

## ПЛОСКАЯ ТРЕЩИНА ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Р. В. ГОЛЬДШТЕЙН

(Москва)

Рассматривается задача о трещине, занимающей плоскую область (не обязательно односвязную) произвольного очертания в плане в однородной среде и на границе соединения двух полупространств с различными упругими свойствами. Задача сводится к системе трех интегро-дифференциальных (псевдодифференциальных) уравнений относительно скачков смещений вдоль поверхности трещины с использованием записанной в преобразованиях Фурье [1] связи между напряжениями и смещениями на границе полупространства.

Выделены случаи, когда указанная система разделяется, т. е. уравнение относительно скачка нормальной компоненты смещений отделяется от системы двух уравнений относительно скачков касательных компонент. Это важный для практики случай, когда один из материалов несжимаем, а второй — абсолютно жесткий и, естественно, случай однородной среды. Для плоской трещины произвольного разрыва в безграничной однородной среде различные системы интегро-дифференциальных уравнений получены в [2-4]. Проводится сопоставление этих систем и системы, приведенной в работе; показано, что все системы эквивалентны.

Для трещины вдоль криволинейной поверхности путь вывода интегро-дифференциальных уравнений с помощью обобщенных упругих потенциалов предложен в [5], для этого случая подробный вывод интегро-дифференциальных уравнений (также через обобщенные потенциалы) дан в [6].

Приводятся некоторые результаты, относящиеся к вычислению и оценкам локальных и интегральных характеристик решения задачи. Сначала рассматриваются компоненты «объема» трещины (проинтегрированные по области разреза соответствующие компоненты скачка смещений [7]).

Получены формулы для вычисления компонент объема при произвольном распределении нагрузок на поверхностях трещины, если известно решение (распределение скачков смещений) для трещины той же формы при трех системах однородных нагрузок, действующих последовательно в направлениях каждой из координатных осей (плоскость трещины совпадает с координатной плоскостью  $x_3=0$ ). Эти формулы аналогичны известным в теории контактных задач формулам [8] (см. также [9, 10]) и относятся к общему случаю трещины на границе соединения двух полупространств. Они позволяют строить различные оценки компонент объема для трещины произвольной формы. Приводится пример таких оценок для объема трещины нормального разрыва в однородном теле.

Обсуждается вопрос об оценках коэффициентов интенсивности напряжений на контуре трещины. Отмечается, что в тех случаях, когда упомянутая выше система интегро-дифференциальных уравнений разделяется, справедлив принцип сравнения для коэффициента интенсивности нормальных напряжений, ранее установленный<sup>1</sup> для трещин нормального разрыва в безграничной среде [11] и слое достаточной толщины [12].

Далее, на примере однородного тела произвольной формы, границы которого достаточно удалены от трещины, показано, что принцип сравнения имеет место по крайней мере с учетом в решении главного члена, отражающего влияние границ. Для этого предварительно получена система интегро-дифференциальных уравнений задачи о плоской трещине в трехмерном теле конечных размеров. Построенная система позволяет естественно проводить путем последовательных приближений учет влияния границы тела и, в частности, убедиться в справедливости принципа сравнения.

<sup>1</sup> См. также: Гольдштейн Р. В., Ентов В. М. Некоторые качественные методы в механике разрушения. М., Ин-т проблем механики АН СССР, 1976, препринт № 76.

Предлагается вариант вариационно-разностного метода решения системы интегро-дифференциальных уравнений при произвольной форме трещины, обобщающий развитый ранее<sup>1</sup> для решения задачи о трещине нормального разрыва [13].

В качестве примера применения вариационно-разностного метода приведены результаты выполненных совместно с В. Ф. Ланцбергом расчетов для задачи о двух одинаковых эллиптических трещинах нормального разрыва, расположенных в одной плоскости, в условиях однородного нагружения. Проанализировано взаимное влияние трещин при их различной ориентации (большие оси эллипсов лежат на одной прямой, параллельны и взаимно перпендикулярны при различном удалении трещин). Рассматривается возможность приближенного учета взаимодействия трещин на основе принципа сравнения. Проводится сопоставление результатов с полученными в [14] по приближенной методике в случае, когда большие оси эллипсов параллельны.

**1. Интегральные уравнения задачи о плоской трещине произвольного разрыва.** 1.1. Пусть трещина занимает область  $G$  (не обязательно односвязную) на границе ( $x_3=0$ ) раздела двух полупространств с различными упругими свойствами. Векторы усилий, действующих на верхнюю и нижнюю поверхности трещины, равны по модулю и противоположно направлены. Вне трещины в плоскости  $x_3=0$  имеет место полное сцепление между материалами и на бесконечности нагрузки не приложены.

Граничные условия задачи имеют вид

$$t^{(1)}(x_1, x_2, 0) = -t^{(2)}(x_1, x_2, 0) = t^0(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in G \quad (1.1)$$

$$t^{(h)}(x_1, x_2, 0) = \{\sigma_{i3}^{(h)}(x_1, x_2, 0)\} \quad (h=1,2; i=1,2,3)$$

$$b_h(x_1, x_2, 0) = u_h^{(1)}(x_1, x_2, 0) - u_h^{(2)}(x_1, x_2, 0) = 0, \quad (x_1, x_2) \in G \quad (1.2)$$

$$\sigma_{h3}^{(1)}(x_1, x_2, 0) = \sigma_{h3}^{(2)}(x_1, x_2, 0) \quad (h=1,2,3)$$

Здесь и ниже индексами (1) и (2) сверху отмечены величины, относящиеся к верхнему и нижнему полупространствам;  $b_h$  — скачки смещений при переходе через границу раздела.

В области трещины  $G$  скачки смещений  $b_h \neq 0$  и подлежат определению. Если величины  $b_h$  найдены, то могут быть вычислены и остальные локальные и интегральные характеристики упругого поля, в частности и те, которые необходимы для оценки условий роста трещины.

Получим систему интегральных уравнений относительно скачков смещений  $b_h$ , используя связь между напряжениями  $t^{(1,2)}$  ( $i=1, 2, 3$ ) и смещениями  $u_i^{(1,2)}$  на границе, следующую из известного решения первой (или второй) основной задачи для полупространства, и граничные условия (1.1), (1.2).

В дальнейшем будем применять обобщенное преобразование Фурье по переменным  $x=(x_1, x_2)$  с параметром  $\xi=(\xi_1, \xi_2)$ :

$$f^{\sim}(\xi) = F(f) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i(\xi, x)} dx, \quad f(x) = F^{-1}(f) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} f^{\sim}(\xi) e^{-i(\xi, x)} d\xi \quad (1.3)$$

$$(\xi, x) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2, \quad dx = dx_1 dx_2$$

<sup>1</sup> См.: Гольдштейн Р. В., Клейн И. С., Эскин Г. И. Вариационно-разностный метод решения некоторых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений трехмерных задач теории упругости. М., Ин-т проблем механики АН СССР, 1973, препринт № 33.

Гольдштейн Р. В. Применение вариационно-разностного метода для решения некоторых пространственных задач теории упругости для тел с трещинами. Смешанные задачи механики деформируемого тела. Всес. научн. конф. Тезисы докл., ч. 2, Ростов-на-Дону, 1977.

Связь между напряжениями и смещениями на границе в преобразованиях Фурье приводится в [1], там же получено ее следствие — соотношение между  $\mathbf{t}^\vee$  и  $\mathbf{b}^\vee$ , которое в матричной форме имеет вид<sup>1</sup>

$$\mathbf{t}^\vee = -A(\xi)\mathbf{b}^\vee/2\pi \tag{1.4}$$

$$A(\xi) = |\xi| A^*(\xi) = \frac{|\xi|}{g^2 - d^2} \begin{vmatrix} g - e\eta_2^2 & e\eta_1\eta_2 & d\eta_1 \\ e\eta_1\eta_2 & g - e\eta_1^2 & d\eta_2 \\ -d\eta_1 & -d\eta_2 & g \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

$$g = \frac{1-\nu^{(1)}}{2\pi\mu^{(1)}} - \frac{1-\nu^{(2)}}{2\pi\mu^{(2)}}, \quad d = \frac{1-2\nu^{(1)}}{4\pi\mu^{(1)}} - \frac{1-2\nu^{(2)}}{4\pi\mu^{(2)}} \\ e = \frac{gc+d^2}{g+c} \quad c = \frac{\nu^{(1)}}{2\pi\mu^{(1)}} + \frac{\nu^{(2)}}{2\pi\mu^{(2)}}, \quad \eta_i = \frac{\xi_i}{|\xi|} \quad (i=1,2)$$

Искомые интегро-дифференциальные (псевдодифференциальные, см., например, [15]) уравнения с учетом (1.1) и (1.4) можно записать тогда в следующем виде:

$$F^{-1}\{-A(\xi)\mathbf{b}^\vee/2\pi\} = \mathbf{t}^\circ(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in G \tag{1.6}$$

Если свойства сред (1) и (2) совпадают, то матрица  $A(\xi)$  имеет более простой вид  $A^h(\xi)$ :

$$A^h(\xi) = \frac{\pi\mu|\xi|}{1-\nu} \begin{vmatrix} 1-\nu\eta_2^2 & \nu\eta_1\eta_2 & 0 \\ \nu\eta_1\eta_2 & 1-\nu\eta_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{1.7}$$

и уравнение для скачка  $b_3$  нормальной компоненты смещений не связано с двумя уравнениями относительно скачков касательных компонент смещений. В общем случае такое разделение отсутствует, но сохраняется в практически важном случае, когда один из материалов, например (2), несжимаем, а второй — абсолютно жесткий. Тогда  $\nu^{(2)}=0.5$ ,  $\mu^{(1)} \rightarrow \infty$  и в силу (1.5)

$$c=g=1/(4\pi\mu^{(1)}), \quad d=0, \quad e=1/2g \tag{1.8}$$

и матрица  $A(\xi)$  совпадает с  $A^h(\xi)$ , если в последней положить  $\nu=0.5$  и заменить стоящий впереди множитель  $\mu(1-\nu)$  на  $4\mu^{(2)}$ . Поэтому решение задачи о трещине на границе несжимаемого и абсолютно жесткого материала получается сразу из решения задачи о трещине той же формы (при тех же нагрузках) в однородной среде.

1.2. В однородном случае различные и, как показано ниже, эквивалентные формы интегро-дифференциальных уравнений задачи о трещине произвольного разрыва непосредственно в  $x$ -пространстве получены в [2-4].

Уравнения, полученные в [3] с помощью обобщенных упругих потенциалов, имеют вид (в принятых здесь обозначениях)

$$L_{\alpha\alpha} = -\frac{\mu}{4\pi} \int_G \left[ \frac{\nu}{1-\nu} b_{x_\beta, x_\beta}'(x') (R_0^{-1})_{,x_\alpha} + b_{x_\alpha, x_\beta}'(x') (R_0^{-1})_{,x_\beta} \right] dS' = t_{x_\alpha}^\circ \quad (\alpha=1,2) \tag{1.9}$$

$$L_{33} = -\frac{\mu}{4\pi(1-\nu)} \int_G [b_{x_3, x_2}'(R_0^{-1})_{,x_2} + b_{x_3, x_1}'(R_0^{-1})_{,x_1}] dS' = t_3^\circ \tag{1.10}$$

<sup>1</sup> В [1] в формуле (4.4) в записи матрицы  $A(\xi)$  пропущен множитель  $|\xi|$ .

Применяя обобщенное преобразование Фурье и пользуясь теоремой о свертке, а также учитывая, что  $F(r^{-1}) = 2\pi |\xi|^{-1}$ ,  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ , приведем (1.9), (1.10) к виду

$$-\frac{\mu}{2} F^{-1} \left\{ |\xi| \left( \delta_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} \eta_\alpha \eta_\beta \right) b_\beta^\sim \right\} = t_\alpha^\circ, \quad (x_1, x_2) \in G \quad (\alpha, \beta=1, 2) \quad (1.11)$$

$$-\frac{\mu}{2(1-\nu)} F^{-1} \{ |\xi| b_3^\sim \} = t_3^\circ \quad (1.12)$$

очевидно, тождественному (1.6), (1.7).

В [4] интегро-дифференциальные уравнения выведены через тождество Сомильяна в следующей форме:

$$\frac{\mu}{8\pi(1-\nu)} \int_G \{ (1-2\nu) [ (R_0^{-1})_{,\alpha} \delta_{\alpha\beta} - (R_0^{-1})_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} ] + \quad (1.13)$$

$$+ 3(R_0)_{,\alpha} (R_0)_{,\beta} (R_0)_{,\gamma} (R_0^{-2}) \} b_{\beta,\gamma}^\sim(x') dS' = t_\alpha^\circ$$

(третье уравнение совпадает с (1.10)).

Их эквивалентность уравнениям (1.6), (1.7) устанавливается с учетом равенств

$$F(x_1 x_\beta x_\gamma / r^5) b_{\beta,\gamma}^\sim = (2\pi i / 3 |\xi|^3) \{ (2\xi_1^3 + 3\xi_1 \xi_2^2) b_{1,1}^\sim + \xi_2^3 (b_{1,2}^\sim + b_{2,1}^\sim) + \xi_1^3 b_{2,2}^\sim \}$$

$$F(x_2 x_\beta x_\gamma / r^5) b_{\beta,\gamma}^\sim = (2\pi i / 3 |\xi|^3) \{ \xi_2^3 b_{1,1}^\sim + \xi_1^3 (b_{1,2}^\sim + b_{2,1}^\sim) + (2\xi_2^3 + 3\xi_1^2 \xi_2) b_{2,2}^\sim \}$$

в силу которых левую часть (1.13) (при  $\alpha=1$ ) можно записать так:

$$\frac{\mu}{4 \cdot (1-\nu)} F^{-1} \{ |\xi|^{-2} [ (1-2\nu) (\delta_{\alpha\beta} \xi_\alpha - \delta_{\alpha\beta} \xi_\gamma) \xi_\alpha |\xi| b_\beta^\sim - \quad (1.13)$$

$$- (2\xi_1^4 + 3\xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4) b_1^\sim - (\xi_1 \xi_2^3 + \xi_1^3 \xi_2) b_2^\sim \}$$

и аналогично при  $\alpha=2$ . Отсюда получим для левой части (1.13) представление

$$\frac{\mu}{4 \cdot (1-\nu)} F^{-1} \{ |\xi| [ (1-2\nu) (\eta_\alpha \eta_\beta - \delta_{\alpha\beta}) b_\beta^\sim - (\delta_{\alpha\beta} + \eta_\alpha \eta_\beta) b_\beta^\sim ] \} = \quad (1.13)$$

$$= -\frac{\mu}{2} F^{-1} \left\{ |\xi| \left( \delta_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} \eta_\alpha \eta_\beta \right) b_\beta^\sim \right\}$$

совпадающее с (1.6), (1.7). Наконец, рассмотрим интегро-дифференциальные уравнения, приведенные в [2]:

$$\Delta_{x_1 x_2} \Psi_i + (-1)^i \nu W_{,3-i} = \frac{1-\nu}{\mu} N_i \quad (i=1, 2) \quad (1.14)$$

$$\Psi_i = \int_G \frac{\alpha_i(x')}{R_0} dS', \quad W = \int_G \frac{\omega(x')}{R_0} dS', \quad \omega = \alpha_{1,2} - \alpha_{2,1}$$

Здесь  $\Psi_i$  — потенциалы Папковича — Нейбера,  $\alpha_i$  — функции, которые характеризуют скачки смещений. Учитывая, что  $W = \Psi_{1,2} - \Psi_{2,1}$ , (1.14)

можно переписать в виде

$$\frac{\mu}{1-\nu} [\Delta \Psi_{\alpha} + \nu (-\Delta \Psi_{\alpha} + \Psi_{\beta, \beta \alpha})] = N_{\alpha} \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (1.15)$$

Если теперь учесть, что  $\alpha_k = 4\pi b_k$ , то левая часть равенства (1.15) через преобразование Фурье запишется в виде (1.11). Таким образом, интегро-дифференциальные уравнения, полученные для задачи о трещине произвольного разрыва в однородной упругой среде в  $[2^{-4}]$ , эквивалентны.

*Замечание.* Интегро-дифференциальные уравнения в форме (1.9), (1.10) можно получить и с помощью теории дислокаций (этот способ удобен при рассмотрении задач о трещинах; см., например, [13, 16]), если, в частности, воспользоваться соотношениями теории внутренних напряжений Кренера [17] и учесть, что при моделировании плоской трещины произвольного разрыва имеет место связь между величинами  $b_i$  и компонентами  $\alpha_{ik}$  тензора плотности дислокаций:  $\alpha_{1j} = b_{j,2}$ ,  $\alpha_{2j} = -b_{j,1}$  ( $j=1, 2, 3$ ).

**2. Оценки некоторых локальных и интегральных характеристик решения.** 2.1. При анализе деформирования и разрушения тел с трещинами существенны величины  $V_k$ -проинтегрированных по области разреза компонент скачков смещений [7]:

$$V_k = \int_G b_k dS \quad (k=1, 2, 3) \quad (2.1)$$

Величины  $V_k$  входят, в частности, в формулы, определяющие асимптотику поля напряжений вдали от трещины (см., например, [7] и п. 2.3), и поэтому важны при подсчете эффективных упругих характеристик тела с множеством трещин [7]. Для трещин нормального разрыва  $b_1 = b_2 = 0$ ,  $V_1 = V_2 = 0$  и  $V_3$  представляет собой объем трещины в деформированном состоянии. Величина объема, естественно, входит в соотношения, описывающие кинетику ее роста при совместном действии механических нагрузок и давления, возникающего в результате диффузии газа или фильтрации жидкости в трещину.

Для вычисления  $V_k$  по определению (2.1) нужно знать распределение скачков  $b_k$  при заданных нагрузках, т. е. решение задачи. Теорема взаимности позволяет обойти эту трудность и выразить  $V_k$  через решения задачи для некоторых более простых нагрузок при той же форме трещины. Соответствующие соотношения аналогичны известным в теории контактных задач формулам [8] (см., также [9, 10]), выражающим силу и моменты, действующие на штамп с острой кромкой и основанием произвольной формы через решение задачи о вдавливании штампа с плоским основанием при той же площадке контакта.

Пусть  $b_k'$  и  $b_k$  — решения (1.6) при нагрузках  $t'$  и  $t$  соответственно. По теореме взаимности, учитывая, что  $t^{(2)} = -t^{(1)}$  в силу (1.1), имеем

$$\int_G (t_i' b_i) dS = \int_G (t_i b_i') dS, \quad (2.2)$$

Выберем в качестве  $t'$  в (2.2) следующие три вида постоянных нагрузок  $t^k = ET$ , где  $E$  — единичная матрица,  $T = \{t^1, t^2, t^3\}$  ( $k=1, 2, 3$ ). Обозначим через  $b^k$  соответствующие им решения (1.6). Из (2.2) получим (по  $k$  не проводится суммирование)

$$V_k = \frac{1}{t^k} \int_G (t_i b_i^k) dS \quad (i, k=1, 2, 3) \quad (2.3)$$

Из (2.3) можно вывести различные оценки для величин  $V_k$ . Простейшие из них получаются, если заменить нагрузки  $t_i$  их максимальными  $t_i^{\max}$  и минимальными  $t_i^{\min}$  значениями

$$\frac{1}{t^k} (t_i^{\min} V_i^k) \leq V_k \leq \frac{1}{t^k} (t_i^{\max} V_i^k) \quad (2.4)$$

В случае трещины нормального разрыва в однородной среде  $t_1=t_2$ ,  $V_1=V_2=0$  и отлична от нуля лишь компонента объема  $V_3$ , поэтому (2.4) принимает вид

$$\frac{1}{t^3} t_3^{\min} V_3^3 \leq V_3 \leq \frac{1}{t^3} t_3^{\max} V_3^3 \quad (2.5)$$

Объем  $V_3^3$  трещины нормального разрыва, расположенной в безграничной среде, в однородном поле нагрузок можно оценить сверху, не зная распределения скачков смещений вдоль разреза  $G$ , если воспользоваться установленным в [12] изопериметрическим неравенством, согласно которому объем трещины данной площади  $S$  не превосходит объема круговой трещины той же площади. Из (2.5) тогда получим

$$V_3 \leq \frac{16(1-\nu^2)}{3\pi^{3/2} E} \frac{t_3^{\max}}{t^3} S^{3/2} \quad (2.6)$$

Предположим, что для  $V_3^3$  известны оценки  $V_{3l}^3 \leq V_3^3 \leq V_{3u}^3$ , тогда из (2.5) следует

$$\frac{1}{t^3} t_3^{\min} V_{3l}^3 \leq V_3 \leq \frac{1}{t^3} t_3^{\max} V_{3u}^3 \quad (2.7)$$

Для построения оценочных значений  $V_{3l}^3$  и  $V_{3u}^3$  при сложной форме трещины можно воспользоваться решениями задач о трещинах некоторых специально подобранных более простых форм, контуры которых являются вписанными и описанными по отношению к контуру исходной трещины. В [11] показано, что при переходе от данной трещины  $G$  к объемлющей  $G'$  смещения точек поверхности первой из них не уменьшаются, если при этом нагрузки в точках, принадлежащих общей части областей обеих трещин, не уменьшаются, а на вновь образованных поверхностях не отрицательны. Обозначим через  $b_3^{(in)}$  и  $b_3^{(out)}$  скачки смещений для вписанной

$G''$  и описанной  $G'$  по отношению к данной трещин, тогда  $b_3^{(in)} \leq b_3 \leq b_3^{(out)}$ ,

$V(x_1, x_2) \in G$ .

Поэтому

$$V_{3l}^3 = \int_{G''} b_3^{(in)} dS \leq V_3^3 \leq \int_G b_3^{(out)} dS = V_{3u}^3 \quad (2.8)$$

Таким образом, оценки сверху и снизу объема  $V_3^3$  при произвольной форме области  $G$  можно получить, рассматривая в пределах  $G$  решения задач о трещинах более простой формы, контуры которых являются вписанными и описанными по отношению к контуру исходной трещины.

2.2. В теории трещин важны коэффициенты интенсивности напряжений  $N_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) на контуре трещины. Ввиду трудностей решения задачи теории упругости при сложной форме трещины возникает вопрос об оценках коэффициентов интенсивности напряжений на контуре трещины сложной формы через решения задач для некоторых специально подобранных трещин более простой формы [11, 12]. В [11] было показано, что для коэф-

коэффициента интенсивности на контуре трещины нормального разрыва в безграничной среде и в достаточно толстом слое [12] имеет место принцип сравнения.

Пусть  $G$  и  $G'$  ( $G' \subset G$ ) — две области трещины с контурами  $\Gamma$  и  $\Gamma'$ , имеющими общую часть  $\Gamma'' = \Gamma \cap \Gamma'$ , и соответствующие нормальные нагрузки  $q(x_1, x_2)$ ,  $q'(x_1, x_2)$  удовлетворяют условиям

$$q(x_1, x_2) \geq 0, (x_1, x_2) \in G \setminus G', q(x_1, x_2) \geq q'(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in G' \quad (2.9)$$

Тогда в тех точках  $\Gamma$ , в которых нормали к контурам совпадают, коэффициент интенсивности  $N$  для трещины, занимающей область  $G$ , не меньше, чем коэффициент интенсивности  $N_1'$  для трещины, занимающей область  $G'$ :

$$N_1'(M) \leq N_1(M), M \in \Gamma'' \quad (2.10)$$

То же, что и в [11], доказательство принципа сравнения для коэффициента интенсивности нормальных напряжений остается справедливым и для трещины произвольного разрыва в тех случаях, когда в системе (1.6) уравнение относительно нормальной компоненты скачка смещений отделяется (так как оно при этом совпадает с точностью до постоянного множителя с уравнением для трещины нормального разрыва). В частности, принцип сравнения для коэффициента интенсивности нормальных напряжений верен для трещин произвольного разрыва в однородной безграничной среде и на границе соединения несжимаемого и абсолютно жесткого материала.

Как отмечалось в [12], принцип сравнения заведомо имеет место, если задача теории упругости для тела с трещиной нормального разрыва положительна, т. е. положительным (раскрывающим трещину) нагрузкам отвечают положительные смещения точек ее поверхностей ( $b_3 > 0$ ). Свойство положительности (и принцип сравнения) сохраняется по отношению к нормальным смещениям и для трещины произвольного разрыва в ограниченном теле произвольной формы, границы которого достаточно удалены от трещины, по крайней мере с учетом первой поправки к решению для безграничной среды, отражающей влияние границ. Чтобы убедиться в этом, запишем сначала систему интегро-дифференциальных уравнений для задачи о трещине в ограниченном однородном теле. Как обычно, разобьем задачу на две.

В первой рассматривается трещина в безграничной среде, и скачки смещений  $b_i$  вдоль ее поверхностей считаются известными; вычисляются напряжения  $\sigma_{ij}$ , вызываемые ими на месте трещины (в области  $G$ ) —  $\sigma_{ij}^I$  и на месте границы  $S$  тела —  $\sigma_{ij}^S$ . Во второй задаче рассматривается тело без трещины, к поверхности  $S$  которого приложены усилия  $t_j$ , вызываемые напряжениями ( $-\sigma_{ij}^S$ ):

$$t_j^S = -\sigma_{jm}^S n_m \quad (2.11)$$

где  $n_m$  — компоненты единичного вектора внешней нормали к  $S$ .

Во второй задаче вычисляются напряжения  $\sigma_{ij}^{II}$  на месте трещины. Интегральные уравнения получаются после приравнивания суммы ( $\sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II}$ ) заданным на поверхности трещины нагрузкам  $t_i$ . Особенность применения этого приема в случае тела произвольной формы заключается в том, что решение второй задачи нельзя выписать явно и, следовательно, нельзя выразить  $\sigma_{ij}^{II}$  через одни только величины  $b_i$  и получить интегральные уравнения, в которых интегрирование ведется лишь по области  $G$ . Для того чтобы выразить  $\sigma_{ij}^{II}$ , воспользуемся тождеством Сомилиана и следующим из него граничным интегральным уравнением [18].

Напомним, во-первых, что если на границе  $\Sigma$  области известны напряжения и смещения, то напряжения в произвольной точке  $P$  тела выража-

ются следующей из тождества Сомилиана формулой [19]:

$$\sigma_{ij}(P) = - \int_{\Sigma} u_k(Q) S_{kij}(Q, P) dS(Q) + \int_{\Sigma} t_k(Q) D_{kij}(Q, P) dS(Q) \quad (2.12)$$

$$S_{kij} = \frac{k\mu}{2\pi R^3} \left\{ 3R_i n_l \left[ \delta_{ij} R_{,k} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\delta_{ki} R_{,j} + \delta_{kj} R_{,i}) - \frac{5}{1-2\nu} R_{,i} R_{,j} R_{,k} \right] + \right. \\ \left. + \frac{3\nu}{1-2\nu} (n_i R_{,j} R_{,k} + n_j R_{,i} R_{,k}) + 3n_k R_{,i} R_{,j} + n_j \delta_{ki} + n_i \delta_{kj} - \frac{1-4\nu}{1-2\nu} n_k \delta_{ij} \right\} \quad (2.13)$$

$$D_{kij} = \frac{k}{4\pi R^2} \left[ \delta_{ki} R_{,j} + \delta_{kj} R_{,i} - \delta_{ij} R_{,k} + \frac{3}{1-2\nu} R_{,i} R_{,j} R_{,k} \right] \quad (2.14)$$

$$k = (1-2\nu)/2(1-\nu)$$

Напряжения  $\sigma_{ij}^s$  можно вычислить по формуле (2.12), если в качестве  $\Sigma$  взять совокупность верхней  $G^+$  и нижней  $G^-$  поверхностей трещины (ср. [4]). Так как рассматривается трещина-разрез, то нормали к  $G^+$  и  $G^-$  отличаются знаком, поэтому  $S_{kij}^+ = -S_{kij}^-$ . Далее  $D_{kij}^+ = D_{kij}^-$ ,  $t^+ = -t^-$  (в силу (4.1)). В результате из (2.12) имеем

$$\sigma_{ij}^s(P) = - \int_G b_k(Q) S_{kij}(Q, P) dS(Q), \quad P \in S \quad (2.15)$$

Отметим, что аналогично можно получить выражение для  $\sigma_{iz}^I$ , однако в этом нет необходимости, так как, согласно (1.9), (1.10), напряжение  $\sigma_{iz}^I = L_{iz}[b_k]$ . Для того чтобы вычислить  $\sigma_{ij}^{II}$  по формуле (2.12), нужно знать смещения  $u_i^s$  точек поверхности  $S$ , вызываемые усилиями (2.11);  $u_i^s$  могут быть определены из граничного интегрального уравнения [18]:

$$\frac{1}{2} u_i^s(P) + \int_S u_j^s(Q) T_{ij}(P, Q) dS(Q) = \int_S t_j^s(Q) U_{ij}(P, Q) dS(Q), \quad P \in S \quad (i=1,2,3)$$

$$T_{ij} = - \frac{k}{4\pi R^2} \left[ R_i n_l \left( \delta_{ij} + \frac{3}{1-2\nu} R_{,i} R_{,j} \right) - n_j R_{,i} + n_i R_{,j} \right] \quad (2.16)$$

$$U_{ij} = \frac{1}{16\pi\mu R(1-\nu)} [(3-4\nu)\delta_{ij} + R_{,i} R_{,j}]$$

Считая  $u_i^s$  известными и записывая  $\sigma_{iz}^I$  по (1.9), (1.10), а  $\sigma_{iz}^{II}$  по (2.12), получим

$$L_{iz}[b_k] - M_{iz}[b_k] = t_i \quad (i=1,2,3) \quad (2.17)$$

$$M_{iz} = \int_S u_k^s(Q) S_{kiz}(Q, P) dS(Q) - \int_S t_k^s(Q) D_{kiz}(Q, P) dS(Q)$$

Поскольку  $t_j^s$  в силу (2.11), (2.15) выражены через  $b_k$ , соотношения (2.16), (2.17) представляют собой искомую систему шести интегральных уравнений для задачи о трещине в ограниченном теле относительно трех основных ( $b_k$ ) и трех вспомогательных ( $u_k^s$ ) неизвестных функций.

Рассмотрим систему (2.16), (2.17) в том случае, когда граница тела удалена от трещины. Пусть  $d$  — диаметр наименьшего круга, описанного около трещины, а  $D$  — диаметр наибольшего шара с центром, совпадаю-



щим с центром круга, который может быть вписан в тело, ограниченное поверхностью  $S$ . При  $\varepsilon = (d/D) \rightarrow 0$  зависимости (2.17) переходят в уравнения для трещины в безграничной среде. Рассмотрим (2.17) при малом  $\varepsilon$  и оценим главный член поправки к решению задачи для безграничной среды за счет влияния границы. Сначала оценим главный член  $\sigma_{ij}^s$  по  $\varepsilon$ . Положим  $x_i(P) = x_i^*(P)D$ ,  $x_i(Q) = x_i^*(Q)d$ , ( $P \in S$ ,  $Q \in G$ ); тогда

$$R = [(x_i(P) - x_i(Q))(x_i(P) - x_i(Q))]^{1/2} = DR^*(P)(1 + O(\varepsilon))$$

$$R^*(P) = [x_i^*(P)x_i^*(P)]^{1/2}$$

Поэтому из (2.13) следует

$$S_{hij} = S_{hij}^*(1 + O(\varepsilon))/D^3 \quad (2.18)$$

где  $S_{kij}^*$  равно  $S_{kij}$ , вычисленному при  $R = R^*$ ,  $x_i(P) = x_i^*(P)$ . Из (2.15) теперь имеем

$$\sigma_{ij}^s = -\varepsilon^3 S_{kij}^* V_k^*(1 + O(\varepsilon)) \quad (2.19)$$

Здесь учтено, что введенные выше компоненты объема  $V_k$  равны

$$V_k = d^3 V_k^* = d^3 \int_{G^*} b_k dS$$

где  $G^*$  — область диаметра 1, подобная  $G$ .

Согласно (2.11) и в силу линейности (2.16),  $u_i^s$  будут иметь также порядок  $O(\varepsilon^3)$ :

$$u_i^s = \varepsilon^3 (u_i^s)^*(1 + O(\varepsilon)) \quad (2.20)$$

Рассмотрим уравнение системы (2.17), соответствующее  $i=3$ . В этом уравнении, согласно (1.17), оператор  $L_{33}[b_k] \equiv L_3[b_3]$ . Обозначим через  $R_\infty$  разрешающий оператор (1.17), тогда для (2.17) при  $i=3$  можно записать

$$b_3^{(1)} = R_\infty(t_3 + g^{(1)}), \quad g^{(1)} = M_{33}[b_k^0] \quad (2.21)$$

где  $b_k^0$  — решение (2.17) при  $\varepsilon=0$ . В силу (2.11), (2.19) и (2.20) можно переписать

$$M_{33}[b_k^0] = \varepsilon^3 \left\{ \int_S [(u_k^s(Q))^*]^\circ S_{k33}(Q, P) dS(Q) - \right.$$

$$\left. - (V_p^*)^\circ \int_S S_{pkm}^*(Q) n_m(Q) D_{k33}(Q, P) dS(Q) \right\} + O(\varepsilon^4) \quad (2.22)$$

Из (2.13), (2.14), учитывая, что  $|R_{,i}| < 1$ ,  $|\partial R / \partial n| \leq 3$ , имеем

$$|S_{k33}| \leq \frac{4k\mu(6-\nu)}{\pi(1-2\nu)R_{\min}^3}, \quad |D_{k33}| \leq \frac{3k(1-\nu)}{2\pi(1-2\nu)R_{\min}^2}, \quad R_{\min} = \min_{\substack{P \in G \\ Q \in S}} R \quad (2.23)$$

Поэтому из (2.21), (2.22) имеем

$$t_3 + g^1 \geq t_3 - \varepsilon^3 t_3^1$$

$$t_3^1 = \frac{4k\mu(6-\nu)}{\pi(1-2\nu)R_{\min}^3} \int_S |(u_k^s(Q))^*|^\circ dS(Q) +$$

$$+ \frac{3k(1-\nu)(V_p^*)^\circ}{2\pi(1-2\nu)R_{\min}^2} \int_S |S_{pkm}^* n_m| dS(Q) \quad (2.24)$$

Из (2.24) видно, что если нагрузка  $t_3$  отделена от нуля, то при достаточно удалении границ тела от трещины  $t_3 - \varepsilon^3 t_3^1 \geq 0$ . Это означает в соответствии с (2.21) и положительностью оператора  $R_\infty$  [12], что с учетом первой поправки на влияние границ тела имеет место положительность задачи по отношению к нормальным смещениям точек поверхностей трещины и, следовательно, принцип сравнения.

Заметим, что если рассматривается трещина в ограниченном теле и на ее поверхностях действуют нормальные нагрузки, то из системы (2.17) следует после рассмотрений, аналогичных проведенным выше, что коэффициенты интенсивности касательных напряжений  $N_2, N_3$  на контуре трещины имеют порядок  $\varepsilon^3$ , в то время как  $N_1 \sim 1$ . Поэтому условия срагивания трещины сложной формы под действием нормальных нагрузок в теле с удаленными границами можно определять без учета  $N_2$  и  $N_3$ , пользуясь оценочными значениями  $N_1$ , получаемыми в силу принципа сравнения.

**3. Вариационно-разностный метод решения задачи.** 3.1. Для приближенного решения системы (1.6) можно применить вариант вариационно-разностного метода, предложенный для решения задачи о трещине нормального разрыва<sup>1</sup> в однородной среде [13]. Приведем основные соотношения для случая трещины произвольного разрыва в однородной среде; общий случай не содержит принципиальных отличий.

Пусть  $h > 0$  и задано разбиение плоскости ( $x_3 = 0$ ) на квадраты с вершинами в точках  $x_{p_1 p_2} = (p_1 h, p_2 h)$ , где  $(p_1, p_2)$  — целочисленный вектор. Обозначим через  $G(h)$  составленную из квадратов многоугольную область, аппроксимирующую  $G$ , а через  $G_\pm(h)$  описанную около  $G$  и вписанную в нее многоугольные области соответственно. Рассмотрим множество  $N(h)$  целочисленных векторов, отвечающих внутренним узлам  $x_{p_1 p_2}$  области  $G(h)$ .

В качестве системы координатных функций выберем функции  $\psi_{p_1 p_2}$ :

$$\begin{aligned} \psi_{p_1 p_2}(x, h) &= \varphi_0 \left( \frac{x_1}{h} - p_1, \frac{x_2}{h} - p_2 \right), \quad \forall (p_1, p_2) \in N(h) \\ \varphi_0(x) &= (1 - |x_1|)(1 - |x_2|), \quad x \in g_{00}^2 \\ \varphi_0(x) &= 0, \quad x \in g_{00}^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

и квадрат  $g_{p_1 p_2}^{2h}$  со стороной  $2h$  с центром в точке  $x_{p_1 p_2}$ .

Приближенное решение системы (1.6), (1.7) будем искать в следующем виде:

$$b_i^h(x) = \sum_{(p_1, p_2) \in N(h)} c_{p_1 p_2}^i \psi_{p_1 p_2}(x, h) \quad (i=1, 2, 3) \quad (3.2)$$

где  $c_{p_1 p_2}^i$  — неизвестные коэффициенты, для определения которых воспользуемся методом Бубнова — Галеркина. Система линейных уравнений относительно  $c_{p_1 p_2}^i$  имеет вид

$$\sum_{(p_1, p_2) \in N(h)} (\Lambda_{q, p}^{1i} c_{p_1 p_2}^1 + \Lambda_{q, p}^{2i} c_{p_1 p_2}^2) = f_{q_1 q_2}^i \quad (i=1, 2), \quad (q_1, q_2) \in N(h) \quad (3.3)$$

$$\sum_{(p_1, p_2) \in N(h)} \Lambda_{q, p}^{33} c_{p_1 p_2}^3 = f_{q_1 q_2}^3 \quad (3.4)$$

$$\Lambda_{q, p}^{hi} = \Lambda_{q_1 q_2, p_1 p_2}^{hi} = (\Lambda^{hi} \psi_{p_1 p_2}, \psi_{q_1 q_2}), \quad f_{q_1 q_2}^i = (f^i, \psi_{q_1 q_2}) \quad (3.5)$$

<sup>1</sup> См. подстрочное примечание на стр. 112.

где (1.6), (1.7) представлено в виде

$$\Lambda^{ki} b_k = f^i, \quad f^i = -\frac{2(1-\nu)}{\mu} t_i^0, \quad \Lambda^{ki} b_k = F^{-1} \{ \Lambda^{ki}(\xi) b_k^\vee(\xi) \}$$

а через  $(f, g)$  обозначено скалярное произведение

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Вычисление коэффициентов системы (3.3) удобно проводить в  $\xi$ -пространстве. Используя равенство Парсевала

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} f^\vee(\xi) \overline{g^\vee(\xi)} d\xi \quad (3.6)$$

из (3.5) имеем

$$\Lambda_{q,p}^{ki} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} ((\Lambda^{ki} \psi_{p_1 p_2})^\vee \psi_{q_1 q_2}^\vee) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda^{ki}(\xi) \psi_{p_1 p_2}^\vee \psi_{q_1 q_2}^\vee d\xi \quad (3.7)$$

Учитывая, что

$$\psi_{q_1 q_2}^\vee = \varphi_0^\vee \exp[i(q_1 h \xi_1 + q_2 h \xi_2)], \quad \varphi_0^\vee = h^2 \frac{\sin^2(1/2 h \xi_1)}{(1/2 h \xi_1)^2} \frac{\sin^2(1/2 h \xi_2)}{(1/2 h \xi_2)^2}$$

после замены  $h \xi_i = \zeta_i$  из (3.7) получим

$$\Lambda_{q,p}^{ki} = \frac{h}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\zeta| \Lambda^{ki}(\zeta) \chi(\zeta_1, \zeta_2) \exp i[(p_1 - q_1) \zeta_1 + (p_2 - q_2) \zeta_2] d\zeta \quad (3.8)$$

$$\chi(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{\sin^4(1/2 \zeta_1)}{(1/2 \zeta_1)^4} \frac{\sin^4(1/2 \zeta_2)}{(1/2 \zeta_2)^4}$$

Из (3.8) видно, что, как и в случае трещины нормального разрыва, коэффициенты  $\Lambda_{q,p}^{ki}$  зависят лишь от разностей  $(p_i - q_i)$ , т. е.  $\Lambda_{q,p}^{ki} = \Lambda_{p-q}^{ki}$ , что существенно сокращает количество подлежащих вычислению коэффициентов в системе (3.3). Разностная структура коэффициентов  $\Lambda_{q,p}^{ki}$  объясняется тем, что каждый из них представляет собой работу напряжений  $\sigma_{hi}$ , вызываемых скачком смещений  $b_k = \psi_{p_1 p_2}$ , заданным на квадрате  $g_{p_1 p_2}^{2h}$  на перемещениях  $b_i$ , соответствующих  $\psi_{q_1 q_2}$ , заданным на квадрате  $g_{q_1 q_2}^{2h}$ . Величина работы зависит лишь от взаимного удаления элементов  $g_{p_1 p_2}^{2h}$  и  $g_{q_1 q_2}^{2h}$ .

Более того, если эти элементы достаточно удалены один от другого, то работа определяется интегральными характеристиками формы элементов (моментами площади), поэтому для вычисления  $\Lambda_{p-q}^{ki}$  при больших  $(|p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|) \rightarrow \infty$  имеют место простые асимптотические формулы. Для их получения представим  $(\varphi_0^\vee)^2$  в виде разложения в ряд Тейлора по  $\zeta_1, \zeta_2$ :

$$(\varphi_0^\vee)^2 = \sum_{r_1+r_2=0}^N \varphi_{r_1 r_2} \zeta_1^{2r_1} \zeta_2^{2r_2} + r_{2N+2}(\zeta_1, \zeta_2)$$

Формулу (3.8) можно рассматривать как преобразование Фурье функции от  $\xi$  по параметру  $k = \{k_1, k_2\} \equiv \{p_1 - q_1, p_2 - q_2\}$ :

$$\Lambda_{p-q}^{ki} = \frac{h}{(2\pi)^2} F\{|\xi| \Lambda^{ki}(\xi) (\varphi_0)^2(\xi)\}$$

Тогда, подставляя в эту формулу разложение  $(\varphi_0)^2$ , получим<sup>1</sup>

$$\Lambda_{p-q}^{ki} = \frac{h}{(2\pi)^2} \left[ \sum_{r_1+r_2=0}^N \varphi_{r_1 r_2} F\{\xi_1^{2r_1} \xi_2^{2r_2} |\xi| \Lambda^{ki}(\xi)\} + F\{|\xi| \Lambda^{ki}(\xi) r_{2N+2}(\xi_1, \xi_2)\} \right]$$

С учетом выражений для  $\Lambda^{ki}(\xi)$ , используя свойства преобразования Фурье и формулу  $F(|\xi|^{-1}) = 2\pi |k|^{-1}$ , можно записать асимптотические формулы для  $\Lambda_{p-q}^{ki}$  следующим образом:

$$\Lambda_{k_1, k_2}^{ii} = \frac{h}{2\pi(1-\nu)} \sum_{r_1+r_2=0}^N \left\{ (-1)^{r_1+r_2+1} \varphi_{r_1 r_2} \frac{\partial^{2r_1+2r_2}}{\partial k_1^{2r_1} \partial k_2^{2r_2}} \left[ \frac{(1-2\nu)}{|k|^3} - \frac{3\nu k_i^2}{|k|^5} \right] \right\} + O(|k|^{-2N-5}) \tag{3.9}$$

$$\Lambda_{k_1, k_2}^{12} = \Lambda_{k_1, k_2}^{21} = \frac{h\nu}{2\pi(1-\nu)} \sum_{r_1+r_2=0}^N \left\{ (-1)^{r_1+r_2+1} \frac{\partial^{2r_1+2r_2}}{\partial k_1^{2r_1} \partial k_2^{2r_2}} \left( \frac{3k_1 k_2}{|k|^5} \right) \right\} + O(|k|^{-2N-5}) \tag{3.10}$$

Коэффициенты  $\Lambda_{k_1, k_2}^{ki}$  вычислялись для ряда значений  $k_1, k_2$  как по исходным, так и по асимптотическим формулам. Учитывая зависимость  $\Lambda_{k_1, k_2}^{ii}$  от коэффициента Пуассона, для сокращения объема вычислений было проведено разбиение  $|\xi| \Lambda^{ii}(\xi)$  на сумму двух слагаемых

$$|\xi| \Lambda^{ii}(\xi) = |\xi| + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\xi_i^2}{|\xi|} \quad (i=1,2)$$

Соответственно этому  $\Lambda_{k_1, k_2}^{ii} = \Lambda_{k_1, k_2}^{33} + (\nu/(1-\nu)) \Sigma_{k_1, k_2}^{ii}$ , где  $\Sigma_{k_1, k_2}^{ii}$  определяется соотношением (3.8) с заменой  $|\xi| \Lambda^{ii}(\xi)$  на  $\xi_i^2/|\xi|$ . Очевидно, что  $\Sigma_{k_1, k_2}^{11} = \Sigma_{k_2, k_1}^{22} = \Sigma_{k_1, k_2}^{33}$ . Асимптотическая формула для  $\Sigma_{k_1, k_2}^{ii}$  имеет вид

$$\Sigma_{k_1, k_2}^{ii} = \frac{h\nu}{2\pi(1-\nu)} \sum_{r_1+r_2=0}^N \left\{ (-1)^{r_1+r_2+1} \varphi_{r_1 r_2} \frac{\partial^{2r_1+2r_2}}{\partial k_1^{2r_1} \partial k_2^{2r_2}} \left( \frac{3k_i^2}{|k|^5} - \frac{1}{|k|^3} \right) \right\} + O(|k|^{-2N-5}) \quad (i=1,2) \tag{3.11}$$

В табл. 1, 2 приведены значения  $I_{k_1, k_2}^{11} = 2\pi(1-\nu)\nu^{-1}h^{-1}\Sigma_{k_1, k_2}^{11}$ ,  $I_{k_1, k_2}^{12} = 2\pi(1-\nu)\nu^{-1}h^{-1}\Lambda_{k_1, k_2}^{12}$ . При этом учтено, что  $I_{k_1, k_2}^{11} = I_{k_2, k_1}^{11}$ ,  $I_{k_1, k_2}^{12} = I_{k_1 k_2}^{21} = I_{k_2 k_1}^{12}$ ,  $I_{0i} = 0$ . Верхние числа в клетках таблицы вычислены по асимптотике при  $N=3$ , нижние —

по точным формулам (3.8) с абсолютной погрешностью  $\leq 10^{-5}$ . Значения  $\Lambda_{k_1, k_2}$  были вычислены ранее<sup>2</sup> и приводятся в [13]. Данные, приведенные в таблицах, показывают, что уже при небольших значениях  $k_1, k_2$  асимптотические формулы весьма точны. Таким образом, при формировании матрицы системы (3.3) основную часть коэф-

<sup>1</sup> Оценка остаточного члена проводится так же, как и в рассмотренном ранее скалярном случае.

<sup>2</sup> См. подстрочное примечание на стр. 112.

Таблица 1

$h_2/h_1$	0	1	2	3	4	5
0	0.462500	0.174936	0.024961 0.022373	0.006299 0.006155	0.002569 0.002541	0.001299 0.001316
1	-0.146669	-0.037554	0.005895 0.006054	0.003677 0.003714	0.001920 0.001934	0.001081 0.001070
2	-0.060455 -0.057983	-0.026888 -0.0284400	-0.004325 -0.004453	0.000183 0.000185	0.000711 0.000712	0.000603 0.000605
3	-0.013396 -0.013327	-0.009602 -0.009647	-0.004018 -0.004057	-0.001136 -0.001145	-0.000124 -0.000124	0.000161 0.000162
4	-0.005315 -0.005302	-0.004410 -0.004414	-0.002634 -0.002642	-0.001231 -0.001234	-0.000461 -0.000462	-0.000111 -0.000110
5	-0.002654 -0.002676	-0.002355 -0.002366	-0.001677 -0.001678	-0.001001 -0.000998	-0.000518 -0.000517	-0.000232 -0.000234

Таблица 2

$h_2/h_1$	0	1	2	3	4	5
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	0.0 0.0	0.123107	0.021027 0.021315	0.004932 0.004934	0.001682 0.001682	0.000714 0.000713
2	0.0		0.012059 0.012124	0.005055 0.005057	0.002231 0.002231	0.001085 0.001085
3	0.0			0.003292 0.003292	0.001900 0.001900	0.001090 0.001090
4	0.0				0.001356 0.001356	0.000906 0.000906
5	0.0					0.000687 0.000687

коэффициентов можно вычислять по асимптотическим формулам. Обратим внимание на то, что найденные значения коэффициентов  $\Lambda_{p-q}^{hi}$  можно использовать при решении задачи независимо от того, какова область трещины  $G$ , поскольку последние с ее видом не связаны.

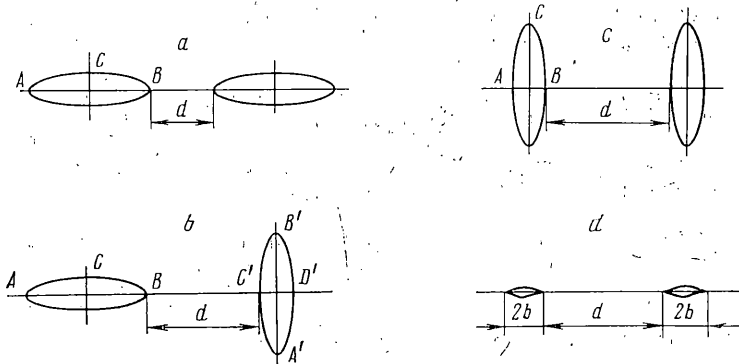
Представление (3.2) приближенного решения не учитывает асимптотического поведения скачков смещений вблизи контура  $\Gamma$  трещины. Поэтому найденное в результате решения систем (3.3), (3.4) приближенное решение  $u_h$  в ближайших к  $\Gamma$  слоях сеточной области  $G_h$  нужно перестраивать с учетом асимптотики, что позволяет сразу определять коэффициенты интенсивности напряжений вдоль контура трещины<sup>1</sup>.

Отметим, что при выбранной системе координатных функций сгущение сетки (например, переход в некоторой подобласти области  $G_h$  от шага  $h$  к шагу  $h_1 = h/2$ )

<sup>1</sup> Подобная процедура предусматривает наряду с использованием равномерной сетки, как в п. 3.1, также и проведение ее сгущения вблизи контура трещины (см. подстрочное примечание к стр. 112).

не вызывает затруднений, поскольку функции  $\psi_{p_1 p_2}(x, h)$ , заданные на квадрате  $g_{p_1 p_2}^{2h}$ , представляются в виде линейной комбинации аналогичных функций  $\psi_{p_1 p_2}(x, h/2)$ , заданных на  $g_{p_1 p_2}^h$  квадратах, и соответствующие коэффициенты систем линейных алгебраических уравнений получают путем пересчета вычисленных для равномерной сетки коэффициентов.

3.2. В качестве примера применения вариационно-разностного метода рассмотрим задачу о двух эллиптических трещинах нормального разрыва, расположенных в одной плоскости. В этом случае  $b_1=b_2=0$ ,  $b_3 \neq 0$ . Цель расчетов заключалась в том, чтобы проследить за изменением коэффициента интенсивности напряжений вдоль контура одной из трещин при различном их взаимном удалении и ориентации. При-



ведем результаты, относящиеся к случаю двух одинаковых эллипсов с полуосями  $b=0.7$ ,  $a=1.3$  при однородном растяжении.

Рассматривались три случая взаимной ориентации эллипсов — большие оси: компланарны (a), параллельны (c), перпендикулярны (b) (см. фигуру, a—c). Параметр  $d$  (наименьшее расстояние между точками контуров эллипсов) принимался равным 0.2, 0.4, 0.6, 0.7. Во всех случаях с учетом проведенных ранее расчетов шаг крупной сетки выбирался равным  $h=1/10$ , а сетки со сгущением  $h_1=h/2=1/20$ . Сгущение проводилось в четырех ближайших к контуру трещины слоях крупной сетки. На каждой трещине помещалось по 751 узлу. Система линейных алгебраических уравнений решалась методом Зайделя с переходом на метод верхней релаксации. Первые несколько итераций делались по методу Зайделя, затем подсчитывался параметр релаксации  $\tau$  в соответствии с общей схемой [20] и последующие итерации до достижения заданной точности проводились по методу верхней релаксации. Точность решения оценивалась по параметру

$$d_n = \max |(b_3^h)^{(n+1)} - (b_3^h)^{(n)}| \quad (p_1, p_2) \in N(h)$$

где  $n$  — номер итерации. Обычно за 12—15 итераций достигалась точность  $d_n \leq 10^{-4} d_0$ . Расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-6.

Ниже приведены значения коэффициента интенсивности напряжений в концах малой и большой осей эллипса при единичной интенсивности нагрузок для каждого из случаев и дано сравнение с соответствующими величинами для одиночной эллиптической трещины с теми же полуосями, для которой коэффициенты интенсивности в конце малой и большой осей равны  $N_b=0.48$ ,  $N_a=0.352$  соответственно.

$d$	$N_B$	$\frac{\Delta N_B}{N_B} \%$	$N_A$	$\frac{\Delta N_A}{N_A} \%$	$N_C$	$\frac{\Delta N_C}{N_C} \%$
0.7	0.361	2.5	0.352	0	0.484	0.8
0.4	0.379	4.6	0.353	0.3	0.485	1.0
0.2	0.384	8.3	0.354	0.6	0.486	1.2

$d$	$N_B$	$\frac{\Delta N_B}{N_B} \%$	$N_A$	$\frac{\Delta N_A}{N_A} \%$	$N_C$	$\frac{\Delta N_C}{N_C} \%$	$N_{C'}$	$\frac{\Delta N_{C'}}{N_{C'}} \%$	$N_{B'}$	$\frac{\Delta N_{B'}}{N_{B'}} \%$
0.6	0.371	5.1	0.353	0.28	0.486	1.23	0.495	3.12	0.356	1.14
0.4	0.383	8.1	0.354	0.42	0.488	1.64	0.503	4.8	0.357	1.4
0.2	0.411	14.4	0.354	0.42	0.490	2.03	0.522	9.1	0.358	1.67

$d$	$N_B$	$\frac{\Delta N_B}{N_B} \%$	$N_A$	$\frac{\Delta N_A}{N_A} \%$	$N_C$	$\frac{\Delta N_C}{N_C} \%$
0.6	0.505	5	0.488	1.64	0.358	1.67
0.4	0.521	7.8	0.490	2.03	0.361	2.5
0.2	0.558	14	0.495	3.02	0.364	3.3

Приведенные результаты показывают, что наиболее сильное взаимное влияние трещин имеет место в том случае (с), когда большие оси эллипсов параллельны. В этом случае проводилось сравнение коэффициентов интенсивности в концах малой оси с решением плоской задачи о двух прямолинейных трещинах одинаковой длины  $2b$ , расположенных на одной прямой, при том же, что и в исходной задаче, их взаимном удалении  $d$  (см фигуру,  $d$ ). Приводим результаты сравнения.

$d$	$N_B$	$\frac{\Delta N_B}{N_B} \%$	$N_A$	$\frac{\Delta N_A}{N_A} \%$
0.6	0.505	34.6	0.488	29
0.4	0.521	38	0.490	32.5
0.2	0.558	43.5	0.495	34.7

Значения коэффициентов интенсивности  $N$  для плоской задачи взяты из [21]. Плоская задача соответствует двум пространственным трещинам в виде полос шириной  $2b$ , объемлющих исходные эллипсы, и поэтому, естественно, дает существенно завышенное значение коэффициента интенсивности.

Следует отметить, что взаимодействие трещин, расположенных в одной плоскости, выражено довольно слабо. Поэтому в тех случаях, когда трещины не очень сближены, их можно рассматривать независимо. В [14] предложена приближенная методика учета взаимодействия эллиптических трещин. Оказывается, что значения  $N_B$  в случае (b), приведенные в [14] (на фиг. 4), для рассматриваемого отношения  $b/a=0.55$  не более чем на 2-4% отличаются от приведенных здесь.

Пользуясь установленным ранее принципом сравнения для коэффициента интенсивности напряжений на контуре трещины нормального разрыва [11] (см., п. 2.1), можно следующим способом учесть взаимодействие трещин, ограниченных выпуклыми контурами произвольной формы.

Выберем наиболее близко расположенные одна к другой точки  $A \in \Gamma$ ,  $A' \in \Gamma'$ . В этих точках взаимное влияние наиболее сильно. Для его оценки рассмотрим задачу об одиночных трещинах  $G$ ,  $G'$  при тех же нагрузках и вычислим  $N_A^0$ ,  $N_{A'}^0$ , а также рассмотрим плоскую задачу о двух прямолинейных трещинах, ближайшие концы которых совпадают с  $A$  и  $A'$ , а сами трещины представляют собой сечения по  $AA'$  полос, объемлющих  $G$  и  $G'$ , и пусть  $N_{A^p}$ ,  $N_{A'^p}$  — соответствующие значения коэффициента интенсивности. Тогда, согласно принципу сравнения, справедливы

неравенства  $N_{A,A'}^0 \leq N_{A,A'}^p \leq N_{A,A'}^p$ . Отметим, что рассчитанные значения удовлетворяют этим неравенствам. Если в качестве приближенного значения  $N$  взять полусумму

$N_{A,A'}^* = (N_{A,A'}^0 + N_{A,A'}^p)/2$ , то она отличается от истинного не более чем на 15% во всех рассмотренных случаях.

Автор благодарит М. Л. Холмянского за полезные замечания к п. 1 работы; В. Ф. Ланцберга — за помощь в проведении расчетов к п. 3.

Поступила 14 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Willis J. R. The penny-shaped crack on an interface. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1972, vol. 25, pt. 3.
2. Кур Г. С., Хай М. В. Интегральные уравнения пространственных задач термоупругости для тел с трещинами. Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 12.
3. Bui H. D. An integral equations method for solving the problem of a plane crack of arbitrary shape. J. Mech. and Phys. Solids, 1977, vol. 25, No. 1.
4. Weaver J. Three-dimensional crack analysis. Internat. J. Solids and Structures, 1977, vol. 13, No. 4.
5. Перлин П. И., Самаров В. Н. Применение теории обобщенного потенциала к решению пространственных задач теории упругости для тел с разрезами и оценке хрупкого разрушения конструкций сложной формы. Изв. АН КазССР. Сер. физ., матем., 1974, № 5.
6. Шляпоберский Я. В. Асимптотическое решение пространственной задачи о равновесии упругого тела с разрезом. ПММ, 1978, т. 42, вып. 3.

7. Салганик Р. Л. Механика тел с большим числом трещин. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.
8. Моссаковский В. И. Применение теоремы взаимности к определению суммарных сил и моментов в пространственных контактных задачах. ПММ, 1953, т. 17, вып. 4.
9. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
10. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.
11. Гольдштейн Р. В., Ентов В. М. Вариационные оценки для коэффициента интенсивности напряжений на контуре плоской трещины нормального разрыва. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3.
12. Goldstein R. V., Entov V. M. Variational bounds and qualitative methods in fracture mechanics. Internat. Conf. on Fracture 4th, Canada, 1977, vol. 4, New York e. a., Pergamon Press, 1978.
13. Гольдштейн Р. В. К вопросу о применении метода граничных интегральных уравнений для решения задач механики сплошных сред. В кн.: Метод граничных интегральных уравнений. Механика. Новое в зарубежной науке, вып. 15. М., «Мир», 1978, стр. 183-209.
14. Kobayashi A. S., Ziv M., Hall L. R. Approximate stress intensity factor for an embedded elliptical crack near two parallel free surfaces. Internat. J. Fracture Mech., 1965 vol. 1, No. 2.
15. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М., «Наука», 1973.
16. Билби Б., Эшелби Дж. Дислокации и теория разрушения. В кн.: Разрушение, т. 1. М., «Мир», 1973, стр. 112-203.
17. P. de Virg. Континуальная теория стационарных дислокаций. В кн.: Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М., Изд-во иностр. лит., 1963, стр. 175-229.
18. Cruse T. A. An improved boundary-integral equation method for three-dimensional elastic stress analysis. Computers and Structures, 1974, vol. 4, No. 4.
19. Cruse T. A. Numerical solutions in three dimensional elastostatics. Internat. J. Solids and Structures, 1969, vol. 5, No. 12.
20. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М., «Наука», 1973.
21. Панасюк В. В., Севрук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев, «Наукова думка», 1976.