphi^{(0)}=\varphi_0^{(0)}-(\tau-\tau_0)$ — движение идеального гироскопа — в первом приближении по ε получим

$$\vartheta^{(1)}=\frac{1}{\sin\vartheta}\left[w(\vartheta,\varphi)-w(\vartheta,\varphi_0)\right]-\frac{\partial}{\partial\vartheta}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}v(\vartheta,\xi)\,d\xi$$

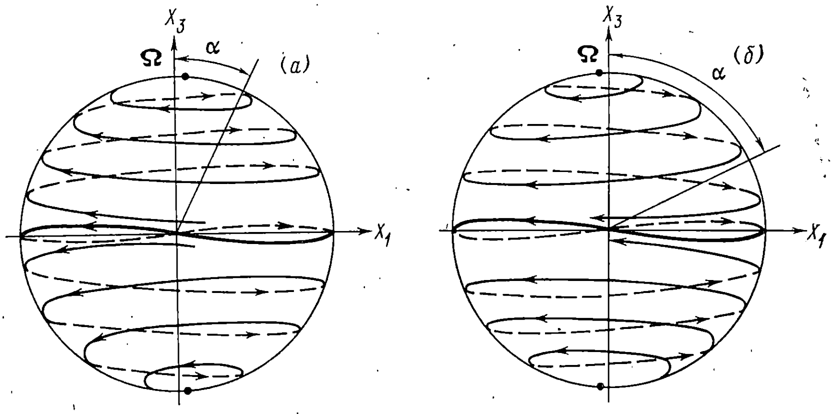
$$\varphi^{(1)}=\frac{1}{\sin^2\vartheta}\left[v(\vartheta,\varphi_0)-v(\vartheta,\varphi)\right]-\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}w(\vartheta,\xi)\,d\xi$$

$$(\vartheta=\vartheta^{(0)};\ \varphi=\varphi^{(0)})$$

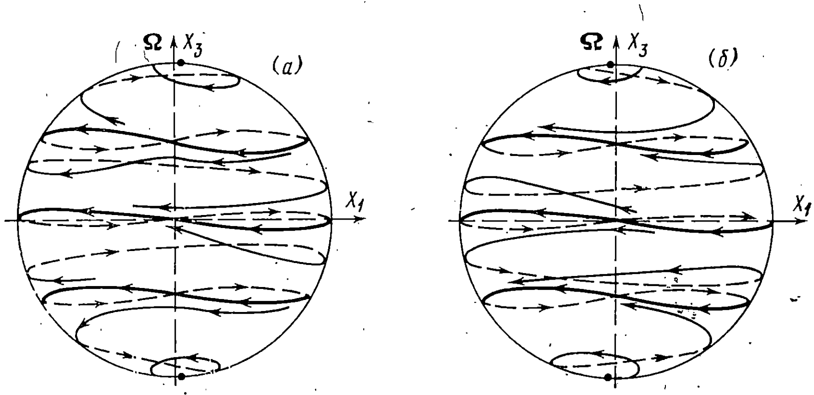
Так как

$$\left\|\begin{matrix}w\\v\end{matrix}\right\|=\sum_l\left\|\begin{matrix}a_l\\b_l\end{matrix}\right\|\Bigg[P_l(\cos\alpha)P_l(\cos\vartheta)+$$

$$+2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\alpha)P_l^m(\cos\vartheta)\cos m\varphi\Bigg]$$



Фиг. 4



Фиг. 5

то

$$\vartheta^{(1)}=\sum_l\left[(\tau-\tau_0)\lambda_l(\vartheta)+\vartheta_l^{(1)}(\vartheta,\varphi)-\vartheta_l^{(1)}(\vartheta,\varphi_0)\right]\Big|_{\substack{\vartheta=\vartheta^{(0)}\\ \varphi=\varphi^{(0)}}}$$

$$\lambda_l=b_lP_l(\cos\alpha)P_l^1(\cos\vartheta)$$

$$\vartheta_l^{(1)}=2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\alpha)\left\{\frac{a_lP_l^m(\cos\vartheta)}{\sin\vartheta}\cos m\varphi-\right.$$

$$\left.-\frac{b_l}{m}[m\operatorname{ctg}\vartheta P_l^m(\cos\vartheta)+P_l^{m+1}(\cos\vartheta)]\sin m\varphi\right\}$$

Аналогично

$$\varphi^{(1)}=\sum_l\left[\omega_l(\vartheta)(\tau-\tau_0)+\varphi_l^{(1)}(\vartheta,\varphi)-\varphi_l^{(1)}(\vartheta,\varphi_0)\right]\Big|_{\substack{\vartheta=\vartheta^{(0)}\\ \varphi=\varphi^{(0)}}}$$

$$\omega_l=a_l\sin^{-1}\vartheta P_l(\cos\alpha)P_l^1(\cos\vartheta)$$

$$\varphi_l^{(1)}=-\frac{2}{\sin\vartheta}\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\alpha)\left\{\frac{b_lP_l^m(\cos\vartheta)}{\sin\vartheta}\cos m\varphi+\right.$$

$$\left.+\frac{a_l}{m}[m\operatorname{ctg}\vartheta P_l^m(\cos\vartheta)+P_l^{m+1}(\cos\vartheta)]\sin m\varphi\right\}$$

Из полученных выражений видно, что наличие малых консервативных моментов ($a_l \neq 0$) лишь несколько изменяет период обращения вектора **H** и форму траектории, в то время как неконсервативные моменты ($b_l \neq 0$) меняют характер траекторий — разрушают их замкнутость.

Количество и расположение замкнутых траекторий или предельных циклов в первом приближении по ε определяется корнями уравнения

$$\lambda = \sum_l \lambda_l = \sum_l b_l P_l(\cos\alpha) P_l^1(\cos\vartheta) = 0 \qquad (4.1)$$

Очевидно, что число таких траекторий не превышает ($L_v - 1$). Уравнение (4.1) позволяет не только найти предельные циклы $\lambda(\vartheta_*)=0$, но и сделать вывод об их устойчивости: цикл устойчив при $\lambda_{\vartheta_*}' < 0$ и неустойчив при $\lambda_{\vartheta_*}' > 0$.

Необходимо отметить, что число состояний равновесия и циклов, их расположение и устойчивость определяется не только действующими моментами, но и широтой места нахождения гироскопа. Так, если диссипативный момент представлен второй гармоникой $v = b_2 P_2$ ($b_2 > 0$), то равновесные положения гироскопа $\vartheta_p \approx 0$; π (ориентация на Полярную Звезду и противоположная ей) асимптотически устойчивы, а предельный цикл $\vartheta_* \approx {}^1/_2\pi$ неустойчив при $3\cos^2\alpha > 1$, т. е. в широтах выше 35°. Качественное поведение траектории для различных широт приведено на фиг. 4 (фиг. 4, *а* соответствует $3\cos^2\alpha > 1$, а фиг. 4, *б* — $3\cos^2\alpha < 1$). На фиг. 5 приведены аналогичные картины при действии момента с $v = b_4 P_4$ (фиг. 5, *а* соответствует $0 \leqslant \cos^2\alpha \leqslant 0.1156$ или $0.7416 \leqslant \cos^2\alpha \leqslant 1$, фиг. 5, *б* — $0.1156 \leqslant \cos^2\alpha \leqslant 0.7416$).

Уводящие моменты с более высокими номерами гармоник и, в особенности, их суперпозиция делают картину разбиения сферы более сложной, зависящей в общем случае от широты места и от соотношения амплитуд гармоник. Так, если диссипативный момент мал и представлен лишь l-й гармоникой, то имеются два состояния равновесия и ($l-1$) циклов, устойчивость которых при изменении α от нуля до π меняется l раз.

Поступила 25 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мартыненко Ю. Г.* Уходы электростатического гироскопа, вызываемые несферичностью ротора. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 1.
2. *Климов Д. М., Космодемьянская Г. Н., Черноусько Ф. Л.* О движении гироскопа с неконтактным подвесом. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 2.
3. *Белецкий В. В.* Динамика быстрых вращений. Научн. тр. Ин-та механики МГУ, 1973, № 29.
4. *Денисов Г. Г., Комаров В. Н.* О траекториях гироскопа с осесимметричным подвесом ротора при учете вращения Земли. Изв. вузов. Приборостроение, 1975, № 5.
5. *Денисов Г. Г., Урман Ю. М.* Прецессионные движения твердого тела под действием моментов, имеющих силовую функцию. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 6.
6. *Бутенин Н. В., Климов Д. М., Лунц Я. Л., Степанов Н. П.* Нелинейные задачи теории гироскопических систем. В сб.: Развитие механики гироскопических и инерциальных систем. М., «Наука», 1973.
7. *Бутенин Н. В., Климов Д. М.* Успехи механики гироскопических и инерциальных систем в СССР. Изв. вузов. Приборостроение, 1977, т. 20, № 10.
8. *Булгаков Б. В.* Прикладная теория гироскопов. Изд-во МГУ, 1976.
9. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., «Наука», 1965.
10. *Кошляков В. Н.* О некоторых частных случаях интегрирования динамических уравнений Эйлера, связанных с движением гироскопа в сопротивляющейся среде. ПММ, 1953, т. 17, вып. 2.
11. *Лещенко Д. Д.* О движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в слабо сопротивляющейся среде. Прикл. механ. 1975, т. 11, вып. 3.
12. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959.
13. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. М., «Наука», 1966.