МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1979

УДК 539.3:534.1

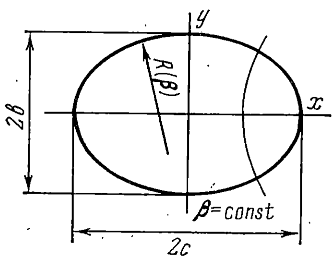
О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

М. КОЗАРОВ, К. МЛАДЕНОВ

(*София*)

Известно, что исследования, посвященные колебаниям тонкостенных конструкций и конструктивных элементов, находящихся под действием не только статических, но и динамических нагрузок, имеют большое значение для практических приложений. В [1, 2] приведена обширная библиография по вопросам линейных и нелинейных колебаний тонких плит и оболочек с круговым поперечным сечением. Некруговые цилиндрические оболочки обладают некоторыми интересными свойствами, главным образом в послекритическом состоянии [3] и в последнее время являются объектом интенсивного изучения, хотя реальных результатов исследований получено пока недостаточно (см., например, [4, 5]).

Рассматриваются нелинейные колебания тонкой, упругой цилиндрической оболочки с эллиптическим поперечным сечением. Решение получено методом Бубнова – Галеркина. В результате преобразований получено уравнение Дуффинга, решение которого дает частотно-амплитудные характеристики оболочки при различных эксцентриситетах. Кроме того, при помощи ЭВМ получены зависимости между эксцентриситетом поперечного сечения и минимальной частотой колебаний для линейной задачи при различных толщинах и длинах цилиндра. Показано, что изменение частоты связано с изменением средней кривизны поперечного сечения.



Фиг. 1

Хорошо известные результаты для круговой оболочки можно получить, полагая эксцентриситет $\varepsilon=0$.

1. Основные уравнения. Дифференциальные уравнения движения оболочки могут быть получены из [1], если принять систему координат β и $\zeta=z/c$ (фиг. 1). Для удобства все характеристики оболочки приведены к безразмерной форме, причем у линейных величин масштаб c, а у времени $t=\tau c[\rho_0(1-\mu^2)/E]^{1/2}$, где E и μ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона, а ρ_0 — плотность.

В результате преобразований получим следующие уравнения относительно безразмерных перемещений u, v и w:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}+\frac{1+\mu}{2h_1}\frac{\partial^2 v}{\partial\zeta\partial\beta}+\frac{1-\mu}{2h_1^2}\left(1+\frac{\delta_1^2}{12R_1^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}-\frac{\delta_1^2}{12R_1}\frac{\partial^3 w}{\partial\zeta^3}+$$
$$+\frac{1-\mu}{2}\frac{\delta_1^2}{12R_1^2h_1^2}\frac{\partial^3 w}{\partial\zeta\partial\beta^2}+\frac{\mu}{R_1}\frac{\partial w}{\partial\zeta}+\frac{1-\mu}{2h_1}\left[\frac{dH_1}{d\beta}+\frac{\delta_1^2}{6}\frac{d(\rho_1^2H_1)}{d\beta}\right]\frac{\partial u}{\partial\beta}+$$
$$+\frac{\delta_1^2}{12}\frac{1-\mu}{2h_1}\frac{d(\rho_1H_1)}{d\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta d\beta}+\frac{\partial w}{\partial\zeta}\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta^2}+\frac{1-\mu}{2h_1^2}\frac{\partial w}{\partial\zeta}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\frac{1+\mu}{2h_1^2}\frac{\partial w}{\partial\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta\partial\beta}+$$
$$+\frac{1-\mu}{2h_1}\frac{dH_1}{d\beta}\frac{\partial w}{\partial\zeta}\frac{\partial w}{\partial\beta}-\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}=0$$

$$\frac{1+\mu}{2h_1}\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\beta}+\frac{1-\mu}{2}\left(1-\frac{\delta_1^2}{12R_1^2}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{h_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}+\frac{1}{h_1}\frac{dH_1}{d\beta}\frac{\partial v}{\partial\beta}-$$
$$-\frac{\delta_1^2}{12h_1^2}\left(\frac{d\rho_1}{d\beta}\right)^2 v-\frac{3-\mu}{2}\frac{\delta_1^2}{12R_1h_1}\frac{\partial^3 w}{\partial\zeta^2 d\beta}+\frac{\delta_1^2}{12h_1^3}\frac{d\rho_1}{d\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+$$
$$+\left[\frac{1}{R_1h_1}+\frac{\delta_1^2}{12h_1^2}\frac{d\rho_1}{d\beta}\frac{dH_1}{d\beta}\right]\frac{\partial w}{\partial\beta}+\left[\frac{1}{h_1}\frac{d\rho_1}{d\beta}+\frac{\delta_1^2}{12R_1^2h_1}\frac{d\rho_1}{d\beta}\right]w+$$
$$+\frac{1}{h_1^3}\frac{\partial w}{\partial\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\frac{1-\mu}{2h_1}\frac{\partial w}{\partial\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta^2}+$$
$$+\frac{1+\mu}{2h_1}\frac{\partial w}{\partial\zeta}\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta\partial\beta}+\frac{1}{h_1^2}\frac{dH_1}{d\beta}\left(\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)^2-\frac{\partial^2 v}{\partial\tau^2}=0$$

$$\frac{\mu}{R_1}\frac{\partial u}{\partial\zeta}+\frac{1}{R_1h_1}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{w}{R_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta^2}+\frac{\delta_1^2}{12}\left\{\frac{1}{h_1^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial\zeta^4}+\frac{2}{h_1^2}\frac{\partial^4 w}{\partial\zeta^2\partial\beta^2}+\right.$$
$$+\frac{6}{h_1^3}\frac{dH_1}{d\beta}\frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3}+\frac{2}{h_1}\frac{dH_1}{d\beta}\frac{\partial^3 w}{\partial\zeta^2\partial\beta}+$$
$$+\left[\frac{2}{R_1^2h_1^2}+\frac{7}{h_1^2}\left(\frac{dH_1}{d\beta}\right)^2+\frac{1}{h_1^3}\frac{\partial^2 H_1}{\partial\beta^2}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+$$
$$+\left[\frac{2}{R_1^2h_1}\frac{dH_1}{d\beta}+\frac{2}{h_1^2}\frac{d\rho^2}{d\beta}+\frac{1}{h_1^3}\frac{d^3H_1}{d\beta^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{4}{h_1^2}\frac{dH_1}{d\beta}\frac{d^2H_1}{d\beta^2}+\frac{1}{h_1}\left(\frac{dH_1}{d\beta}\right)^3\right]\frac{\partial w}{\partial\beta}+$$
$$+\left[\frac{1}{R_1^4}+\frac{1}{h_1^2}\frac{d^2\rho_1^2}{d\beta^2}+\frac{1}{h_1}\frac{dH_1}{d\beta}\frac{d\rho_1^2}{d\beta^2}\right]w-$$
$$-\frac{1}{R_1}\frac{\partial^3 u}{\partial\zeta^2}+\frac{1-\mu}{2R_1h_1^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\zeta\partial\beta^2}+\frac{1-\mu}{2h_1}\frac{d(\rho_1H_1)}{d\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\beta}-$$
$$-\frac{3-\mu}{2R_1h_1}\frac{\partial^3 v}{\partial\zeta^2\partial\beta}-\frac{3(1-\mu)}{2h_1}\frac{d\rho_1}{d\beta}\frac{\partial^2 v}{\partial\zeta^2}-\frac{1}{h_1^3}\frac{d\rho_1}{d\beta}\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}-$$
$$-\left[\frac{2}{h_1^3}\frac{d^2\rho_1}{d\beta^2}+\frac{3}{h_1^2}\frac{dH_1}{d\beta}\frac{d\rho_1}{d\beta}\right]\frac{\partial v}{\partial\beta}-\left[\frac{1}{R_1^2h_1}\frac{d\rho_1}{d\beta}+\right.$$
$$+\frac{3}{h_1^2}\frac{dH_1}{d\beta}\frac{d^2\rho_1}{d\beta^2}+\frac{1}{h_1^2}\frac{d^2H_1}{d\beta^2}\frac{d\rho_1}{d\beta}+$$
$$\left.\left.+\frac{1}{h_1}\left(\frac{dH_1}{d\beta}\right)^2\frac{d\rho_1}{d\beta}+\frac{1}{h_1^3}\frac{d^3\rho_1}{d\beta^3}\right]v\right\}-$$
$$-\frac{1-\mu^2}{E\delta_1}\left[N_1\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta^2}+N_2\frac{1}{h_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+(T_{12}+T_{21})\frac{1}{h_1}\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta\partial\beta}+\right.$$
$$+\frac{N_2}{h_1}\frac{dH_1}{d\beta}\frac{\partial w}{\partial\beta}+\frac{\partial N_1}{\partial\zeta}\frac{\partial w}{\partial\zeta}+\frac{1}{h_1}\frac{\partial T_{12}}{\partial\zeta}\frac{\partial w}{\partial\beta}+$$
$$\left.+\frac{1}{h_1}\frac{\partial T_{21}}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\zeta}+\frac{1}{h_1^2}\frac{\partial N_2}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right]=0 \qquad (1.1)$$

$$N_1=\frac{E\delta_1}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial\zeta}+\frac{\mu}{h_1}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{\mu}{R_1}w-\right.$$

$$\left.-\frac{\delta_1{}^2}{12R_1}\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right)^2+\frac{\mu}{2h_1{}^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)^2\right]$$

$$N_2=\frac{E\delta}{1-\mu^2}\left[\frac{1}{h_1}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\mu\frac{\partial u}{\partial\zeta}+\frac{w}{R_1}+\frac{\delta_1{}^2}{12R_1}\frac{1}{h_1{}^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\delta_1{}^2H_1}{12R_1}\frac{dH_1}{d\beta}\frac{dw}{d\beta}+\frac{1}{2h_1{}^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right)^2\right]$$

$$T_{12}=\frac{E\delta_1}{2(1+\mu)}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial\beta}+\frac{\partial v}{\partial\zeta}-\frac{\delta_1{}^2H_1}{12R_1}\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta\,\partial\beta}+\frac{1}{h_1}\frac{\partial w}{\partial\zeta}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)$$

$$T_{21}=\frac{E\delta_1}{2(1+\mu)}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial\beta}+\frac{\partial v}{\partial\zeta}+\frac{\delta_1{}^2H_1}{12R_1}\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta\,\partial\beta}+\frac{1}{h_1}\frac{\partial w}{\partial\zeta}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)\tag{1.2}$$

$$1/R_1=\rho_1=\theta/h_1{}^3,\quad \theta=\sqrt{1-\varepsilon^2}$$
$$1/H_1=h_1=(1-\varepsilon^2\cos^2\beta)^{1/2},\quad \varepsilon^2=1-b^2/c^2$$

Здесь δ_1, R_1 — соответственно безразмерная толщина стенки и радиус кривизны, h_1 — безразмерный коэффициент Ляме и ε — эксцентриситет оболочки.

2. Решение системы. Решение системы (1.1) будем искать в виде

$$u=f_u(\tau)\sin n\beta\cos\lambda\zeta,\quad v=f_v(\tau)\cos n\beta\sin\lambda\zeta$$
$$w=f_w(\tau)\sin n\beta\sin\lambda\zeta+gw(\tau)\sin^2\lambda\zeta,\quad \lambda=m\pi/l_1\tag{2.1}$$

где n — число волн по периферии данного сечения, а m характеризует волнообразование вдоль образующей цилиндра. Решение (2.1) удовлетворяет условиям шарнирного опирания оболочки.

Подставляя (2.1) в (1.1) и применяя метод Бубнова — Галеркина, получаем систему дифференциальных уравнений

$$-f_u{}^{\cdot\cdot}+a_uf_u+a_vf_v+a_wf_w+a_gg_w+a_af_wg_w=0$$
$$-f_v{}^{\cdot\cdot}+b_uf_u+b_vf_v+b_wf_w+b_bf_wg_w=0$$
$$f_w{}^{\cdot\cdot}+c_uf_u+c_vf_v+c_wf_w+\lambda^3f_ug_w+c_{2w}f_wg_w+$$
$$+c_{ww}f_wg_w{}^2+c_{vw}f_vg_w+c_{3w}f_w{}^3=0\tag{2.2}$$
$$g_w{}^{\cdot\cdot}+{}^4/_3(p_wg_w+p_{uw}f_uf_w+p_{vw}f_vf_w+$$
$$+p_{ww}f_w{}^2g_w+p_{2w}f_w{}^2+p_{2w}{}^*g_w{}^2+p_{3w}g_w{}^3)=0$$

$$a_u=-\lambda^2-\frac{1-\mu}{2}n^2(\varepsilon_2+k\theta^2\varepsilon_8)-$$
$$-\frac{1-\mu}{16}n\varepsilon^2[\varepsilon_{4s}+2k\theta(6\varepsilon_{7s}+\theta\varepsilon_{10s})]$$

$$a_v=\frac{1+\mu}{2}n\lambda\varepsilon_1,\qquad a_g=\frac{2\gamma_m}{3\pi m}k(1-\mu)\varepsilon^2\theta n\lambda\varepsilon_{7s}{}^*$$

$$a_w=\mu\lambda\theta\varepsilon_7+k\theta\left[\lambda^3\varepsilon_3-\frac{1-\mu}{2}n\lambda(n\varepsilon_5+{}^1/_2\varepsilon^2\varepsilon_{7s})\right]$$

$$a_a = \frac{1}{2}\lambda^3 - \frac{1-\mu}{4} n\lambda \left(\varepsilon^2 + \frac{1}{8}\varepsilon^2\varepsilon_{45} \right)$$

$$b_u = -\frac{1+\mu}{2} n\lambda\eta_1, \qquad b_b = \frac{3\mu-1}{4} n\lambda^2\eta_1$$

$$b_v = \frac{1}{8}\varepsilon^2 n\varepsilon_{4s} - n^2\eta_2 - \frac{9}{8} k\varepsilon^4\theta^2(1+\varepsilon_{12c}) - \frac{1-\mu}{2}(1-k\theta^2\eta_6)\lambda^2$$

$$b_w = n\theta \left[\frac{3-\mu}{2} k\lambda^2\eta_4 + \frac{3}{8} k\varepsilon^2 n\varepsilon_{8s} + \eta_4 + \frac{3}{8} k\varepsilon^4(\eta_{10}+\varepsilon_{10c}) \right] + \frac{3}{8}\varepsilon^2\theta(\varepsilon_{6s}+k\theta^2\varepsilon_{12s})$$

$$c_u = -\mu\lambda\theta\varepsilon_3 + k\theta\lambda \left(2\varepsilon^2 n\varepsilon_{7s} + \frac{1-\mu}{2} n^2\varepsilon_5 - \lambda^2\varepsilon_3 \right)$$

$$c_v = -n\theta\varepsilon_4 - \frac{1}{2} k \left[(3-\mu)\lambda^2\theta n\varepsilon_4 + \frac{9}{8}(1-\mu)\theta\varepsilon^2\lambda^2\varepsilon_{6s} + \frac{3}{4}\varepsilon^2\theta n^2\varepsilon_{8s} + \right.$$

$$+ 3n\varepsilon^2\theta \left(\varepsilon_{8s} + \frac{13}{4}\varepsilon^2\varepsilon_{10} - \frac{13}{16}\varepsilon^2\overset{*}{\varepsilon}_{10c} \right) + 3\theta\varepsilon^2 \left(\varepsilon_{8s} - \frac{1}{64}(153\varepsilon^4+9\varepsilon^2+16\theta^2)\varepsilon_{12s} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{8}(18\varepsilon^2-1)\overset{**}{\varepsilon}_{10s} + \frac{3}{64}\varepsilon^2(1+17\varepsilon^2)\overset{*}{\varepsilon}_{12s} \right) \right]$$

$$c_w = \theta^2\varepsilon_6 + k \left[n^4\varepsilon_4 + \lambda^4 + 2n^2\lambda^2\varepsilon_2 + \frac{3}{4}\varepsilon^2 n^3\varepsilon_{6s} - n^2\frac{8\theta^2+5\varepsilon^4}{4}\varepsilon_8 - \right.$$

$$- \frac{1}{4}\varepsilon_{6c}{}^2 - \frac{5}{16}\varepsilon^4\varepsilon_{8c}{}^* \Big) + \frac{n}{4} \left(2\varepsilon^2\varepsilon_{6s} - \left(7\varepsilon^2\theta^2 + \frac{21}{8}\varepsilon^6 \right)\varepsilon_{10s} + \frac{13}{4}\varepsilon^4\varepsilon_{8s}{}^* + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{7}{8}\varepsilon^6\overset{*}{\varepsilon}_{10s} \right) + \varepsilon_{12} \left(\theta^4 + \frac{27}{4}\varepsilon^4\theta^2 \right) - \frac{3}{2}\varepsilon^2\theta^2\varepsilon_{10c} - \frac{27}{16}\varepsilon^4\theta^2\overset{*}{\varepsilon}_{12c} + \frac{1}{4}\varepsilon^2 n\lambda^2\varepsilon_{4s} \right]$$

$$c_{vw} = -\mu n\lambda^2\varepsilon_1, \quad c_{3w} = -\frac{3}{32}\lambda^4 - \frac{1}{16}\mu n^2\lambda^2\varepsilon_2 - \frac{1-\mu}{32}\lambda^2 n^2\varepsilon_{2a} \tag{2.3}$$

$$c_{ww} = -{}^7/_4\mu\theta\lambda^2\varepsilon_3 - {}^3/_4 n^2\theta\varepsilon_5 - {}^3/_4 k\theta^3 n^2\varepsilon_{11} - 2k\theta\lambda^4\varepsilon_3$$

$$p_w = -\frac{16}{3} k\lambda^4, \qquad p_{uw} = -\frac{1}{2}\lambda \left(\lambda^2 + \mu n^2\varepsilon_2 + \frac{1-\mu}{3} n^2\eta_2 \right)$$

$$p_{vw} = \frac{1}{2} \left(\mu n\lambda^2\varepsilon_1 - n^3\varepsilon_3 + \frac{3}{4} k\varepsilon^2\theta^2 n^2\beta_{11} - \frac{1-\mu}{3}\lambda^2 n\eta_1 \right)$$

$$p_{2w} = \frac{\theta}{2} \left(\mu\lambda^2\varepsilon_3 + \frac{1}{3} k\lambda^2\varepsilon_3 + n^2\varepsilon_5 - \frac{1}{2} k\varepsilon^2 n^3\beta_9 - kn^4\varepsilon_7 + k\theta^2 n^2\varepsilon_{11} + \right.$$

$$\left. + (1-\mu)k\lambda^2 n^2\eta_5 \right), \qquad k = \delta_1{}^2/12, \qquad \gamma_m = 1-(-1)^m$$

$$p_{2w}{}^* = \frac{1}{2}\mu\theta\lambda^2\psi(3,0), \qquad p_{3w} = \frac{1}{6}\lambda^4, \qquad p_{ww} = \frac{1}{2} n^2\lambda^2 \left(\mu\varepsilon_2 - \frac{1-\mu}{3}\eta_2 \right)$$

В коэффициентах (2.3) приняты следующие обозначения:

$$\varepsilon_j = \psi(j,0) - \psi(j,n), \ \eta_j = \psi(j,0) + \psi(j,n), \ \varepsilon_{js} = 2[\psi(j,n_a) - \psi(j,n+1)] \quad (j=1,2,3,\ldots)$$

$$\varepsilon_{pc} = -{}^1/_2[2\psi(p,2) + \psi(p,n+2) + \psi(p,n_c)], \ \varepsilon_{ps}{}^* = 2[\psi(p,n_f) - \psi(p,n+3)] \quad (p=10,12)$$

$$\eta_{10c} = {}^1/_2[2\psi(10,2) - \psi(10,n+2) - \psi(10,n_c)],$$

$$\varepsilon_{qs}{}^* = 2[2\psi(q,1) - \psi(q,n_a) - \psi(q,n+1) \quad (q=6,8)$$

$$\varepsilon_{rc}{}^* = 2[2\psi(r,2) - \psi(r,n_c) - \psi(r,n+2)] \quad (r=8,10,12)$$

$$\varepsilon_{7s} = {}^1/_{12}[1+(-1)^n][\psi(7,{}^1/_2 n_c) - \psi(7,{}^1/_2(n+2))]$$

$$\varepsilon_{10s}^{**}=2[\psi(10,n_c)-\psi(10,n+2)],\qquad n_a=|n-1|,\qquad n_c=|n-2|,\qquad n_f=|n-3|$$

Функции $\psi(j, k)$ являются решениями интегралов вида

$$\psi(j,k)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_i^{-j}\cos^2 k\beta d\beta$$

общее решение которых дано в [6]:

$$\psi(k,0)=1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!}\binom{2r}{r}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2r}\prod_{j=0}^{r-1}\left(\frac{k}{2}-j\right)$$

$$\psi(k,N)=\sum_{r=N}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!}\binom{2r}{r-N}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2r}\prod_{j=0}^{r-1}\left(\frac{k}{2}-j\right)$$

Из первых двух уравнений системы (2.2) для статической задачи будем иметь

$$f_u=\frac{1}{\Delta}(-\varkappa_1 b_v+\varkappa_2 a_v),\qquad f_v=\frac{1}{\Delta}(\varkappa_1 b_u-\varkappa_2 a_u)$$

$$\varkappa_1=a_w f_w+a_g g_w+a_a f_w g_w \tag{2.4}$$

$$\Delta=a_u b_v-a_v b_u,\qquad \varkappa_2=b_w f_w+b_b f_w g_w$$

Здесь и ниже для краткости записи аргумент τ соответствующих функций будем опускать.

Подставляя (2.4) в третье и четвертое уравнение системы (2.2), получаем два нелинейных дифференциальных уравнения второго порядка относительно неизвестных функций f_w и g_w:

$$\begin{gathered}\ddot f_w+s_{11}f_w+s_{12}g_w+s_{13}f_w g_w+s_{14}g_w^2+s_{15}f_w g_w^2+c_3 w f_w^3=0\\ \ddot g_w+s_{21}g_w+s_{22}g_w^2+s_{23}f_w^2+s_{24}f_w g_w+s_{25}f_w^2 g_w+s_{26}g_w^3=0\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$s_{11}=c_w+\frac{1}{\Delta}[c_u(a_v b_w-b_v a_w)+c_v(b_u a_w-a_u b_w)]$$

$$s_{12}=\frac{1}{\Delta}a_g(c_v b_u-c_u b_v),\qquad s_{14}=\frac{1}{\Delta}a_g(c_{vw}b_u-c_{uw}b_v)$$

$$s_{13}=c_{2w}+\frac{1}{\Delta}[c_u(a_v b_b-b_v a_a)+c_v(a_a b_u-a_u b_b)+c_{uw}(a_v b_w-b_v a_w)+c_{uw}(b_u a_u-a_u b_w)]$$

$$s_{15}=c_{ww}+\frac{1}{\Delta}[c_{uw}(a_v b_b-b_v a_a)+c_{vw}(b_u a_a-a_u b_b)]$$

$$s_{21}={}^4/_3 p_w,\qquad s_{22}={}^4/_3 \overset{*}{p}_{2w},\qquad s_{26}={}^4/_3 p_{3w}$$

$$s_{23}=\frac{4}{3}\left\{p_{2w}+\frac{1}{\Delta}[p_{uw}(a_v b_w-b_v a_w)+p_{vw}(b_u a_w-a_u b_w)]\right\}$$

$$s_{24}=\frac{4}{3\Delta}a_g(p_{vw}b_u-p_{uw}b_v)$$

$$s_{25}=\frac{4}{3}\left\{p_{ww}+\frac{1}{\Delta}[p_{uw}(a_v b_b-b_v a_a)+p_{vw}(b_u a_a-a_u b_b)]\right\}$$

Точное решение системы (2.5) получить трудно (это можно сделать с помощью какого-либо численного метода на ЭВМ). Однако приближенное решение задачи может быть найдено, если положить $g_w=0$ [1]. В этом случае из (2.5) следует

$$f_w^{\cdot\cdot}+s_{11}f_w+c_{3w}f_w^3=0 \tag{2.6}$$

Отсюда видно, что s_{11} — квадрат безразмерной собственной частоты колебаний для линейной задачи $s_{11}=\omega_0^{*2}$, которая связана с действительным значением частоты ω_0 зависимостью $\omega_0=(\omega_0^*/c)\,(E/\rho_0(1-\mu^2))^{1/2}$.

Обозначив $c_{3w}=\omega_0^{*2}K$, запишем уравнение (2.6) в виде

$$f_w^{\cdot\cdot}+\omega_0^{*2}(1+Kf_w^2)f_w=0 \tag{2.7}$$

Решением уравнения (2.7) при начальных условиях

$$f_w(0)=A, \qquad f_w^{\cdot}(0)=0 \tag{2.8}$$

является функция [4]:

$$f_w(\tau)=A\,\mathrm{cn}(\varkappa\tau,\ k) \tag{2.9}$$

где $\mathrm{cn}(\varkappa\tau,\ k)$ — эллиптическая функция (косинус) Якоби, а k — модуль той же функции. Период колебаний определяется по формуле

$$T=\frac{4F(k,\,{}^1/_2\pi)}{\omega_0^*\sqrt{1+KA^2}}, \qquad F\left(k,\frac{1}{2}\pi\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\pi\left(1+\frac{1}{4}k^2+\frac{9}{64}k^4+\frac{25}{216}k^6+\ldots\right) \tag{2.10}$$

где $F(k,\,{}^1/_2\pi)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

При $K=0$ из (2.10) находим период линейных собственных колебаний $T_0=2\pi/\omega_0^*$.

Частота нелинейных собственных колебаний ω^* с частотой ω_0^* связана зависимостью

$$\omega^*=\omega_0^*[\pi(1+KA^2)^{1/2}]/[2F(k,\,{}^1/_2\pi)] \tag{2.11}$$

Одно приближенное решение уравнения (2.7) можно получить, если воспользоваться разложением эллиптического косинуса Якоби в ряд Фурье [7]:

$$\mathrm{cn}(\varkappa\tau,k)=\frac{2\pi}{kF(k,\,{}^1/_2\pi)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{q^{r+1/2}}{1+q^{2r+1}}\cos(2r+1)\frac{\pi\varkappa\tau}{2F(k,\,{}^1/_2\pi)}$$

$$q=p(1+2p^4+15p^8+150p^{12}+\ldots),\quad p={}^1/_2\sqrt{k} \tag{2.12}$$

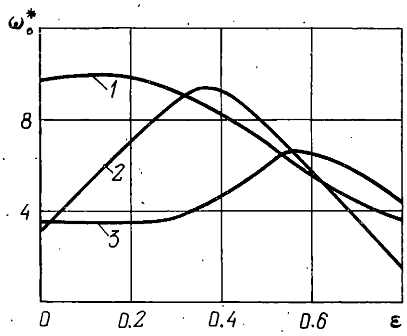
Сохраняя в (2.12) только первый член, будем иметь

$$f_w=\frac{4A}{kF^*}\frac{\sqrt{q}}{(1+q)}\cos\frac{\varkappa\tau}{F^*}, \qquad F^*=\frac{2}{\pi}F\left(k,\frac{1}{2}\pi\right) \tag{2.13}$$

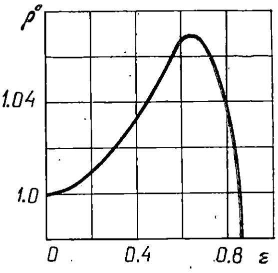
При этом частота колебаний определяется формулой $\omega^*=\varkappa/F$, которая совпадает с (2.11).

3. Численный анализ решения. В качестве примера рассматривалась оболочка со следующими параметрами: $0.001\leqslant\delta_1\leqslant0.01$, $0.8\leqslant l_1\leqslant31.4$, $(m,\ n)=1-20$, $0.0\leqslant A\leqslant0.3$, $0.0\leqslant\varepsilon\leqslant0.96$.

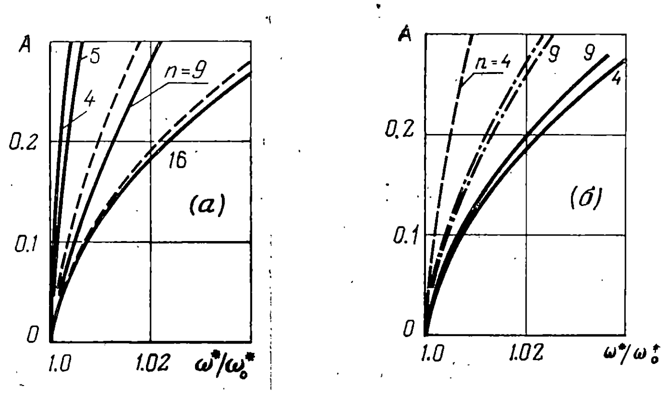
На фиг. 2 показано изменение минимальной линейной частоты от эксцентриситета ε. Кривая *1* соответствует $\omega^*\cdot10^3$ при $\delta_1=0.01$, $l_1=31.4$; кри-



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

вая *2* построена для $\omega^* \cdot 10^3$ при $\delta_1=0.001$, $l_1=31.4$; кривая *3* соответствует $\omega^* \cdot 10^2$ при $\delta_1=0.01$, $l_1=10$. Заметим, что сначала функции нарастают, достигая экстремума при различных ε (в зависимости от δ_1 и l_1), а затем убывают при $\varepsilon \to 1.0$. Подобное изменение ω^*, по-видимому, связано с изменением средней кривизны поперечного сечения (см. фиг. 3) $\rho^\circ=1/R^\circ$, где

$$R^\circ=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_1 d\beta=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!}\binom{2r}{r}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2r}\prod_{j=0}^{r-1}\left(\frac{3}{2}-j\right)\right]$$

На фиг. 4, *а* показаны скелетные кривые при $\delta_1=0.01$ и $l_1=2$, а на фиг. 4, *б* – при $\delta_1=0.01$ и $l_1=10$. Сплошные кривые на фиг. 4, *а* соответствуют $\varepsilon=0$, а пунктирные – $\varepsilon=0.8$. На фиг. 4, *б* сплошные линии соответствуют $\varepsilon=0$, пунктирная – $\varepsilon=0.64$, а штрихпунктирные – $\varepsilon=0.32$.

Сравнение между точным (2.9) и приближенным (2.13) решениями показало, что во всех исследованных случаях точное решение может быть заменено с очень большой точностью приближенным решением.

Поступила 18 IX 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М., «Наука», 1972.
2. *Leissa A. N.* Vibrations of shells. NASA, 1973, No. SP-288.
3. *Brush D. O., Almroth B. O.* Buckling of bars, plates and shells. New York – London, McGraw-Hill, 1975.
4. *Малкина Р. Л.* Колебания некруговых цилиндрических оболочек. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1960, № 1.
5. *Kozarov M.* Beulung und Dynamik orthotroper elliptischzylindrischer Schalen. Докл. Болг. АН., 1963, т. 16, № 4.
6. *Козаров М., Младенов К.* Решение на някои елиптични интеграли. Физико-математическо списание, 1975, № 1.
7. *McLachlan N. W.* Ordinary non-linear differential equations in engineering and physical sciences. Oxford, Clarendon press, 1955.