МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1979

УДК 539.389.3

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЕ СТАРЕЮЩЕГО НАСЛЕДСТВЕННОГО ТЕЛА

А. А. ЗЕВИН

(Ленинград)

Рассматривается задача определения оптимальной формы стареющего наследственного тела из условия минимума некоторого критерия при ограничениях на напряжения и (или) перемещения. Показано, что в случаях простого нагружения оптимальная форма может быть найдена в результате решения задачи для упругого тела с некоторыми, вообще говоря, другими ограничениями, зависящими от реологических свойств материала.

При смешанных граничных условиях и постоянных во времени внешних воздействиях задача приводится к оптимизации упругого тела, подверженного воздействию двух групп нагрузок.

Рассмотрена задача определения оптимальных параметров систем из армированных элементов. Показано, что при симметричном армировании оптимальные параметры могут быть найдены из решения соответствующей задачи для упругой системы с преобразованными ограничениями.

Изменяющиеся во времени внешние воздействия во всех случаях полагаются приложенными квазистатически, т. е. силы инерции не учитываются.

1. Рассмотрим задачу определения оптимальной формы тела, свойства которого описываются уравнениями наследственной теории ползучести стареющих сред [1]:

$$\varepsilon_{ij}(x,t)-\vartheta_{ij}(x,t)=(1+\nu)\mathbf{L}\left(\frac{\sigma_{ij}(x,t)}{E(t)}\right)-\nu\delta_{ij}\mathbf{L}\left(\frac{\sigma_{kk}(x,t)}{E(t)}\right)$$

$$\mathbf{L}y(t)=(I+K^*)y(t)=y(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)y(\tau)\,d\tau$$

$$K(t,\tau)=-E(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}+C(t,\tau)\right] \tag{1.1}$$

Здесь $x=(x_1, x_2, x_3)$ — точка тела, σ_{ij} и ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и деформаций, ϑ_{ij} — вынужденная деформация, $E(t)=E_0\mu(t)$ — мгновенный модуль упругости, $C(t, \tau)$ — мера ползучести, δ_{ij} — символ Кронекера, ν — постоянный коэффициент Пуассона.

Пусть поверхность S, ограничивающая тело, может варьироваться в определенных пределах

$$S\in M \tag{1.2}$$

где M — множество всевозможных поверхностей, допустимых ограничениями геометрического характера. Вместе с S могут изменяться ее части S_σ и S_u, на которых заданы напряжения $p_i(x, t)$ и перемещения $v_i(x, t)$. Объемные силы $F_i(x, t)$ и вынужденные деформации $\vartheta_{ij}(x, t)$ также могут зависеть от размеров и формы тела.

Задача состоит в отыскании оптимальной поверхности S^* из условия минимума некоторого функционала

$$\min V(S) = V(S^*) \tag{1.3}$$

Для определенности будем полагать здесь, что минимизируется объем или стоимость тела.

Помимо (1.2) заданы ограничения на напряжения и (или) перемещения типа

$$\max_t \varkappa_k[\sigma_{11}(x,t), \sigma_{12}(x,t), \ldots, \sigma_{33}(x,t)] < a_k, \quad x \in \Omega \quad (k=1,\ldots,p) \tag{1.4}$$

$$\max_t u_i(x,t) l_{im} < b_m, \quad x \in S, \quad t \in [t_0, t_1] \quad (m=1,\ldots,l) \tag{1.5}$$

Здесь a_k и b_m — заданные константы, l_{im} — косинусы направления m; $\varkappa_k$ — однородные функции компонент напряжений, определяющие условия прочности; $[t_0, t_1]$ — рассматриваемый интервал времени; Ω — область, занимаемая телом.

В п. 2—4 устанавливается, что в случае простого нагружения задача (1.2) — (1.5) приводится к задаче отыскания оптимальной формы упругого тела, подчиняющегося закону

$$\varepsilon_{ij}^\circ(x) - \vartheta_{ij}^\circ(x) = (1+\nu)\frac{\sigma_{ij}^\circ(x)}{E_0} - \nu\delta_{ij}\frac{\sigma_{kk}^\circ(x)}{E_0} \tag{1.6}$$

2. Рассмотрим два типа граничных задач, решение которых с учетом ползучести и старения материала может быть представлено в виде

$$\sigma_{ij}(x,t) = \sigma_{ij}^\circ(x)\xi(t), \quad \varepsilon_{ij}(x,t) = \varepsilon_{ij}^\circ(x)\zeta(t), \quad u_i(x,t) = u_i^\circ(x)\zeta(t) \tag{2.1}$$

где σ_{ij}°, ε_{ij}°, u_i° — решение некоторой задачи для упругого тела.

Из теорем, установленных в [1, 2] с учетом обобщений [3], следует, что решение имеет вид (2.1) в следующих случаях.

2.1. Поверхностные и объемные силы, действующие на тело, изменяются во всех точках пропорционально функции $f(t)$, часть поверхности S_u жестко закреплена, вынужденные деформации отсутствуют

$$p_i(x,t) = p_i(x)f(t) \quad \text{на } S_\sigma, \quad F_i(x,t) = F_i(x)f(t)$$
$$u_i(x,t) = 0 \quad \text{на } S_u, \quad \vartheta_{ij}(x,t) = 0 \tag{2.2}$$

В рассматриваемом случае

$$\xi(t) = f(t), \quad \zeta(t) = \mathbf{L}\left(\frac{f(t)}{\mu(t)}\right) \tag{2.3}$$

а функции σ_{ij}°, ε_{ij}°, u_i° определяются из решения задачи для упругого тела, подверженного воздействиям $p_i^\circ(x) = p_i(x)$ на S_σ, $F_i^\circ(x) = F_i(x)$ при условии равенства нулю заданных деформаций $\vartheta_{ij}^\circ(x)$ и перемещений $v_i^\circ(x)$ на S_u. Указанную задачу для упругого тела будем называть *задачей 2.1°*.

2.2. Поверхностные на S_σ и объемные силы отсутствуют, перемещения на S_u и распределенные по объему вынужденные деформации изменяются во времени пропорционально $f(t)$:

$$p_i(x,t) = 0 \quad \text{на } S_\sigma, \quad F_i(x,t) = 0 \tag{2.4}$$
$$u_i(x,t) = v_i(x)f(t) \quad \text{на } S_u, \quad \vartheta_{ij}(x,t) = \vartheta_{ij}(x)f(t)$$

В этом случае

$$\xi(t) = \mu(t)\mathbf{L}^{-1}f(t), \quad \zeta(t) = f(t) \tag{2.5}$$

где $\mathrm{L}^{-1}=I-R^*(-1)$ — оператор, обратный L; $R^*(-1)$ — резольвента K^* с параметром (-1).

Функции σ_{ij}°, ε_{ij}° и u_i° определяются из решения задачи для упругого тела, на которое действуют заданные деформации $\vartheta_{ij}^\circ(x)=\vartheta_{ij}(x)$, перемещения $v_i^\circ(x)=v_j(x)$ на S_u, а поверхностные и объемные силы $p_i^\circ(x)$, $F_i^\circ(x)$ равны нулю. Назовем задачу для упругого тела при указанных воздействиях *задачей 2.2°*.

Будем полагать, что функция $f(t)$ неотрицательна и $\mathrm{L}^{-1}f(t)\geqslant 0$ для $t\in[t_0, t_1]$. Из положительности оператора L следует, что $\mathrm{L}(f(t)/\mu(t))\geqslant 0$. Таким образом, функции $\xi(t)$ и $\zeta(t)$ неотрицательны.

Полагаем также, что при варьировании поверхности S тип внешних воздействий, определяющих напряженно-деформированное состояние тела, не изменяется, т. е. при любой допустимой поверхности S тело подвержено воздействиям типа *2.1* или типа *2.2*.

Теорема 1. Оптимальная форма стареющего наследственного тела (1.1) в условиях задачи *2.1*, *2.2* совпадает с оптимальной формой упругого тела, подверженного воздействиям типа *2.1°*, *2.2°*, на напряжения и перемещения которого наложены ограничения

$$\begin{aligned} &\varkappa_k(\sigma_{11}^\circ(x), \sigma_{12}^\circ(x), \ldots, \sigma_{33}^\circ(x))<a_k/\xi_*^{\lambda_k}, \quad x\in\Omega \quad (k=1,\ldots,p)\\ &u_i^\circ(x)l_{im}<b_m/\zeta_*, \quad x\in S \quad (m=1,\ldots,l) \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Здесь $\xi_*=\max\xi(t)$, $\zeta_*=\max\zeta(t)$, λ_k — степень однородности функции $\varkappa_k$. Предполагается, что в условиях задачи *2.1* функции $\xi(t)$ и $\zeta(t)$ имеют вид (2.3), в условиях задачи *2.2* определяются выражениями (2.5).

Доказательство. Пусть для упругого тела оптимальная поверхность $S=S^*$, т. е. $\min V(S)=V(S^*)$, напряжения и перемещения удовлетворяют ограничениям (2.6) и $S\in M$.

Для напряжений и перемещений вида (2.1) ограничения (1.4), (1.5) приводятся к виду (2.6). Так как последние удовлетворяются, поверхность S^* является допустимой для стареющего наследственного тела. Докажем ее оптимальность.

Предположим, что для стареющего наследственного тела оптимальная поверхность $S'\neq S^*$ и $V(S')<V(S^*)$. Так как функции $\sigma_{ij}(x, S', t)=\sigma_{ij}^\circ(x, S')\xi(t)$ и $u_i(x, S', t)=u_i^\circ(x, S')\zeta(t)$ удовлетворяют условиям (1.4), (1.5), то функции $\sigma_{ij}^\circ(x, S')$ и $u_i^\circ(x, S')$ удовлетворяют ограничениям (2.6). Таким образом, поверхность S' является допустимой по условиям упругой задачи и предположение $V(S')<V(S^*)$ приводит к противоречию.

Доказанная теорема приводит задачу определения оптимальной формы стареющего наследственного тела к более простой задаче оптимизации формы упругого тела. Так как при воздействиях типа *2.1* функция $\xi(t)$, а при воздействиях типа *2.2* функция $\zeta(t)$ не зависят от реологических свойств материала, то из теоремы 1 следует: реологические свойства материала не оказывают влияния на оптимальную форму тела, если при воздействиях типа *2.1* ограничения наложены только на напряжения, а при воздействиях *2.2* – только на перемещения.

3. Аналогичные результаты можно получить, если оптимальная форма стареющего наследственного тела при воздействиях *2.1* или *2.2* разыскивается из условия минимума максимальных напряжений или однородной функции компонент напряжений, или максимального перемещения по заданному направлению. Во всех случаях функция времени выделяется в виде множителя в минимизируемом функционале и оптимальная поверхность S^* может быть найдена из решения задачи для упругого тела, возможно, с преобразованными ограничениями.

Приведем некоторые примеры.

1. Задача об оптимальной толщине упругого вращающегося диска радиуса r_1 с отверстием r_2 решена в [4]. Граничные условия: $\sigma_r^\circ(r_1)=\sigma_r^\circ(r_2)=0$. Толщина диска $h(r)$ полагается ограниченной двумя гипер-

болическими профилями H/r^{m_1} и H/r^{m_2} (m_1 и $m_2>m_1$ — заданные константы). Оптимальная толщина $h^*(r)=H/r^{m_2}$ найдена из условия минимума напряжений $\sigma_\vartheta^\circ(r_2)$.

Полученный результат остается справедливым для диска из стареющего наследственного материала, так как напряжения в нем совпадают с напряжениями в упругом диске.

Аналогично полученное в [5] решение задачи о форме упругой балки минимального веса при ограничениях на напряжения

$$(\sigma_x^\circ)^2+\alpha(\tau_{xy}^\circ)^2\leqslant k \qquad (\alpha=3,\ 4)$$

без всяких изменений применимо к задаче о балке из стареющего наследственного материала.

2. Задача об оптимальной толщине пластинки, занимающей в плоскости $z=0$ область Ω, жестко защемленной на контуре Γ_2 и свободно опертой на Γ_1, рассмотрена в [6]. Пластинка нагружена сосредоточенной силой P, приложенной в точке $O(0,\ 0)$, объем полагается фиксированным. Требуется найти максимальную силу P^*, при которой прогиб u° в точке O не превосходит заданной величины b_0. На возможные значения толщины $h(x,\ y)$ наложены ограничения сверху и снизу, которые увязаны с ограничением на объем пластинки.

Соответствующая задача с учетом ползучести материала может быть сформулирована следующим образом.

Найти

$$\max P(h)=P(h^*)=P^* \tag{3.1}$$

при ограничениях

$$V=\int\limits_\Omega h(x,y)\,dx\,dy=\mathrm{const},\qquad h_{\min}\leqslant h(x,y)\leqslant h_{\max} \tag{3.2}$$

$$u(O,\ t)\leqslant b_0,\qquad t\in[t_0,\ t_1] \tag{3.3}$$

Так как при любой допустимой функции $h(x,\ y)$ прогиб $u(O,\ t)=u^\circ(O)\zeta(t)$, причем максимум функции $\zeta(t)$ из (2.3) достигается в точке t_1, оптимальная толщина $h^*(x,\ y)$ и соответствующая сила P^* могут быть найдены из решения задачи (3.1) для упругой пластинки при геометрических ограничениях (3.2) и ограничениях на перемещения: $u^\circ(O)\leqslant b_0/\zeta(t_1)$.

4. Рассмотрим случай смешанных граничных условий при постоянных во времени внешних воздействиях. Пусть

$$\begin{gathered} p_i(x,t)=p_i(x)\ \text{на}\ S_\sigma,\qquad F_i(x,t)=F_i(x);\\ v_i(x,t)=v_i(x)\ \text{на}\ S_u,\qquad \vartheta_{ij}(x,t)=\vartheta_{ij}(x) \end{gathered} \tag{4.1}$$

Покажем, что если ограничения налагаются только на напряжения или только на перемещения, то задача определения оптимальной формы стареющего наследственного тела приводится к задаче отыскания оптимальной формы упругого тела, подверженного воздействию двух групп нагрузок.

Пусть оптимальная поверхность S определяется из условия (1.3) при геометрических ограничениях (1.2) и ограничениях только на напряжения (1.4). Полагаем также, что каждое из условий (1.4) определяет в пространстве напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \ldots, \sigma_{33}$ выпуклую область P_k

Лемма 1. Если напряженно-деформированное состояние стареющего наследственного тела (1.1) определяется воздействиями (4.1) и для некоторой поверхности $S\in M$ ограничения на напряжения (1.4) удовлетворяются при $t=t_0$ и $t=t_1$, то они удовлетворяются для всех $t\in[t_0,\ t_1]$.

Доказательство. Напряжения в стареющем наследственном теле на основе суперпозиции воздействий и теоремы [1] могут быть записаны в виде

$$\sigma_{ij}(x,t) = \overset{\circ}{\sigma}{}_{ij}^{(1)}(x) + \overset{\circ}{\sigma}{}_{ij}^{(2)}(x)\xi(t), \quad \xi(t) = \mu(t)\mathrm{L}^{-1}1 \tag{4.2}$$

где $\overset{\circ}{\sigma}{}_{ij}^{(1)}$ — напряжения в упругом теле от нагрузок $F_i(x)$ и $p_i(x)$ на S_σ, $\overset{\circ}{\sigma}{}_{ij}^{(2)}$ — напряжения в упругом теле от воздействий $\vartheta_{ij}(x)$ и $v_i(x)$ на S_u.

Так как условия (1.4) выполняются при $t=t_0$ и $t=t_1$, то

$$\sigma_{2.1} = \{\overset{\circ}{\sigma}{}_{ij}^{(1)} + \overset{\circ}{\sigma}{}_{ij}^{(2)}\xi_0\} \in P_k, \quad \sigma_{2.2} = \{\overset{\circ}{\sigma}{}_{ij}^{(1)} + \overset{\circ}{\sigma}{}_{ij}^{(2)}\xi_1\} \in P_k \quad {\scriptstyle (k=1,\ldots,p)} \tag{4.3}$$

где $\xi_0=\xi(t_0)$, $\xi_1=\xi(t_1)$, $\sigma_{2.1}$ и $\sigma_{2.2}$ — точки в пространстве напряжений σ_{11}, $\sigma_{12}, \ldots, \sigma_{33}$.

Введем параметр

$$\lambda(t) = (\xi(t)-\xi_0)/(\xi_1-\xi_0) \tag{4.4}$$

Так как функция $\xi(t)$ монотонно убывает от ξ_0 до ξ_1, параметр $\lambda(t) \in [0, 1]$.

Нетрудно проверить, что

$$\sigma_{ij}(x,t) = [\overset{\circ}{\sigma}{}_{ij}^{(1)}(x) + \overset{\circ}{\sigma}{}_{ij}^{(2)}(x)\xi_1]\lambda(t) + [\overset{\circ}{\sigma}{}_{ij}^{(1)}(x) + \overset{\circ}{\sigma}{}_{ij}^{(2)}(x)\xi_0](1-\lambda(t)) \tag{4.5}$$

Рассматривая в пространстве напряжений точку $\sigma(x, t) = \{\sigma_{11}(x, t), \sigma_{12}(x, t), \ldots, \sigma_{33}(x, t)\}$, на основании (4.5) получим

$$\sigma(x, t) = \sigma_{2.2}(x)\lambda(t) + \sigma_{2.1}(x)(1-\lambda(t)) \tag{4.6}$$

Уравнение (4.6) есть параметрическое представление отрезка, соединяющего точки $\sigma_{2.1}$ и $\sigma_{2.2}$. В силу выпуклости каждой из областей P_k $\sigma(x, t) \in P_k$ и условия (1.4) удовлетворяются для всех $t \in [t_0, t_1]$.

Теорема 2. Оптимальная форма стареющего наследственного тела (1.1), подверженного воздействиям (4.1), при ограничениях только на напряжения (1.4) совпадает с оптимальной формой упругого тела (1.6), на напряжения которого наложены ограничения

$$\varkappa_k(\sigma_{11}{}^\circ(x), \sigma_{12}{}^\circ(x), \ldots, \sigma_{33}{}^\circ(x)) < a_k, \quad x \in \Omega \quad {\scriptstyle (k=1,\ldots,p)} \tag{4.7}$$

которые должны выполняться при действии на тело каждой из следующих групп нагрузок:

$$\begin{aligned} p_i{}^\circ(x) &= p(x) \text{ на } S_\sigma, \quad F_i{}^\circ(x) = F_i(x); \\ v_i{}^\circ(x) &= v_i(x) \text{ на } S_u, \quad \vartheta_{ij}{}^\circ(x) = \vartheta_{ij}(x) \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} p_i{}^\circ(x) &= p_i(x) \text{ на } S_\sigma, \quad F_i{}^\circ(x) = F_i(x); \\ v_i{}^\circ(x) &= v_i(x)\xi_1 \text{ на } S_u, \quad \vartheta_{ij}{}^\circ(x) = \vartheta_{ij}(x)\xi_1 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Доказательство. Напряжения в упругом теле: $\sigma_{ij}{}^\circ = \overset{\circ}{\sigma}{}_{ij}^{(1)} + \overset{\circ}{\sigma}{}_{ij}^{(2)}$ при воздействиях (4.8) и $\sigma_{ij}{}^\circ = \overset{\circ}{\sigma}{}_{ij}^{(1)} + \overset{\circ}{\sigma}{}_{ij}^{(2)}\xi_1$ при воздействиях (4.9).

Пусть S^* — оптимальная поверхность упругого тела. Так как напряжения в стареющем наследственном теле имеют вид (4.2), причем $\xi(t_0)=1$, выполнение условий (4.7) для упругого тела при воздействиях как (4.8), так и (4.9) эквивалентно выполнению условий (1.4) в моменты t_0 и t_1.

В силу леммы 1 условия (1.4) выполняются для всех $t\in[t_0, t_1]$, поэтому поверхность S^* является допустимой для стареющего наследственного тела. Докажем ее оптимальность.

Предположим, что для стареющего наследственного тела оптимальная поверхность $S'\neq S^*$ и $V(S')<V(S^*)$. Функции $\sigma_{ij}(x, t)=\overset{\circ}{\sigma}{}_{ij}^{(1)}(x, S')+\overset{\circ}{\sigma}{}_{ij}^{(2)}(x, S')\xi(t)$, удовлетворяющие ограничениям (1.4), должны удовлетворять им для всех $t\in[t_0, t_1]$, в частности для моментов t_0 и t_1. Это эквивалентно выполнению условий (4.7) для упругого тела при нагрузках (4.8) и (4.9), действующих независимо. Таким образом, поверхность S' является допустимой для упругого тела и предположение $V(S')<V(S^*)$ приводит к противоречию.

Рассмотрим случай, когда при отыскании оптимальной поверхности ограничения налагаются только на перемещения. В силу суперпозиции воздействий и теорем [1] перемещения точек стареющего наследственного тела при воздействиях (4.1) могут быть представлены в виде

$$u_i(x,t)=u_i^{\circ(1)}(x)\zeta(t)+u_i^{\circ(2)}(x),\quad \zeta(t)=\mathrm{L}(1/\mu(t)) \tag{4.10}$$

где $u^{\circ(1)}$ — перемещения точек упругого тела от нагрузок $F_i(x)$ и $p_i(x)$ на S_σ; $u_i^{\circ(2)}$ — перемещения упругого тела от воздействий $\vartheta_{ij}(x)$ и $v_i(x)$ на S_u.

Так как функция $\zeta(t)$ изменяется в пределах $[\zeta(t_0), \zeta(t_1)]$, то линейные ограничения (1.5) выполняются для всех t, если они выполняются для моментов t_0 и t_1.

При $t=t_0$ перемещения (4.10) совпадают с перемещениями упругого тела, подверженного воздействиям (4.8), при $t=t_1$ — с перемещениями упругого тела при следующих воздействиях:

$$\begin{gathered} p_i^\circ(x)=p_i(x)\zeta_1 \text{ на } S_\sigma,\quad F_i^\circ(x)=F_i(x)\zeta_1;\\ v_i^\circ(x)=v_i(x) \text{ на } S_u,\quad \vartheta_{ij}^\circ(x)=\vartheta_{ij}(x) \end{gathered} \tag{4.11}$$

Теорема 3. Оптимальная форма стареющего наследственного тела (1.1), подверженного воздействиям (4.1) при ограничениях только на перемещения (1.5), совпадает с оптимальной формой упругого тела (1.6) при ограничениях

$$u_i^\circ(x)l_{im}<b_m,\quad x\in S\quad (m=1,\ldots,l) \tag{4.12}$$

которые должны выполняться как при воздействиях (4.8), так и при воздействиях (4.11).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

5. Рассмотрим задачу определения оптимальных геометрических параметров статически неопределимых стержневых систем, состоящих из армированных элементов [1] при следующих допущениях:

в процессе деформации поперечные сечения элементов остаются плоскими;

в каждом сечении центр тяжести арматуры совпадает с центром тяжести стареющего наследственного материала;

отношение момента инерции арматуры к моменту инерции основного материала не зависит от номера элемента: $I_a/I_0=\text{const}$;

основной материал обладает свойством ползучести и старения, а модуль мгновенной деформации не изменяется во времени;

арматура работает упруго.

[1] Как показано в [7], для однородных стержневых систем имеют место теоремы, аналогичные теоремам [1]. Поэтому для таких систем остаются справедливыми результаты, полученные в п. 2–4.

Пусть $z=(z_1, \ldots, z_n)$ — вектор параметров, определяющий конфигурацию системы, который может варьироваться в определенных пределах, заданных ограничениями геометрического характера.

Задача состоит в отыскании оптимального вектора z^* из условия минимума некоторого критерия при ограничениях на нормальные напряжения арматуры основного материала и (или) перемещения точек системы

$$\min \varphi(z) = \varphi(z^*) \tag{5.1}$$

$$-a < \sigma_a(x, t) < b, \quad -c < \sigma(x, t) < d \tag{5.2}$$

$$\Delta_{mp}(t) < h_m \quad (m=1, \ldots, l) \tag{5.3}$$

Здесь σ_a и σ — нормальные напряжения в арматуре и основном материале, Δ_{mp} — перемещения по направлению m от внешних воздействий, a, b, c, d, h_m — заданные положительные константы.

В ограничениях (5.2) учтена возможность различного сопротивления материала при растяжении и сжатии.

Пусть напряженно-деформированное состояние системы вызвано внешними нагрузками $P(x, t) = P(x) f(t)$ и при определении перемещений учитываются деформации элементов только из изгиба. Как следует из результатов, полученных в [8, 9], изгибающие моменты, напряжения и перемещения имеют вид

$$\begin{gathered} M(x, t) = M^\circ(x)\zeta(t), \quad \sigma_a(x, t) = \sigma_a^\circ(x)\psi(t), \\ \sigma(x, t) = \sigma^\circ(x)\xi(t), \quad \Delta_{mp}(t) = \Delta_{mp}^\circ\psi(t) \end{gathered} \tag{5.4}$$

$$\begin{gathered} \zeta(t) = f(t), \quad \psi(t) = [I + \alpha R^*(-\gamma)] f(t), \quad \xi(t) = [I - \gamma R^*(-\gamma)] f(t) \\ \alpha = 1/(1+\mu), \quad \mu = E_a I_a / E_0 I_0, \quad \gamma = 1 - \alpha \end{gathered} \tag{5.5}$$

где E_a и E_0 — модули упругости арматуры и основного материала; $R^*(-\gamma)$ — резольвента K^* с параметром $(-\gamma)$; M°, σ_a°, σ°, Δ_{mp}° — изгибающие моменты, напряжения и перемещения системы из упругого материала, подверженной действию нагрузки $P^\circ(x) = P(x)$.

Если напряженно-деформируемое состояние системы обусловлено вынужденными деформациями или перемещениями опор, которые изменяются во времени пропорционально $f(t)$, то внутренние усилия напряжения и перемещения имеют вид (5.4), при этом

$$\zeta(t) = [I - \alpha R^*(-1)] f(t), \quad \psi(t) = f(t), \quad \xi(t) = [I - R^*(-1)] f(t) \tag{5.6}$$

Величины M°, σ_a°, σ°, Δ_{mp}° определяются из решения задачи для упругой системы, подверженной воздействию постоянной во времени вынужденной деформации.

Для напряжений и перемещений (5.4) ограничения (5.2) и (5.3) эквивалентны следующим:

$$\begin{gathered} -a/\psi_* < \sigma_a^\circ(x) < b/\psi_*, \quad -c/\xi_* < \sigma^\circ(x) < d/\xi_*, \quad \psi_* = \max \psi(t) \\ \xi_* = \max \xi(t), \quad \Delta_{mp} < h_m/\psi_* \quad (m=1, \ldots, l) \end{gathered} \tag{5.7}$$

где функции ψ, ξ предполагаются неотрицательными в рассматриваемом интервале времени.

Далее, как и в п. 2, приходим к следующему результату: оптимальные геометрические параметры однородной симметрично армированной системы из стареющего наследственного материала совпадают с оптимальными параметрами системы из упругого материала, на напряжения и перемещения которой наложены ограничения (5.7).

Предполагается, что функции ψ и ξ имеют вид (5.5), если система загружена внешними силами и вид (5.6) при воздействии вынужденных деформаций.

Из выражения (5.6) для $\psi(t)$ следует, что оптимальные параметры не зависят от реологических свойств материала, если при воздействии вынужденных деформаций ограничиваются только перемещения.

Полученные в данной работе результаты справедливы и для нестареющих материалов.

В случае, когда деформации системы обусловлены в основном действием нормальных сил и влиянием изгибающих моментов можно пренебречь, все полученные результаты остаются справедливыми, если отношение сечения арматуры к сечению основного материала $F_a/F_0=\mathrm{const}$ для всех элементов. Следует только в выражении для μ заменить отношение I_a/I_0 отношением F_a/F_0.

Автор признателен Н. Х. Арутюняну за то, что он обратил наше внимание на проблематику, рассматриваемую в данной работе.

Поступила 21 II 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.–Л., Гостехиздат, 1952.
2. *Арутюнян Н. Х.* Напряжения и деформации в бетонных массивах с учетом ползучести бетона. Докл. АН АрмССР, 1947, т. 7, № 5.
3. *Харлаб В. Д.* Общее решение задачи линейной квазистатической теории ползучести изотропного тела при постоянном коэффициенте Пуассона. В сб.: Инженерные конструкции, сопротивление материалов, строительная механика. Тр. Ленингр. инж.-строит. ин-та, 1962.
4. *Лурье А. И.* Применение принципа максимума к простейшим задачам механики. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1965, № 252.
5. *Баничук Н. В.* Оптимальное проектирование в одномерных задачах изгиба для фиксированных и подвижных нагрузок. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 5.
6. *Баничук Н. В., Картвелишвили В. М., Миронов А. А.* Численное решение двумерных задач оптимизации упругих пластин. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1.
7. *Ржаницын А. Р.* Теория ползучести. М., Стройиздат, 1968.
8. *Харлаб В. Д.* К расчету статически неопределимых железобетонных стержневых конструкций с учетом ползучести и твердения бетона. Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехники им. Веденеева, 1961, т. 68.
9. *Зевин А. А.* К расчету статически неопределимых железобетонных конструкций с учетом ползучести бетона. Прикл. механ., 1974, т. 10, вып. 7.