МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1979

УДК 539.376

О ПОСТРОЕНИИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

И. Ю. ЦВЕЛОДУБ

(Новосибирск)

Считая справедливой гипотезу об устойчивости среды в малом, получены ограничения на формы связи инвариантов тензоров напряжений и скоростей деформаций ползучести. В частности, показано, что в определяющие уравнения несжимаемой среды первый инвариант тензора напряжений входить не должен. Рассмотрены возможности использования ассоциированных и неассоциированных законов течения в теории установившейся ползучести и примыкающие к ним вопросы о выпуклости поверхности постоянной мощности диссипации и устойчивости в малом.

Выполнение постулата устойчивости в малом является достаточным (но не необходимым) условием для единственности решения краевых задач установившейся ползучести. Приводится простейший пример, когда невыполнение этого постулата влечет неединственность решения.

1. При построении определяющих уравнений установившейся ползучести для изотропных сред исходят из предположения, что компоненты скоростей деформаций зависят только от компонент напряжений и скалярных характеристик материала [1]. Следовательно, тензор скоростей деформаций ползучести есть изотропная тензорная функция тензора напряжений и имеет место представление [2, 3]:

$$\eta_{kl}=\frac{1}{3}I_\eta\frac{\partial I_\sigma}{\partial\sigma_{kl}}+W^\circ\left(\frac{1}{\sigma_i}\frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{kl}}-\operatorname{tg}\omega\frac{\partial\xi}{\partial\sigma_{kl}}\right)\quad (k,l=1,2,3) \tag{1.1}$$

$$I_\eta=I_\eta(\sigma_i,\ \xi,\ I_\sigma),\ W^\circ=W^\circ(\sigma_i,\ \xi,\ I_\sigma),\ \omega=\omega(\sigma_i,\ \xi,\ I_\sigma)$$

$$I_\sigma=\sigma_{nn},\ I_\eta=\eta_{nn},\ \sigma_i=({}^3/{}_2\sigma_{kl}{}^\circ\sigma_{kl}{}^\circ)^{1/2},\ \sigma_{kl}{}^\circ=\sigma_{kl}-{}^1/{}_3I_\sigma\delta_{kl}$$

$$\xi=-\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{9}{2}\frac{\sigma_{kn}{}^\circ\sigma_{nl}{}^\circ\sigma_{kl}{}^\circ}{\sigma_i{}^3}\right),\ W^\circ=\sigma_{kl}\eta_{kl}{}^\circ,\ \eta_{kl}{}^\circ=\eta_{kl}-\frac{1}{3}I_\eta\delta_{kl},\ \omega=\xi-\psi$$

$$\psi=-\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{4}{3}\frac{\eta_{kn}{}^\circ\eta_{nl}{}^\circ\eta_{kl}{}^\circ}{\eta_i{}^3}\right),\quad \eta_i=\left(\frac{2}{3}\eta_{kl}{}^\circ\eta_{kl}{}^\circ\right)^{1/2}$$

где σ_{kl}, η_{kl} — компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций; σ_i, η_i — интенсивности; ξ, ψ — углы вида; I_σ, I_η — первые инварианты вышеуказанных тензоров; W° — удельная мощность деформации формоизменения; ω — фаза подобия девиаторов [4].

Формула (1.1) является градиентальным эквивалентом известного соотношения В. В. Новожилова для двух соосных симметричных тензоров второго ранга [4] и некоторым видоизменением аналогичного представления в [5].

Как видно из (1.1), в общем случае связь между тензорами напряжений и скоростей деформаций тензорно-нелинейна. Наиболее распространенные теории ползучести обычно базируются на предположении о тензорно-линейной связи между σ_{kl} и η_{kl}, что приводит к подобию девиаторов этих тензоров или к равенству углов вида ($\omega=0$); среда при этом считается пластически несжимаемой, т. е. $I_\eta=0$, а интенсивность скоростей деформаций η_i является функцией только интенсивности напряжений σ_i.

Однако описание по этим зависимостям поведения сложных сред, например, таких, у которых свойства при растяжении и сжатии существенно различны, дает неудовлетворительные результаты [2]. В связи с этим в последнее время появился ряд работ, в которых предлагается учесть влияние на процесс ползучести либо вида напряженного состояния [1, 2, 6–8], либо первого инварианта тензора напряжений [9–11], либо обоих этих факторов [12–15]. При этом авторы остаются в рамках гипотезы пластической несжимаемости. Если исходить из гипотезы существования потенциала скоростей деформаций ползучести $\Phi=\Phi(\sigma_i, \xi, I_\sigma)$, такого, что $\eta_{kl}=\partial\Phi/\partial\sigma_{kl}$ [1, 2, 7, 8], то условие несжимаемости приводит к тому, что Φ не может зависеть от I_σ и его аргументами могут быть только инварианты девиатора напряжений, т. е. σ_i и ξ [1].

Однако справедливость указанной выше гипотезы не вытекает из законов термодинамики и не имеет достаточно надежного механического обоснования [1, 16]. Если же для описания процесса установившейся ползучести использовать непотенциальные зависимости между тензорами скоростей деформаций и напряжений [6, 9, 12–14], то неясно, какому из инвариантов, ξ или I_σ, следует отдать предпочтение при построении определяющих уравнений.

Исследуем процесс установившейся ползучести, не зависящий от истории нагружения, когда связь между тензорами напряжений и скоростей деформаций дается соотношениями (1.1). Считаем, что среда устойчива в малом [1, 3, 17], и выясним какие ограничения накладывает неравенство $\delta\sigma_{kl}\delta\eta_{kl}\geqslant 0$ на функции $W^\circ=W^\circ(\sigma_i, \xi, I_\sigma)$, $\omega=\omega(\sigma_i, \xi, I_\sigma)$ и $I_\eta=I_\eta(\sigma_i, \xi, I_\sigma)$. Предполагая последние дифференцируемыми по всем своим аргументам в некоторой области пространства инвариантов σ_i, ξ и I_σ.

Для случая несжимаемой среды и в предположении независимости W° и ω от I_σ этот вопрос изучался в [3]. Проводя выкладки, аналогичные изложенным в [3], можно показать, что требование устойчивости в малом эквивалентно требованию неотрицательности квадратичной формы

$$a_{ij}\delta x_i\delta x_j,\quad x_1=\sigma_i,\quad x_2=\xi,\quad x_3=I_\sigma,\quad a_{11}=\frac{1}{\sigma_i}\frac{\partial W^\circ}{\partial\sigma_i}-\frac{W^\circ}{\sigma_i^2},$$

$$a_{22}=W^\circ-\operatorname{tg}\omega\frac{\partial W^\circ}{\partial\xi}-\frac{W^\circ}{\cos^2\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\xi},\quad a_{33}=\frac{1}{3}\frac{\partial I_\eta}{\partial I_\sigma},\tag{1.2}$$

$$a_{12}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma_i}\frac{\partial W^\circ}{\partial\xi}-\operatorname{tg}\omega\frac{\partial W^\circ}{\partial\sigma_i}-\frac{W^\circ}{\cos^2\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\sigma_i}+\frac{2W^\circ\operatorname{tg}\omega}{\sigma_i}\right]$$

$$a_{13}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma_i}\frac{\partial W^\circ}{\partial I_\sigma}+\frac{1}{3}\frac{\partial I_\eta}{\partial\sigma_i}\right]$$

$$a_{23}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\frac{\partial I_\eta}{\partial\xi}-\operatorname{tg}\omega\frac{\partial W^\circ}{\partial I_\sigma}-\frac{W^\circ}{\cos^2\omega}\frac{\partial\omega}{\partial I_\sigma}\right]$$

Для того чтобы указанная выше квадратичная форма была неотрицательной, необходимо и достаточно, чтобы были неотрицательны все главные миноры симметричной матрицы $\|a_{ij}\|$. Эти условия и дают ограничения на функции $W^\circ=W^\circ(\sigma_i, \xi, I_\sigma)$, $\omega=\omega(\sigma_i, \xi, I_\sigma)$, $I_\eta=I_\eta(\sigma_i, \xi, I_\sigma)$ и их производные.

Докажем следующее утверждение: для того чтобы устойчивая в малом среда была несжимаемой, необходимо и достаточно, чтобы инвариант I_σ не входил в число аргументов функций W°, ω и I_η.

Необходимость. Предположим, что среда устойчива и несжимаема. Тогда все главные миноры матрицы $\|a_{ij}\|$ должны быть неотрицательны. Но $a_{33}=0$, так как $I_\eta=0$, поэтому, в частности, должны иметь место неравенства: $-a_{13}^2\geqslant 0$ и $-a_{23}^2\geqslant 0$, что возможно только при $a_{13}=a_{23}=0$. Тогда из (1.2) следует, что $\partial W^\circ/\partial I_\sigma=\partial\omega/\partial I_\sigma=0$.

Достаточность. Предположим, что среда устойчива и инвариант I_σ не входит в число аргументов функций W°, ω и I_η, т. е. $\partial W^\circ/\partial I_\sigma=\partial\omega/\partial I_\sigma=\partial I_\eta/\partial I_\sigma=0$. Следовательно, $a_{33}=0$, тогда, как было показано выше, и $a_{13}=a_{23}=0$ и из (1.2) следует, что $\partial I_\eta/\partial\sigma_i=\partial I_\eta/\partial\xi=0$. Таким образом, все частные производные от I_η равны нулю, и I_η

может быть только константой. Очевидно, что при нулевых напряжениях ползучесть отсутствует, т. е. эта константа должна равняться нулю. Утверждение доказано.

Аналогично можно доказать, что если первый инвариант тензора напряжений влияет на процесс установившейся ползучести, то устойчивая в малом среда должна быть сжимаемой, и инвариант I_η должен зависеть по крайней мере от I_σ (чтобы $a_{33}\neq 0$).

(В литературе, например [18], приводятся экспериментальные данные о влиянии гидростатического давления на процессы ползучести. К сожалению, эти данные приведены при дискретных значениях I_σ и не исключено, что зависимость W° и ω от I_σ может носить не гладкий характер.)

Таким образом, для несжимаемой среды определяющие уравнения необходимо брать в виде: $W=W(\sigma_i, \xi)$ и $\omega=\omega(\sigma_i, \xi)$, где $W=\sigma_{kl}\eta_{kl}$ — диссипативная функция, совпадающая при $I_\eta=0$ с W°. Условия устойчивости такой среды имеют вид [3]:

$$a\geqslant 1,\quad 1-b\,\mathrm{tg}\,\omega-c/\cos^2\omega\geqslant 0 \tag{1.3}$$

$$(a-1)\,(1-c-d\,\mathrm{tg}\,\omega)-\frac{1}{4}\left(b\cos\omega+a\sin\omega-\frac{d}{\cos\omega}\right)^2\geqslant 0$$

$$a=\frac{\sigma_i}{W}\frac{\partial W}{\partial\sigma_i},\qquad b=\frac{1}{W}\frac{\partial W}{\partial\xi},\qquad c=\frac{\partial\omega}{\partial\xi},\qquad d=\sigma_i\frac{\partial\omega}{\partial\sigma_i}$$

При $a\neq 1$ второе неравенство вытекает из первого и третьего.

Некоторые ограничения, накладываемые условиями (1.3) на возможный вид функциональной связи $W=W(\sigma_i,\xi)$ и $\omega=\omega(\sigma_i, \xi)$ и на использование ассоциированных и неассоциированных законов течения, рассмотрены в [3].

2. Рассмотрим случай несжимаемой среды ($I_\eta=0$). Предположим, что $\omega=\omega(\xi)$, т. е. вид скоростей деформаций определяется только видом напряженного состояния и не зависит от уровня последнего. Соотношение (1.1) при этом примет вид [3]:

$$\eta_{kl}=\frac{W}{\Sigma}\frac{\partial\Sigma}{\partial\sigma_{kl}}\quad (k,l=1,2,3),\qquad \Sigma=\sigma_i e^{\gamma(\xi)}=\sigma_i f(\xi),\qquad \gamma(\xi)=-\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\mathrm{tg}\,\omega\,d\xi$$

В дальнейшем будем считать W однородной функцией компонент напряжений степени n, т. е. $W=B\Sigma_1^n$, $\Sigma_1=\sigma_i f_1(\xi)$, где n — натуральное число, большее единицы, $f_1>0$. Заметим, что в этом случае $a=n$ [3].

Для ассоциированного закона течения, когда вектор скоростей деформаций в пространстве напряжений ортогонален к поверхности $W=\mathrm{const}$, т. е. $f_1(\xi)=f(\xi)$, и существует потенциал скоростей деформаций $F=W/n$, из (1.3) при $n>1$ следует [3]: $c\leqslant 1$ или, как нетрудно показать

$$f_1(\xi)+f_1''(\xi)\geqslant 0 \tag{2.1}$$

В этом случае условие устойчивости эквивалентно условию выпуклости поверхностей $F=\mathrm{const}$ и $W=\mathrm{const}$ [1, 3], которые являются подобными. Однако из невыпуклости поверхности $W=\mathrm{const}$ не обязательно следует нарушение условия устойчивости. Действительно, в этом случае может быть использован неассоциированный закон течения, например, $\omega=0$, условие устойчивости для которого имеет вид [3]:

$$[f_1'(\xi)/f_1(\xi)]^2\leqslant 4(n-1)/n^2 \tag{2.2}$$

Чтобы это неравенство для n имело решение, необходимо, чтобы для любого $|\xi|\leqslant\pi/6$:

$$|f_1'(\xi)|\leqslant f_1(\xi) \tag{2.3}$$

Очевидно, что (2.1) может быть нарушено при каком-либо значении ξ в то время, как неравенство (2.3) будет выполнено при любом $|\xi|\leqslant\pi/6$. Однако, если в случае ассоциированного закона при выполнении (2.1) устойчивость будет иметь место при любом $n>1$, то для неассоциированного закона условие устойчивости будет выполнено только при

$$\frac{2}{1+\sqrt{1-M}}\leqslant n\leqslant\frac{2}{1-\sqrt{1-M}},\qquad M=\max_{|\xi|\leqslant\pi/6}\left[\frac{f_1'(\xi)}{f_1(\xi)}\right]^2 \tag{2.4}$$

как это следует из (2.2). Если при каком-либо значении ξ имеет место равенство $|f_1'|=f_1$, то n может быть равно только двум, что соответствует линейной связи между скоростями деформаций и напряжениями.

Выберем, например, $f_1(\xi)=(1-c_0\sin^2 3\xi)^{1/6}$ (см. [3]). Из (2.1) нетрудно получить оценку для константы c_0 в случае ассоциированного закона течения: $-1/2\leqslant c_0\leqslant 1/3$. В случае же неассоциированного закона при $\omega=0$ из (2.3) имеем: $-1<c_0\leqslant 2(\sqrt{2}-1)$. При этом, например, для $c_0=-1/2$ (или $1/3$) значения n, как это видно из (2.4), лежат в довольно широком интервале: $1<n<95$.

Приведем другой пример. В [2] для описания поведения при ползучести материалов с разными свойствами на растяжение, сжатие и сдвиг предложен ассоциированный закон течения: $f_1(\xi)=f(\xi)=1+\alpha\sin 3\xi+\beta\sin^2 3\xi$. Для материала АК4-1Т из экспериментов на одноосное растяжение — сжатие и чистый сдвиг при температуре 200° С были получены характеристики: $\alpha=-0.035$, $\beta=-0.09$, $n=9$, которые, как легко видеть, не удовлетворяют неравенствам, вытекающим из условия устойчивости [3], т. е. поверхность $W=\mathrm{const}$ не является выпуклой.

Тем не менее, расчеты по этим зависимостям скоростей деформаций ползучести при комбинациях растяжения (сжатия) с кручением достаточно удовлетворительно совпали с экспериментальными данными: относительная погрешность составляет примерно 20% по скоростям деформаций установившейся ползучести [2]. При этом в экспериментах наблюдалось сравнительно небольшое отклонение от подобия девиаторов. Это наводит на мысль положить $\omega=0$, оставив прежнее выражение для W, т. е. использовать неассоциированный закон течения. Расчеты, проведенные по этим зависимостям, оказались не хуже предыдущих, и условия устойчивости в этом случае будут выполненными. Таким образом, эти последние зависимости более надежны с физической (и, как будет показано в п. 3, с математической) точки зрения. Кроме того, очевидно, что расчеты по тензорно-линейным зависимостям проще, чем по тензорно-нелинейным.

3. В [1] показано, что если выполнено строгое неравенство $\delta\sigma_{kl}\delta\eta_{kl}>0$, то решение краевой задачи установившейся ползучести для односвязного тела, на одной части поверхности которого заданы скорости перемещений, а на остальной — поверхностные нагрузки, и подвергнутого действию массовых сил, будет единственно в малом. С другой стороны, в [19] доказано, что если функции $\eta_{kl}=\eta_{kl}(\sigma_{ij})$ дифференцируемы, то из приведенного выше неравенства следует неравенство для конечных разностей $(\overset{(1)}{\sigma}_{kl}-\overset{(2)}{\sigma}_{kl})(\overset{(1)}{\eta}_{kl}-\overset{(2)}{\eta}_{kl})>0$, где $\overset{(1)}{\sigma}_{kl}$, $\overset{(2)}{\sigma}_{kl}$ — два произвольных тензора напряжений, а $\overset{(1)}{\eta}_{kl}$, $\overset{(2)}{\eta}_{kl}$ — соответствующие им тензоры скоростей деформаций, обеспечивающие (это нетрудно показать, используя уравнение виртуальных работ [20]) единственность решения той же задачи в большом.

Таким образом, выполнение постулата устойчивости в малом является достаточным (но не необходимым) условием для единственности решения краевых задач. Однако можно привести простой пример, когда невыполнение постулата влечет неединственность решения.

Рассмотрим задачу об установившейся ползучести толстостенной трубы с внутренним и внешним радиусами R_1 и R_2, подверженной действию постоянного внутреннего давления P и неизвестного внешнего давления, в случае плоской деформации ($\eta_z=0$). Будем считать, что на внешней поверхности задана скорость радиального перемещения: $u(R_2)=u_0$. Если поведение материала трубы описывается ассоциированным законом течения типа Мизеса: $W=B\sigma_i^n$, $\omega=0$, то решение этой задачи единственно, и напряжения σ_r, σ_φ, σ_z и скорость перемещения u могут быть выписаны в явном виде как функции радиуса r аналогично тому, как это сделано в [1]. Здесь индексы r, φ и z относятся к радиальному, окружному и осевому направлениям, которые для такого вида нагружения являются главными.

Покажем, что и в общем случае для несжимаемого материала при выполнении строгого неравенства в условии устойчивости решение этой задачи будет единственным. Заметим, что приведенные выше замечания о единственности решения неприменимы в этом случае, так как труба не является односвязным телом.

Из условий плоской деформации и несжимаемости следует, что $\eta_r=-\eta_\varphi=-c_1/r^2$, $u=c_1/r$. Константу c_1 находим из граничного условия для $u(c_1=u_0R_2)$.

Определим угол вида и интенсивность скоростей деформаций [3, 4] ($\operatorname{tg}\psi=0$, т. е. $\psi=0$):

$$\eta_i=\frac{\eta_\varphi}{\sin(\psi+{}^2/_3\pi)}=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{u_0R_2}{r^2} \tag{3.1}$$

Покажем, что, зная η_i и ψ, при выполнении постулата устойчивости можно однозначно определить $\sigma_i=\sigma_i(\eta_i,\psi)$ и $\xi=\xi(\eta_i,\psi)$. Для этого рассмотрим якобиан $J=\partial(\eta_i,\psi)/\partial(\sigma_i,\xi)$. Используя соотношения: $\eta_i=W/\sigma_i\cos\omega$, $\psi=\xi-\omega$ [3], можно показать, что в обозначениях п. 1:

$$J=(\eta_i/\sigma_i)[(a-1)(1-c)+d\operatorname{tg}\omega+bd]$$

Используя третье неравенство (1.3) (в данном случае строгое), легко получить, что

$$J>\frac{\eta_i}{4\sigma_i}\left(b\cos\omega+a\sin\omega+\frac{d}{\cos\omega}\right)^2\geqslant 0$$

Следовательно, равенства $\eta_i(\sigma_i,\xi)=(2/\sqrt{3})(u_0R_2/r^2)$ и $\psi(\sigma_i,\xi)=0$ определяют однозначные дифференцируемые функции: $\sigma_i=\sigma_i(r)$ и $\xi=\xi(r)$, подставляя которые в уравнение равновесия [1] и используя представление главных значений тензора напряжений через его инварианты [4] и граничное условие $(\sigma_r(R_1)=-P)$, можно однозначно определить

$$\sigma_r(r)=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\limits_{R_1}^{r}\frac{\sigma_i(r)\cos\xi(r)}{r}dr-P \tag{3.2}$$

По известным значениям σ_i, ξ и σ_r однозначно определяются σ_φ и σ_z [4].

Рассмотрим случай, когда материал трубы подчиняется ассоциированному закону течения Прагера — Друккера [3]:

$$W=B\sigma_i^n(1-c_0\sin^2 3\xi)^{n/6},\quad \operatorname{tg}\omega=-\frac{1}{\sigma_i}\frac{\partial W/\partial\xi}{\partial W/\partial\sigma_i}=\frac{c_0\sin 3\xi\cos 3\xi}{1-c_0\sin^2 3\xi} \tag{3.3}$$

и покажем, что при $c_0>{}^1/_3$ (когда нарушается условие устойчивости) напряжения σ_r, σ_φ и σ_z определяются неоднозначно.

Так как $\psi=0$, то из (3.3) для ξ имеем уравнение

$$\operatorname{tg}\xi=(c_0\sin 3\xi\cos 3\xi)/(1-c_0\sin^2 3\xi)$$

которое для $^1/_3<c_0\leqslant 1$ имеет три корня, таких, что $|\xi|\leqslant\pi/6$:

$$\sin\xi=0,\quad \sin\xi=\pm\{(3c_0-1)/[5c_0+\sqrt{c_0(c_0+8)}]\}^{1/2} \tag{3.4}$$

Интенсивность напряжений $\sigma_i=\sigma_i(r)$ определяется из сравнения выражения (3.3) для W с $W=\sigma_i\eta_i\cos\omega$ [3] при $\omega=\xi$ с использованием (3.1)

$$\sigma_i=c_2r^{2/(1-n)},\qquad c_2=\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{u_0R_2\cos\xi}{B(1-c_0\sin^2 3\xi)^{n/6}}\right]^{1/(n-1)} \tag{3.5}$$

Подставляя (3.5) и (3.4) в (3.2), получим

$$\sigma_r=(1/\sqrt{3})c_2(1-n)\cos\xi\,(r^{2/(1-n)}-R_1^{2/(1-n)})-P \tag{3.6}$$

Из (3.4)–(3.6) легко найти, используя представление главных значений тензора напряжений через инварианты σ_i, ξ и I_σ, напряжения σ_φ и σ_z:

$$\sigma_\varphi=\sigma_r+(2/\sqrt{3})\sigma_i\cos\xi,\qquad \sigma_z=\sigma_r-(2/\sqrt{3})\sigma_i\cos(\xi+{}^2/_3\pi)$$

Как видно из приведенных выше зависимостей, напряжения σ_r, σ_φ и σ_z определяются неоднозначно за счет того, что ξ может принимать любое из трех значений (3.4). Неединственность решения появляется за счет нарушения условия устойчивости, т. е. за счет невыпуклости поверхности $W=\mathrm{const}$.

Приведенный пример достаточно наглядно показывает необходимость использования постулата устойчивости в малом при анализе определяющих уравнений, так как его невыполнение может привести к неединственности решения краевых задач.

Таким образом, если при описании процесса установившейся ползучести опираться на постулат устойчивости в малом, то в определяющие уравнения несжимаемой среды первый инвариант тензора напряжений входить не должен. Эксперименты на ползучесть обычно проводятся при плоском напряженном состоянии (растяжение – сжатие с кручением, действие внутреннего давления и осевого усилия в испытаниях тонкостенных цилиндрических образцов и т. д), когда тензор напряжений имеет только два независимых инварианта. Поэтому экспериментально трудно определить, какому из нечетных инвариантов (ξ или I_σ) следует отдать предпочтение в определяющих уравнениях. Приведенные выше результаты исследований для несжимаемой среды говорят в пользу инварианта ξ.

При конструировании определяющих уравнений возможно при некоторых ограничениях на характеристики материала использование как ассоциированных, так и неассоциированных законов течения. В частности, если в экспериментах наблюдается небольшое отклонение от подобия девиаторов, то можно использовать тензорно-линейные соотношения, т. е. полагать $\omega=0$, а все особенности поведения материала описать путем подходящего выбора аргумента диссипативной функции W. При этом поверхность $W=\mathrm{const}$ в пространстве напряжений может быть невыпуклой, однако условие устойчивости не нарушено.

Постулат устойчивости в малом является достаточным условием для единственности решения краевых задач установившейся ползучести. Его невыполнение может вызвать неединственность решения некоторых частных задач.

Автор благодарит О. В. Соснина и А. Ф. Никитенко за постоянное внимание к работе.

Поступила 22 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
2. *Цвелодуб И. Ю.* О некоторых подходах к описанию установившейся ползучести в сложных средах. В сб.: Динамика сплошной среды, вып. 25. Новосибирск, 1976 (Ин-т гидродинамики СО АН СССР).
3. *Цвелодуб И. Ю.* Устойчивость в малом и ее приложения к исследованию определяющих уравнений ползучести. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 2.

4. *Новожилов В. В.* О принципах обработки результатов статических испытаний изотропных материалов. ПММ, 1951, т. 15, вып. 6.
5. *Черных К. Ф.* О функциональных связях между соосными симметричными тензорами второго ранга. В сб.: Проблемы механики твердого деформируемого тела. Л., «Судостроение», 1970.
6. *Berman I., Pai D. H.* A theory of anisotropic steady-state creep. Internat. J. Mech. Sci., 1966, vol. 8, No. 5.
7. *Никитенко А. Ф.* О влиянии третьего инварианта девиатора напряжений на ползучесть неупрочняющихся материалов. ПМТФ, 1969, No. 5.
8. *Murakami S., Yamada Y.* Effects of third invariant of deviatoric stress tensor on transient creep of thick-walled tubes. Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Engng, 1974, vol. 96, No. 3. (Рус. перев.: Теоретические основы инженерных расчетов, 1974, № 3.)
9. *Вялов С. С.* Прочность и ползучесть материалов, неодинаково сопротивляющихся сжатию и растяжению. В сб.: Реологические вопросы механики горных пород. Алма-Ата, Изд-во АН КазССР, 1964.
10. *Соснин О. В.* О ползучести материалов с разными характеристиками на растяжение и сжатие. ПМТФ, 1970, № 5.
11. *Малинин Н. Н., Хажинский Г. М.* Влияние шарового тензора напряжений на ползучесть металлов. В сб.: Механика деформируемых тел и конструкций. М., «Машиностроение», 1975.
12. *Marin J., Pao J. H.* A theory for combined creep strain—stress relations for materials with different properties in tension and compression. Proc. 1st U.S. National Congress of Appl. Mech. Chicago, 1951. New York, ASME, 1952.
13. *Горев Б. В., Никитенко А. Ф.* К ползучести материалов с разными характеристиками на растяжение и сжатие. В сб.: Динамика сплошной среды, вып. 6. Новосибирск, 1970 (Ин-т гидродинамики СО АН СССР).
14. *Цвелодуб И. Ю.* О ползучести материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие. В сб.: Динамика сплошной среды, вып. 19–20. Новосибирск, 1974 (Ин-т гидродинамики СО АН СССР).
15. *Бойков В. Н., Лазаренко Э. С.* Кратковременная ползучесть материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению. Изв. вузов. Машиностроение, 1976, № 11.
16. *Rice J. R.* On the structure of stress-strain relations for time-dependent plastic deformation in metals. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1970, vol. 37, No. 3. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E., 1970, № 3.)
17. *Drucker D. C.* On the postulate of stability of material in the mechanics of continua. Докл. 2 Всес. съезда по теор. и прикл. механ. М., «Наука», 1964. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1964, № 3.)
18. *Ohnami Masateru.* Study on plasticity and fracture laws of polycristalline metals at elevated temperatures. Specially on influence of both hydrostatic stress and strain history on creep and fracture. In: Déform. et rupture solid. soumis sollicit. pluriax. Colloq. int., Cannes, 1972, vol. 2. Paris, 1973.
19. *Черных К. Ф.* О постулате устойчивости анизотропного материала. В сб.: Избранные проблемы прикладной механики. М., ВИНИТИ, 1974.
20. *Drucker D. C.* A definition of stable inelastic material. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1959, vol. 26, No. 1. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1960, № 2.)