

ИЗГИБ МНОГОСЛОЙНОГО БАЛОЧНОГО ПАКЕТА

М. В. РАДИОЛЛО

(Одесса)

В [1] получено приближенное решение задачи изгиба балочного пакета, опирающегося на упругое основание и составленного из различных по длине балок переменной жесткости. При этом контакт между выше- и нижележащими балками осуществляется с помощью винклеровских прослоек.

В предлагаемой работе исследуется допускающий точное решение частный случай упомянутой задачи. Предполагается, что упругое основание отсутствует (пакет соответствующим образом закреплен), а балки, составляющие пакет, имеют постоянные жесткости. К такой расчетной схеме сводится, например, задача о постановке судна в док [2] и некоторые другие задачи строительной механики корабля и машиностроения. В частности, винклеровские прослойки являются хорошей моделью герметизирующих прокладок либо тонких слоев смазки.

Другим важным приложением рассмотренной задачи является расчет напряженного состояния листовых рессор. Такая возможность основана на подходе к исследованию контактных задач для тонкостенных элементов, в котором помимо изгиба учитывается также винклеровское обмятие контактирующих элементов [3, 4]. В настоящее время к расчету рессор применяется [5] весьма приближенная схема равнопрочной шарнирно-опертой балки постоянной высоты.

1. Рассмотрим многослойный балочный пакет, составленный из $n+1$ наложенных одна на другую балок постоянной жесткости D_j ($j=0, 1, \dots, n$), между которыми имеются винклеровские прослойки с податливостями k_j ($j=1, 2, \dots, n$). Нижняя ($j=0$) балка пакета шарнирно закреплена в концевых сечениях $x=\alpha_0$, $x=\beta_0$, а каждая из вышележащих балок вместе с расположенной под ней винклеровской прослойкой занимает интервал $l_j=(\alpha_j, \beta_j)$ ($j=1, 2, \dots, n$). Координаты концов балок удовлетворяют условиям

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n < \beta_n \leq \dots \leq \beta_2 \leq \beta_1 \leq \beta_0 \quad (1.1)$$

что не уменьшает общности, так как при наличии консолей последние можно отбросить, заменив их соответствующими сосредоточенными нагрузками. К балкам приложены нагрузки $q_j(x)$ ($x \in l_j$, $j=0, 1, \dots, n$). Искомыми являются контактные напряжения в винклеровских прослойках $p_j(x)$ ($x \in l_j$, $j=1, 2, \dots, n$), через которые выражаются все величины, характеризующие напряженное и деформированное состояние пакета.

Для упрощения решения продолжим все вышележащие ($j=1, 2, \dots, n$) балки до наибольшего интервала l_0 , считая, что связь балок посредством винклеровских слоев по-прежнему имеет место на интервалах l_j ($j=1, 2, \dots, n$). Для того чтобы учесть это обстоятельство, введем функции

$$\varphi_0(x) \equiv 0, \quad \varphi_j(x) = \begin{cases} p_j(x), & x \in l_j \\ 0, & x \in l_0 - l_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (1.2)$$

Это позволяет сформулировать рассматриваемую задачу в виде системы дифференциальных уравнений (ср. [1]):

$$D_j y_j^{IV}(x) = q_j(x) + \varphi_{j+1}(x) - \varphi_j(x) \quad (x \in l_0) \quad (1.3)$$

$$y_j(\alpha_0) = y_j''(\alpha_0) = y_j(\beta_0) = y_j''(\beta_0) = 0, \quad \varphi_{n+1}(x) \equiv 0 \quad (j=0, 1, \dots, n)$$

причем абсолютные перемещения балок

$$w_j(x) = y_j(x) + \Omega_j(x) \quad (j=0, 1, \dots, n) \quad (1.4)$$

$$\Omega_0(x) \equiv 0, \quad \Omega_j(x) = \gamma_j + \delta_j x \quad (x \in l_0) \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (1.5)$$

удовлетворяют условиям совместности деформаций

$$w_j(x) = w_{j-1}(x) + k_j p_j(x) \quad (x \in l_j) \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (1.6)$$

Фигурирующие в (1.5) неизвестные постоянные γ_j, δ_j ($j=1, 2, \dots, n$) определяются из условий равновесия

$$\int_{l_j} x^r p_j(x) dx = \sum_{m=j}^n \int_{l_m} x^r q_m(x) dx \quad (r=0, 1; j=1, 2, \dots, n) \quad (1.7)$$

Решение поставленной задачи основано на предварительном сведении ее к системе интегральных уравнений. С этой целью рассмотрим скалярную краевую задачу

$$D^4[y] = t(x) \quad (x \in l_0), \quad u_\nu[y] = 0 \quad (\nu=1, 2, 3, 4) \\ D^m \equiv d^m/dx^m, \quad u_\nu[y] = u_{\nu\alpha}[y] + u_{\nu\beta}[y]$$

$$(u_{\nu\alpha}[y], u_{\nu\beta}[y]) = \sum_{h=1}^n (a_{\nu h} D^{h-1}[y]|_{x=\alpha_0}, b_{\nu h} D^{h-1}[y]|_{x=\beta_0})$$

где коэффициенты $a_{\nu h}, b_{\nu h}$, образующие матрицы $\mathbf{a} = \{a_{\nu h}\}$, $\mathbf{b} = \{b_{\nu h}\}$, равны

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (1.8)$$

Функция Грина $g(x, \xi)$ введенной краевой задачи, являющаяся функцией влияния шарнирно-опертой балки, известна [6]. Это позволяет включить в уравнениях (1.3), (1.4) относительные прогибы $y_j(x)$. Последующая реализация условий (1.6) приводит к системе n интегральных уравнений Фредгольма второго рода, заданных на вложенных отрезках

$$p_j(x) + \int_{l_0} g(x, \xi) [\mu_{j,j-1} \varphi_{j-1}(\xi) + \mu_{j,j} \varphi_j(\xi) + \mu_{j,j+1} \varphi_{j+1}(\xi)] d\xi = s_j(x) \quad (1.9)$$

$$(x \in l_j, \mu_{1,0} = \mu_{n,n+1} = 0) \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

$$\mu_{j,j-1} = \frac{-1}{k_j D_{j-1}}, \quad \mu_{j,j} = \frac{1}{k_j} \left(\frac{1}{D_{j-1}} + \frac{1}{D_j} \right), \quad \mu_{j,j+1} = \frac{-1}{k_j D_j} \quad (1.10)$$

$$s_j(x) = \frac{1}{k_j} \left\{ \int_{l_0} g(x, \xi) \left[\frac{q_j(\xi)}{D_j} - \frac{q_{j-1}(\xi)}{D_{j-1}} \right] d\xi + \Omega_j(x) - \Omega_{j-1}(x) \right\}$$

Учитывая (1.2) и полагая $(\psi_j(x) - \text{новые неизвестные функции})$

$$f_j(x) = \begin{cases} s_j(x), & x \in l_j \\ \psi_j(x), & x \in l_1 - l_j \end{cases} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (1.11)$$

систему (1.9) запишем на интервале l_1 — наибольшем из интервалов определения уравнений системы

$$\varphi_j(x) + \int_{l_1} g(x, \xi) [\mu_{j,j-1}\varphi_{j-1}(\xi) + \mu_{j,j}\varphi_j(\xi) + \mu_{j,j+1}\varphi_{j+1}(\xi)] d\xi = f_j(x) \quad (x \in l_1) \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (1.12)$$

Полученную систему представим в виде одного матричного интегрального уравнения. С этой целью введем матрицу $M = \{\mu_{rs}\}$ ($r, s=1, 2, \dots, n$), у которой элементы, принадлежащие главной и ближайшим побочным диагоналям, определяются формулами (1.10), а прочие элементы равны нулю: $\mu_{rs} = 0$, ($|r-s| > 1$).

Введя также искомый и заданный вектор-столбцы $\Phi(x) = \{\varphi_j(x)\}$, $F(x) = \{f_j(x)\}$ ($j=1, 2, \dots, n$), упомянутое матричное уравнение запишем в виде

$$\Phi(x) + \int_{l_1} G(x, \xi) M \Phi(\xi) d\xi = F(x) \quad (x \in l_1) \quad (1.13)$$

где $G(x, \xi)$ — матрица Грина матричной краевой задачи

$$N^{(0)}[Y] = T(x) \quad (x \in l_0), \quad U_v^{(0)}[Y] = 0 \quad (v=1, 2, 3, 4) \quad (1.14)$$

$$N^{(0)}[Y] = ED^4[Y], \quad U_v^{(0)}[Y] = U_{v\alpha}^{(0)}[Y] + U_{v\beta}^{(0)}[Y]$$

$$(U_{v\alpha}^{(0)}[Y] \ U_{v\beta}^{(0)}[Y]) = \sum_{k=1}^4 (A_{vk} D^{k-1}[Y]|_{x=\alpha_0}, B_{vk}^{ij} D^{k-1}[Y]|_{x=\beta_0})$$

Здесь $Y(x)$, $T(x)$ — искомый и заданный вектор-столбцы; E — единичная матрица; A_{vk}^{ij} , B_{vk}^{ij} — компоненты квадратных (4×4) матриц A^{ij} , B^{ij} , являющихся балками блочных матриц $A = \{A^{ij}\}$, $B = \{B^{ij}\}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$).

Нетрудно установить, что уравнение (1.13) будет эквивалентно системе (1.12), если

$$A^{ij} = B^{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad A^{ii} = a, \quad B^{ii} = b$$

При этом компоненты матрицы Грина $G(x, \xi)$ весьма просто выражаются через функцию Грина $g(x, \xi)$:

$$G_{ij}(x, \xi) = 0 \quad (i \neq j), \quad G_{ii}(x, \xi) = g(x, \xi) \quad (1.15)$$

Решение интегрального уравнения (1.13) запишем, воспользовавшись матричным аналогом теоремы 3.2 из [7]:

$$\Phi(x) = F(x) - \int_{l_1} \Gamma(x, \xi) M F(\xi) d\xi \quad (x \in l_1) \quad (1.16)$$

где $\Gamma(x, \xi) = \{\Gamma_{jk}(x, \xi)\}$ ($j, k=1, 2, \dots, n$) — матрица Грина краевой задачи

$$N^{(1)}[Y] = N^{(0)}[Y] + M Y(x) = T(x) \quad (x \in l_1), \quad U_v^{(1)}[Y] = 0 \quad (v=1, 2, 3, 4) \quad (1.17)$$

Полученное решение можно представить в виде системы равенств

$$\varphi_j(x) = f_j(x) - \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \mu_{kr} \int_{l_1} \Gamma_{jk}(x, \xi) f_r(\xi) d\xi \quad (x \in l_1) \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

Разделяя в каждом из этих равенств интервал интегрирования и интервал определения на два: $l_1 = l_m + (l_1 - l_m)$, $m=2, 3, \dots, n$ и используя обозначения (1.2), (1.11), приходим к двум системам

$$p_j(x) = s_j(x) - \sum_{k=1}^n \left[\sum_{r=1}^n \mu_{kr} \int_{l_r} \Gamma_{jk}(x, \xi) s_r(\xi) d\xi + \sum_{r=2}^n \mu_{kr} \int_{l_1 - l_r} \Gamma_{jk}(x, \xi) \psi_r(\xi) d\xi \right] \quad (x \in l_j) \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (1.18)$$

$$\psi_j(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{r=2}^n \mu_{kr} \int_{l_1 - l_r} \Gamma_{jk}(x, \xi) \psi_r(\xi) d\xi = h_j(x) \quad (1.19)$$

$$x \in l_1 - l_j, \quad h_j(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \mu_{kr} \int_{l_r} \Gamma_{jk}(x, \xi) s_r(\xi) d\xi \quad (j=2, 3, \dots, n)$$

Здесь учтено вытекающее из (1.11) свойство $\psi_1(x) \equiv 0$.

Равенства (1.18) служат для определения искомых контактных напряжений, если считать функции $\psi_j(x)$ ($j=2, 3, \dots, n$) известными, а равенства (1.19) являются системой интегральных уравнений относительно этих новых неизвестных. Следует подчеркнуть, что порядок этой системы на единицу меньше порядка исходной системы (1.9). Однако уравнения в (1.19) заданы на внешностях интервалов l_j .

Для перехода к системе, заданной внутри интервалов l_j , следует вновь воспользоваться изложенным выше приемом. Доопределив должным образом фигурирующие в (1.19) функции на интервалах l_j и обращая соответствующее матричное интегральное уравнение с помощью упоминавшейся теоремы 3.2 [7], приходим к двум системам равенств. Одна из них связывает старые и вновь введенные неизвестные, а вторая является системой интегральных уравнений, которая может быть записана в виде одного матричного. Таким образом приходим к необходимости решать уравнение, совпадающее по структуре с исходным уравнением (1.13), но содержащее на одну неизвестную функцию меньше.

Последовательное выполнение описанного приема снижения порядка системы интегральных уравнений приводит на последнем шаге к одному скалярному интегральному уравнению, замкнутое решение которого можно выписать без введения новых неизвестных функций. Поэтапный возврат к первоначальному неизвестным и последующая реализация условий равновесия (1.7) завершает решение задачи.

2. Изложенный способ, позволяющий в принципе построить точное решение задачи для любого n , при практической реализации наталкивается на немалые трудности, связанные в основном с построением резольвентных матриц Грина. Задача несколько упрощается, если длины каких-либо двух находящихся в контакте балок равны, так как в этом случае на соответствующем этапе вектор неизвестных функций последующего шага будет содержать на две компоненты меньше, нежели на предыдущем шаге. Очевидно, что наиболее простым является случай одинаковой длины всех балок пакета

$$\alpha_j \equiv \alpha, \quad \beta_j \equiv \beta \quad (j=0, 1, \dots, n) \quad (2.1)$$

так как при этом формула (1.16) дает решение задачи уже на первом шаге.

Сравнительная простота решения в упомянутом частном случае подсказывает еще один путь решения первоначально поставленной задачи. Он заключается в расчленении балочного пакета сечениями, проведенными через точки (1.1) на ряд примыкающих пакетов, в каждом из которых балки имеют одинаковую длину. При этом взаимное воздействие соседних частей каждой из балок в местах рассеяния заменяется действием равных и противоположно направленных неизвестных сосредоточенных сил и моментов. На этом пути ключевым вопросом является решение задачи изгиба балочного пакета, составленного из балок одинаковой длины, нагруженных (помимо заданных нагрузок) приложенными по торцам сосредоточенными усилиями. В некоторых случаях такой подход¹ может оказаться предпочтительнее.

3. Предложенная выше алгебраизация проблемы, исключая необходимость построения матриц Грина рекуррентной последовательности краевых задач, сопряжена, тем не менее, с построением матриц Грина краевых задач (1.17) при различных n (для различных участков пакета).

С целью дальнейшего упрощения вычислительного алгоритма ниже к системе интегральных уравнений (1.9) в случае (2.1) применяется иной (без привлечения формулы (1.16)) способ решения, представляющий некоторый самостоятельный интерес. Он состоит в переходе от системы взаимосвязанных интегральных уравнений

$$p_j(x) + \int_{\alpha}^{\beta} g(x, \xi) \left[\sum_{m=1}^n \mu_{jm} p_m(\xi) \right] d\xi = s_j(x) \quad (\alpha \leq x \leq \beta) \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (3.1)$$

к системе n независимых уравнений относительно линейных комбинаций искомых функций.

С этой целью домножим уравнения (3.1) на некоторые постоянные c_{j*} ($j=1, 2, \dots, n$; звездочкой обозначен вакантный индекс) и результаты сложим. Введем обозначения

$$\chi_*(x) = \sum_{j=1}^n c_{j*} p_j(x), \quad f_*(x) = \sum_{j=1}^n c_{j*} s_j(x) \quad (3.2)$$

и полагая справедливыми равенства

$$\sum_{j=1}^n c_{j*} \mu_{jm} = v_* c_{m*} \quad (m=1, 2, \dots, n) \quad (3.3)$$

приходим к интегральному уравнению

$$\chi_*(x) + v_* \int_{\alpha}^{\beta} g(x, \xi) \chi_*(\xi) d\xi = f_*(x) \quad (\alpha \leq x \leq \beta) \quad (3.4)$$

Из (3.3) вытекает, что неизвестные постоянные c_{j*} (которые можно рассматривать как компоненты некоторого вектора e^*) являются решениями линейной однородной системы (δ_{jm} — символ Кронекера):

$$\sum_{j=1}^n (\mu_{jm} - v_* \delta_{jm}) c_{j*} = 0 \quad (m=1, 2, \dots, n) \quad (3.5)$$

¹ Нетрудно видеть, что предлагаемая схема реализует известную идею метода сил применительно к задачам изгиба балочных пакетов.

Приравняв определитель этой системы нулю, получим характеристическое уравнение, корнями которого являются характеристические числа $\nu_* = \nu_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) матрицы M . Из формул (1.10) нетрудно усмотреть, что M — нормальная якобиевая матрица. Следовательно ([8], стр. 85) характеристические числа ν_k вещественны и просты, а соответствующие им собственные векторы $e^k = (c_{1k}, c_{2k}, \dots, c_{nk})$ — линейно независимы.

Если ввести (фундаментальную) матрицу $C = \{e^k\}$ ($k=1, 2, \dots, n$), то из линейной независимости векторов e^k вытекает, что матрица C неособенная и, следовательно, имеет обратную $C^{-1} = \{c_{rs}^{-1}\}$ ($r, s=1, 2, \dots, n$). Отметим также, что так как собственные векторы определяются с точностью до скалярного множителя, их можно произвольным образом нормировать, полагая, например, $c_{jj} = 1$ ($j=1, 2, \dots, n$) и определяя c_{jk} ($j \neq k$) из систем (3.3) при $\nu_* = \nu_k$ ($k=1, 2, \dots, n$).

Таким образом, используя компоненты векторов e^k , описанную процедуру перехода от системы (3.1) к уравнению (3.4) можно проделать n раз, получив в результате n независимых интегральных уравнений

$$\chi_k(x) + \nu_k \int_{\alpha}^{\beta} g(x, \xi) \chi_k(\xi) d\xi = f_k(x) \quad (\alpha \leq x \leq \beta) \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (3.6)$$

Функции $\chi_k(x)$, $f_k(x)$ выражаются через $p_j(x)$ и $s_j(x)$ формулами (3.2) с заменой символа (*) индексом k , причем

$$p_j(x) = \sum_{m=1}^n c_{mj} \circ \chi_m(x) \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (3.7)$$

Наличие собственных функций и собственных чисел ядра $g(x, \xi)$:

$$g(x, \xi) = l^4 \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^{-4} \varphi_h(x) \varphi_h(\xi) \quad (\alpha \leq x, \xi \leq \beta)$$

$$\varphi_h(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \left(h\pi \frac{x-\alpha}{l} \right), \quad \lambda_h = (h\pi)^4, \quad l = \beta - \alpha$$

позволяет, в силу теоремы Гильберта — Шмидта [9], записать явные решения уравнений (3.6):

$$\chi_m(x) = f_m(x) - \kappa_m \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\rho_{mh}}{\lambda_h + \kappa_m} \varphi_h(x) \quad (3.8)$$

$$\kappa_m = l^4 \nu_m, \quad \rho_{mh} = (f_m, \varphi_h) = \int_{\alpha}^{\beta} f_m(x) \varphi_h(x) dx$$

Подставив (3.8) в (3.7), найдем решение исходной системы (3.1):

$$p_j(x) = s_j(x) - \sum_{h=1}^n \sum_{m=1}^n c_{hm} c_{mj} \circ \kappa_m \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(s_h, \varphi_h)}{\lambda_h + \kappa_m} \varphi_h(x) \quad (3.9)$$

Для отыскания содержащихся в $s_j(x)$ неизвестных величин сосредоточенных концевых усилий следует сформулировать систему алгебраических уравнений, причем указанные выше условия стыковки можно заменить более простыми условиями непрерывности контактных напряжений

и их первых производных, используя для этого непосредственно выражения (3.9). Заметим также, что фигурирующие в коэффициентах упомянутой системы бесконечные ряды вычисляются в явной форме. Соответствующие формулы суммирования получены методом А. Вилона [10] и имеют вид

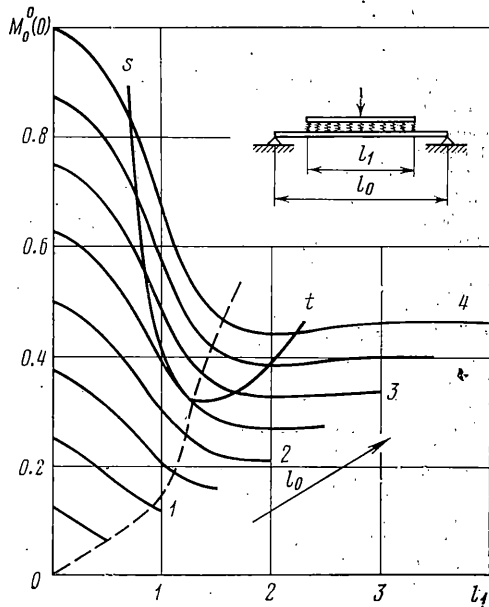
$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\cos^2(h\pi/2)}{h^4 + \theta} h^{2r} = \frac{\pi^2}{8\mu} \left(\frac{\pi^2}{2\mu^2} \right)^{1-r} \left\{ \frac{[\operatorname{sh} \mu + (-1)^r \sin \mu] (\operatorname{ch} \mu + \cos \mu)}{\operatorname{sh}^2 \mu + \sin^2 \mu} - \delta_{0r} \frac{2}{\mu} \right\}$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\sin^2(h\pi/2)}{h^4 + \theta} h^{2r} = \frac{\pi^2}{8\mu} \left(\frac{\pi^2}{2\mu^2} \right)^{1-r} \frac{[\operatorname{sh} \mu - (-1)^r \sin \mu] (\operatorname{ch} \mu - \cos \mu)}{\operatorname{sh}^2 \mu + \sin^2 \mu}$$

Здесь $r=0, 1$, $\mu=\pi(\theta/4)^{1/4}$; δ_{0r} — символ Кронекера.

Аналогичным путем может быть решена задача, в которой заданы нагрузки в некоторых дискретно расположенных сечениях пакета. В этом случае алгебраическую систему следует дополнить соответствующими уравнениями, отражающими факт сближения балок в заданных сечениях. Задачи такого типа возникают, например, при расчете на прочность и герметичность уплотнительных прокладок судовых дверей и люков. При этом упомянутые дополнительные уравнения служат для определения неизвестных усилий в задраивающих устройствах.

4. Приведем результаты численной реализации на ЭВМ М-220М задачи изгиба пакета (рессоры), составленного из двух балок одинаковой жесткости $D_0=D_1=5 \cdot 10^4$ Нм². Нижняя балка длины l_0 ($-l_0/2 \leq x \leq l_0/2$) шарнирно оперта, верхняя — занимает интервал l_1 ($-l_1/2 \leq x \leq l_1/2$) и опирается на винклеровскую пружинку с податливостью $k_1=10^{-7}$ м²/Н. Пакет загружен центральной силой $P=1$, приложенной к верхней балке.



На фигуре приведены графики безразмерного изгибающего момента $M_0^0(0)=M_0(0)/P$ в среднем сечении нижней балки в зависимости от длины верхней балки l_1 (м) ($0 \leq l_1 \leq l_0$). Различные кривые соответствуют разным значениям l_0 . Безразмерный изгибающий момент в среднем сечении верхней балки определяется формулой $M_1^0(0)=l_0/4 - M_0^0(0)$.

Из графиков следует, что при возрастании l_1 (при $l_1=0$ пакет вырождается в обыкновенную шарнирно-опертую балку), изгибающий момент $M_0^0(0)$ уменьшается, а $M_1^0(0)$ соответственно увеличивается, что отражает возрастание подкрепляющей роли верхней балки.

Однако при дальнейшем возрастании l_1 эффект подкрепления снижается и при $l_1=2.0$ м все кривые, соответствующие $l_0 > 2.0$ м, достигают своего минимума. Дальнейшее увеличение l_1 ($2.0 < l_1 \leq l_0$) приводит к обратному эффекту — изгибающий момент в среднем сечении нижней балки возрастает.

Проведенные вычисления также показали, что изгибающий момент в верхней балке $M_1^0(x)$ ($-l_1/2 \leq x \leq l_1/2$) имеет максимум в сечении $x=0$ (под силой) при любых сочетаниях длин балок $0 < l_1 \leq l_0$. Этим же свойством обладает $M_0^0(x)$, однако лишь

l_1	$l_2=0.0$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.0	0.250	0.0				
0.2	—	0.025				
	0.025	0.000				
0.4	—	0.025	0.050			
	0.052	0.026	0.003			
0.6	0.198	0.199	0.197			
	—	0.025	0.050	0.073		
0.8	0.083	0.050	0.031	0.042		
	0.167	0.175	0.169	0.165		
1.0	—	0.025	0.050	0.075	0.094	
	0.113	0.076	0.055	0.041	0.027	
1.0	0.137	0.149	0.144	0.134	0.129	
	—	0.025	0.051	0.076	0.098	0.117
1.0	0.137	0.106	0.078	0.063	0.051	0.041
	0.113	0.119	0.121	0.111	0.101	0.097

при условии $l_0 < L$ (L — некоторая фиксированная длина, зависящая от жесткостных характеристик балок и прослойки; в рассматриваемом примере $L=2.5$ м).

Если $l_0 > L$, то существует некоторый диапазон значений $s < l_1 < t$, при котором максимальное значение изгибающего момента в нижней балке достигается не в среднем сечении, а в сечениях $x = \pm l_1/2$ (под концами верхней балки). Соответствующая область значений ($l_0 > L$, $s < l_1 < t$) отделена на рисунке параболической кривой st . Абсциссы точек пересечения ветвей этой кривой с линией, соответствующей заданному l_0 , определяют значения s и t . Например, для $l_0=4.0$ м находим $s=0.7$ м, $t=2.2$ м. Следовательно, при $0.7 < l_1 < 2.2$ $\max M_0^0(x) = M_0^0(\pm l_1/2)$. Соответствующее значение изгибающего момента легко подсчитать по формуле $M_0^0(\pm l_1/2) = (l_0 - l_1)/4$.

Наконец немаловажным представляется вопрос проектирования пакета, оптимального с точки зрения прочности. Задача состоит в отыскании (при заданном l_0) такой длины $l_1 = l_1^*$ верхней балки, при которой выполняется условие $\max M_0^0(x) = \max M_1^0(x) = M^*$. Величины l_1^* и M^* определяются из графика как абсцисса и соответственно ордината точки пересечения пунктирной кривой с линией графика, соответствующей заданному l_0 .

Отметим, что отношение l_1^*/l_0 не является постоянной величиной, как можно было предположить.

Приведем результаты расчета трехслойной рессоры при исходных данных: $D_0 = D_1 = D_2 = 5 \cdot 10^4$ Нм², $k_1 = k_2 = 10^{-7}$ м²/Н, $l_0 = 1$ м. В таблице даны величины изгибающих моментов $M_j(0)$ ($j=0, 1, 2$) для различных значений $0 \leq l_2 \leq l_1 \leq l_0$. Анализ результатов показывает, что напряженное состояние в этом случае имеет качественные отличия от рассмотренного выше случая изгиба двухслойной рессоры. В частности, равнонапряженное состояние не достигается ни при каких сочетаниях длин балок. Отметим также, что в пакете, составленном из балок одинаковой длины, наиболее напряженными являются верхняя и нижняя балки. Это по-видимому, имеет место и для n -слойных ($n > 2$) пакетов, так как балки, расположенные в их средней (по высоте) части, при принятой схеме загрузки будут наименее деформированы.

Автор признателен Г. Я. Попову за обсуждение работы.

Поступила 25 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Радиолюлло М. В. Изгиб составной балки на упругом основании общего типа. Прикл. механ., 1975, т. 11, вып. 2.
2. Суслов В. П., Кочанов Ю. П., Спихтаренко В. Н. Строительная механика корабля и основы теории упругости. Л., «Сидостроение», 1972.
3. Григолюк Э. Й., Толкачев В. М. Цилиндрический изгиб пластины жесткими штампами. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.

4. Попов Г. Я. О контактных задачах для оболочек и пластин. Тр. X Всес. конф. по теории оболочек и пластин, т. 1. Тбилиси, «Мецниереба», 1975.
 5. Писаренко Г. С., Азарев В. А., Квитка А. Л. и др. Сопротивление материалов. Киев, «Техніка», 1967.
 6. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М., «Наука», 1968.
 7. Попов Г. Я. Об интегральных уравнениях контактных задач для тонкостенных элементов. ПММ, 1976, т. 40, вып. 4.
 8. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
 9. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
 10. Грантер К. Интегральные преобразования в математической физике. М., Гостехиздат, 1956.
-