

ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛОСКОСТИ  
С ОСТРОКОНЕЧНЫМ ОТВЕРСТИЕМ И ТРЕЩИНОЙ

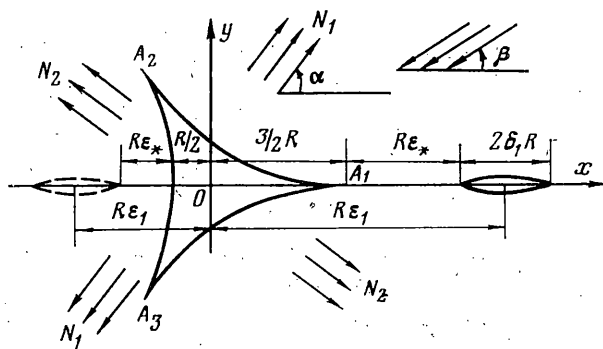
Г. С. КИТ, М. Г. КРИВЦУН

(Львов)

В [1] получены интегральные уравнения задачи термоупругости для плоскости с криволинейными отверстием и трещинами. В [2, 3] исследовано взаимодействие трещины с эллиптическим отверстием.

В данной работе решена задача о термоупругом и предельно равновесном состоянии плоскости с остроконечным отверстием и трещиной.

1. Рассмотрим упругую изотропную плоскость комплексной переменной  $z = x + iy$  с отверстием в виде гипоциклоиды с тремя вершинами  $A_j$  ( $j = 1, 3$ ) и трещиной, расположенной на одной из осей симметрии отверстия (фиг. 1). Определим напряженное состояние такой плоскости, когда она при стационарной температуре  $T(x, y)$  нагружена внешними усилиями.



Фиг. 1

Предполагается, что на берегах трещины заданы самоуравновешенные нормальные и касательные напряжения

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \psi(x), \quad x \in [a_1, b_1] \quad (1.1)$$

При решении задачи воспользуемся преобразованием

$$z = \omega(\zeta) = R(\zeta + 1/2\zeta^2) \quad (1.2)$$

при помощи которого внешность единичной окружности в плоскости  $\zeta = \xi + i\eta$  конформно отображается на внешность гипоциклоиды в плоскости  $z$ . При этом отрезку  $[a_1, b_1]$  оси  $Ox$  в преобразованной плоскости соответствует отрезок  $[a, b]$  оси  $O\xi$ , а вершинам гипоциклоиды соответствуют точки единичной окружности  $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_{2,3} = -1/2(1 \mp i\sqrt{3})$ .

Пусть температурное поле в преобразованной области описывается соотношением

$$T(\xi, \eta) = 2 \operatorname{Re} F(\xi), F(\xi) = F_0(\xi) + \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \gamma(t) \left[ \frac{1}{t-\xi} + M(t, \xi) \right] dt \quad (1.3)$$

где  $F_0(\xi)$  — комплексный потенциал температурного поля в плоскости с отверстием без трещины<sup>1</sup> (область  $|\xi| \geq 1$  обозначим через  $D$ );  $M(t, \xi)$  — ядро, вид которого зависит от характера граничного условия на контуре отверстия;  $\gamma(t)$  — неизвестная функция, которая определяется из заданных на трещине граничных условий и на концах трещины обращается в нуль:  $\gamma(a) = \gamma(b) = 0$ .

Решение задачи термоупругости ищем в виде [1]:

$$\begin{aligned} \omega'(\xi) \Phi(\xi) &= \omega'(\xi) \Phi_0(\xi) - H \left( \frac{\Gamma_1}{\xi} + \frac{\bar{\Gamma}_1}{2\xi^2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \left[ g'(t) \left( \frac{1}{t-\xi} + \frac{t}{t\xi-1} \right) - \overline{g'(t)} \frac{B(t)}{(t\xi-1)^2} \right] dt \\ B(t) &= \frac{t}{2} \left[ 2-t - \frac{3}{w(t)} \right], \quad w(t) = t^2 + t + 1 \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $\Phi_0(\xi)$  — комплексный потенциал Колосова — Мухелишвили, обусловленный силовой нагрузкой в области  $D$ ,  $\Gamma_1$  — вычет функции  $F(\xi)$  в точке  $\xi=0$ .

Неизвестная функция  $g'(t)$  определяется из сингулярного интегрального уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_a^b g'(t) \frac{dt}{t-t_0} + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_a^b [g'(t) K_1(t, t_0) + \overline{g'(t)} K_2(t, t_0)] dt = \psi_*(t_0), \quad t_0 \in [a, b] \\ K_1(t, t_0) &= \frac{1}{\Delta} \left\{ 2t + \frac{B(t)}{\Delta} \left[ \frac{2tB(t_0)}{\Delta} - B'(t_0) \right] \right\} \\ K_2(t, t_0) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{w(t)w(t_0)} \left[ \frac{1+tt_0+2tt_0}{w(t_0)} - t \right] - 1 \right\} + \\ &+ \frac{1}{\Delta} \left[ tB'(t_0) - \frac{B(t)+t^2B(t_0)}{\Delta} \right], \quad \psi_*(t) = \omega'(t) \psi(t) - \psi_0(t) + \\ &+ HR \left[ \frac{2\Gamma_1}{t} + \frac{\bar{\Gamma}_1}{2} \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right) + B'(t) \left( \frac{\bar{\Gamma}_1}{t} + \frac{\Gamma_1}{2t^2} \right) - \frac{B(t)}{t^2} \left( \bar{\Gamma}_1 + \frac{\Gamma_1}{t} \right) \right] \\ \Delta &= tt_0 - 1, \quad \psi_0(t) = \omega'(t) (\sigma_{yy}^\circ - i\sigma_{xy}^\circ) \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $\sigma_{yy}^\circ$ ,  $\sigma_{xy}^\circ$  — напряжения в области  $D$  на линии трещины от заданной вне трещины силовой нагрузки.

<sup>1</sup> Функция  $F_0(\xi)$  предполагается голоморфной в области  $D$ . Если же температурное поле в этой области имеет особенности типа тепловых источников и диполей, то соответствующий им комплексный потенциал Колосова — Мухелишвили можно присоединить к функции  $\Phi_0(\xi)$ .

Решение уравнения (1.5) должно удовлетворять условию непрерывности смещений в вершинах трещины

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b g'(t) dt = H\Gamma_2, \quad \Gamma_2 = \frac{1}{\pi i} \int_a^b \omega(t) \gamma'(t) dt \quad (1.6)$$

2. В качестве примера силовой нагрузки рассмотрим случай, когда отверстие свободно от внешних усилий,  $\psi(x) = N - iT = \text{const}$ , а на бесконечности заданы главные значения напряжения  $N_1 = p$ ,  $N_2 = \lambda p$ . Угол между осью  $Ox$  и усилиями  $N_1$  обозначим через  $\alpha$ . Тогда функции  $\omega'(\zeta)$ ,  $\Phi(\zeta)$  и  $\psi_0(t)$  определяются по формулам [4]:

$$\begin{aligned} \omega'(\zeta) \Phi_0(\zeta) &= pR \left[ \frac{1+\lambda}{4} \left( 1 + \frac{1}{\zeta^3} \right) - \frac{1-\lambda}{2\zeta^2} \exp(2i\alpha) \right] \\ \psi_0(t) &= pR \left\{ \frac{1+\lambda}{4} \left[ t+1 + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} \right] - \frac{1-\lambda}{2} \exp(2i\alpha) \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + B'(t) \left[ \frac{1+\lambda}{4} \left( 1 + \frac{1}{t^3} \right) - \frac{1-\lambda}{2t^2} \exp(-2i\alpha) \right] - \right. \\ &\quad \left. - B(t) \left[ \frac{3(1+\lambda)}{2t^4} - \frac{1-\lambda}{t^3} \exp(-2i\alpha) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

При помощи замены переменных  $t = \varepsilon + \delta s$ ,  $\varepsilon = 1/2(b+a)$ ,  $\delta = 1/2(b-a)$  решение уравнения (1.5) можно получить в виде ряда по параметру  $\varepsilon^{-1}$ . С точностью до членов  $\varepsilon^{-4}$  функция  $g'(s) = \delta g'(t)$  равна

$$\begin{aligned} g'(s) &= \delta R \mu(s) / \sqrt{1-s^2}, \quad \mu(s) = \mu_1(s) + i\mu_2(s) \\ \mu_1(s) &= N \left[ s - \frac{s}{\varepsilon^3} + \frac{3(2\delta r + 1)}{4\varepsilon^4} \right] + p \left[ \frac{1+\lambda}{2} \left( -s - \frac{9s}{4\varepsilon^2} + \frac{14s+9\delta r}{4\varepsilon^3} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{42\delta r + 3\delta^2 s(18s-7)}{8\varepsilon^4} \right) + \frac{1-\lambda}{2} \cos 2\alpha \left( s + \frac{18s+3\delta s^2}{\varepsilon^4} \right) \right] + \\ &\quad + H\Gamma_2' \left[ 1 - \frac{\delta s}{\varepsilon} + \frac{\delta^2 r}{2\varepsilon^2} - \frac{6\delta s + \delta^3 r s}{2\varepsilon^3} + \frac{33\delta s + 30\delta^2 r + \delta^4(4s^2 r - 1)}{8\varepsilon^4} \right] + \\ &\quad + H\Gamma_1' \left[ \frac{2s}{\varepsilon} - \frac{\delta r}{\varepsilon^2} + \frac{3s + \delta^2 r}{\varepsilon^3} - \frac{9s + 18\delta r + \delta^3(4s^2 r - 1)}{4\varepsilon^4} \right] \\ \mu_2(s) &= T \left( -s + \frac{s}{\varepsilon^3} - \frac{3\delta r + 2\delta^2 s}{4\varepsilon^4} \right) + \frac{p(1-\lambda)}{2} \left( s + \frac{2s}{\varepsilon^2} - \frac{2\delta r}{\varepsilon^3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{9s - 4\delta^2(3s^3 - s)}{2\varepsilon^4} \right) \sin 2\alpha + H\Gamma_2'' \left[ 1 - \frac{\delta s}{\varepsilon} + \frac{\delta s + \delta^2 r}{2\varepsilon^2} - \frac{\delta s + \delta^2 r + \delta^3 r s}{2\varepsilon^3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{27\delta s + 2\delta^2 r - 6\delta^3 r s - \delta^4(4s^2 r - 1)}{8\varepsilon^4} \right] + H\Gamma_1'' \left[ \frac{2s}{\varepsilon} - \frac{s + \delta r}{\varepsilon^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3s - \delta r - \delta^2 s r}{\varepsilon^3} + \frac{27s + 18\delta r - 6\delta^2 s r - \delta^3(4s^2 r - 1)}{4\varepsilon^4} \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$r = 2s^2 - 1, \quad \Gamma_j = \Gamma_j' + i\Gamma_j'' \quad (j=1, 2)$$

Сделаем в формуле (1.4) замену переменных  $\eta$ , предполагая, что  $1 \ll \ll |\xi| \ll a$ , разложим подынтегральное выражение в ряд по  $\varepsilon^{-1}$ . После подстановки соотношений (2.1), (2.2) и вычисления интегралов будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi'(\xi) = \omega'(\xi) \Phi(\xi) = R \left\{ -N\Omega_1(\xi) + iT\Omega_2(\xi) + P \left[ \frac{1+\lambda}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2\xi^3} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\delta\omega_{11}}{2\varepsilon^2} + \frac{\delta\omega_{12}}{\varepsilon^3} + \frac{3\delta(4\omega_{13} + (3+\delta^2)\omega_{11})}{8\varepsilon^4} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1-\lambda}{2} \left( \frac{1}{2\xi^2} \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha \left( \frac{1}{\xi^2} + \frac{\delta\omega_{21}}{2\varepsilon^2} + \frac{\delta\omega_{22}}{\varepsilon^3} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\delta(12\omega_{23} + (8+3\delta^2)\omega_{22})}{8\varepsilon^4} \right) \right) \right] + H \left[ \Gamma_2' S_1(\xi) - \Gamma_1' \frac{\delta}{\varepsilon^3} \left( \omega_{11} + \frac{2\omega_{12}}{\varepsilon} \right) + \right. \\ \left. + i\Gamma_2'' \left( S_2(\xi) - \frac{\delta^2\omega_{21}}{4\varepsilon^4} \right) - i\Gamma_1'' \frac{\delta}{\varepsilon^3} \left( \omega_{21} + \frac{4\omega_{22} - \omega_{21}}{2\varepsilon} \right) \right] \right\} \\ \Omega_j(\xi) = \frac{\delta^2}{\varepsilon^2} \left[ \frac{\omega_{j1}}{2} + \frac{\omega_{j2}}{\varepsilon} + \frac{3(4\omega_{j3} + \delta^2\omega_{j1})}{8\varepsilon^2} \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$S_j(\xi) = \omega_{j0} + \frac{\omega_{j1}}{\varepsilon} + \frac{\omega_{j2}}{\varepsilon^2} + \frac{\omega_{j3} + \delta^2\omega_{j1}}{\varepsilon^3} + \frac{2\omega_{j4} + 5\delta^2\omega_{j2}}{4\varepsilon^4} \quad (j=1,2)$$

$$\omega_{10} = \frac{1}{2} \left( \xi + \frac{1}{2\xi^2} \right), \quad \omega_{11} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\xi^3} \right), \quad \omega_{12} = \frac{1}{2} \left( \xi - \frac{1}{\xi^3} + \frac{3}{2\xi^4} \right)$$

$$\omega_{13} = \frac{1}{2} \left( \xi^2 + \frac{3}{2\xi^2} - \frac{2}{\xi^4} + \frac{2}{\xi^5} \right), \quad \omega_{14} = \frac{1}{2} \left( \xi^3 - \frac{3}{2\xi^2} + \frac{3}{\xi^3} - \frac{3}{\xi^5} + \frac{5}{2\xi^6} \right)$$

$$\omega_{20} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\xi} - \frac{1}{2\xi^2} \right), \quad \omega_{21} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{\xi^2} - \frac{1}{\xi^3} \right), \quad \omega_{22} = \frac{1}{2} \left( \xi + \frac{3}{\xi^3} - \frac{3}{2\xi^4} \right)$$

$$\omega_{23} = \frac{1}{2} \left( \xi^2 - \frac{3}{2\xi^2} + \frac{4}{\xi^4} - \frac{2}{\xi^5} \right), \quad \omega_{24} = \frac{1}{2} \left( \xi^3 + \frac{3}{2\xi^2} - \frac{3}{\xi^3} + \frac{5}{\xi^5} - \frac{5}{2\xi^6} \right)$$

Через функции  $g'(s)$  и  $\varphi'(\xi)$  коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещины и гипоциклоиды выражаются следующим образом [1, 5]:

$$k_1^{\pm} - ik_2^{\pm} = \mp \sqrt{\frac{\pi R \delta}{1 - (\varepsilon \pm \delta)^{-3}}} \mu(\pm 1), \quad k_1^{(j)} - ik_2^{(j)} = 2 \sqrt{\frac{\pi}{3R}} \varphi'(\sigma_j) \quad (j=1,3) \quad (2.4)$$

где верхний знак соответствует правому, а нижний — левому концам трещины.

Определив коэффициенты интенсивности напряжений, предельные значения силовой или температурной нагрузки найдем из соотношения [6] (где  $K_{IC}$  — вязкость разрушения)

$$k_1 - 3Dk_2 = (1+D^2)^{1/2} K_{IC}, \quad D = \frac{k_1 - \sqrt{k_1^2 + 8k_2^2}}{4k_2}$$

Следует отметить, что полученные соотношения для чисто температурной задачи ( $p=N=T=0$ ) являются общим решением, так как температура входит в них только посредством двух постоянных  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Постоянная  $\Gamma_2$  определяется соотношением (1.6), а величины  $\Gamma_1$  для температурного

поля (1.3) — по формуле

$$\Gamma_1 = \Gamma_{10} - \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \gamma(t) [1 - M_*(t)] dt,$$

$$\Gamma_{10} = \operatorname{Res}_{\zeta=0} F_0(\zeta), \quad M_*(t) = \operatorname{Res}_{\zeta=0} M(t, \zeta) \quad (2.5)$$

3. В качестве примера определим температурное поле (1.3), когда отверстие и трещина теплоизолированы. Если  $\operatorname{Im} \gamma(t) = 0$ , а  $M(t, \zeta) = -\zeta/(t\zeta - 1)$ , то граничное условие на контуре отверстия будет выполнено. Удовлетворяя условию теплоизолированности трещины, получим сингулярное интегральное уравнение для определения функции  $\gamma(t)$ :

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \gamma'(t) \left[ \frac{1}{t-\xi} + \frac{t}{t\xi-1} \right] dt = f(\xi), \quad \xi \in [a, b] \quad (3.1)$$

$$f(\xi) = -2 \operatorname{Re} \frac{\partial F_0}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0}$$

Несмотря на наличие регулярной части ядра, решение уравнения (3.1) можно получить в замкнутой форме, если распространить определение функций  $\gamma'(t)$  и  $f(t)$  на отрезок  $[1/b, 1/a]$  оси  $O\xi$ , сопряженный с отрезком  $[a, b]$  относительно единичной окружности, следующим образом:

$$\gamma'(t) = -t^{-2} \gamma'(1/t), \quad f(t) = t^{-2} f(1/t) \quad (3.2)$$

С учетом этих соотношений уравнение (3.1) запишется так:

$$\frac{1}{\pi} \int_L \gamma'(t) \frac{dt}{t-\xi} = f(\xi), \quad \xi \in L, \quad L = [1/b, 1/a] \cup [a, b]$$

Неограниченное на концах разрезов решение этого уравнения запишется в виде [7]:

$$\gamma'(\xi) = \frac{i}{R^+(\xi)} \left[ C_0 + C_1 \xi - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{R^+(t) f(t) dt}{t-\xi} \right] \quad (3.3)$$

$$R(\zeta) = [(\zeta-b)(\zeta-a)(\zeta-a^{-1})(\zeta-b^{-1})]^{1/2}, \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \zeta^{-2} R(\zeta) = 1$$

Учитывая, что  $R(1/\xi) = -\xi^{-2} R(\xi)$ , легко установить, что для выполнения условий (3.2) необходимо, чтобы  $C_1 = 0$ . Из условия

$$\int_a^b \gamma'(t) dt = 0$$

определим вторую постоянную

$$C_0 = \frac{1}{A\pi i} \int_a^b \frac{d\xi}{R^+(\xi)} \int_L \frac{R^+(t) f(t) dt}{t-\xi}, \quad A = \int_a^b \frac{d\xi}{R^+(\xi)}$$

В данном случае  $M_*(t) = -1/t^2$ , поэтому из (2.5) имеем

$$\Gamma_1 = \Gamma_{10} + \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \left( t - \frac{1}{t} \right) \gamma'(t) dt$$

В частности, если на бесконечности задан однородный тепловой поток  $q$ , направленный под углом  $\beta$  к оси  $Ox$ , то комплексный потенциал температурного поля в области  $D$  будет [8]:

$$F_0(\xi) = \frac{qR}{2} \left[ \xi \exp(-i\beta) + \frac{1}{\xi} \exp(i\beta) \right]$$

Подставляя  $f(t) = qR(1+1/t^2) \sin \beta$  в соотношение (3.3), найдем

$$\gamma'(\xi) = \frac{iqR \sin \beta}{R^+(\xi)} \left[ C_0^* + \frac{(a+b)(ab+1)}{2ab} \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) - \left( \xi^2 + \frac{1}{\xi^2} \right) \right] \quad (3.4)$$

$$C_0^* = C_0 - 1 + \frac{(b-a)^2(b^2a^2+1) - 2ab(b^2+a^2)}{8a^2b^2}$$

Во избежание неудобств, связанных с вычислением эллиптических интегралов, формулу (3.4) и выражения для постоянных  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  удобно записать в виде ряда по  $\varepsilon^{-1}$ . С точностью до членов  $\varepsilon^{-4}$  имеем

$$\gamma'(s) = \delta\gamma'(t) = \frac{qR\delta \sin \beta}{\sqrt{1-s^2}} \left[ -s - \frac{s}{\varepsilon^2} + \frac{\delta(2s^2-1)}{\varepsilon^3} - \frac{\delta^2(3s^3-s)}{\varepsilon^4} \right]$$

$$\Gamma_1 = \frac{qR}{2} \left[ \cos \beta + i \sin \beta \left( 1 + \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^2}{\varepsilon^2} + \frac{\delta^2+2\delta^4}{2\varepsilon^4} \right) \right]$$

$$\Gamma_2 = \frac{iqR^2 \sin \beta \delta^2}{2} \left[ 1 + \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon^3} + \frac{5\delta^2}{4\varepsilon^4} \right]$$

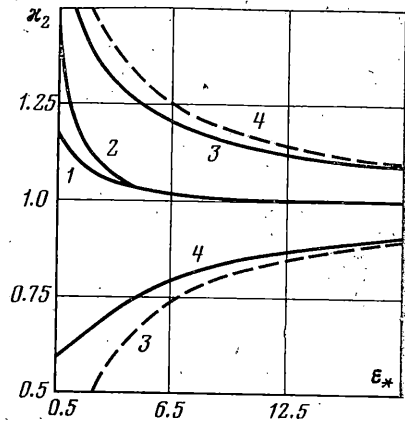
На фиг. 2-4 приведены некоторые числовые результаты для трещины, имеющей в физической плоскости безразмерную полудлину  $\delta_1 = 1/2(b_1 - a_1)$ . Индексами плюс и минус отмечены правая и левая вершина трещины. Сплошные линии соответствуют случаю  $\varepsilon_1 > 3/2$  ( $\varepsilon > 1$ ), штриховые -  $\varepsilon_1 < -3/2$  ( $\varepsilon < -1$ ).

На фиг. 2 даны зависимости приведенных коэффициентов интенсивности касательных напряжений  $\kappa_{2\pm} = k_{2\pm}/k_{20\pm}$  ( $k_{20\pm}$  - значение  $k_{2\pm}$  для соответствующей нагрузки при отсутствии отверстия) от безразмерного расстояния близлежащей вершины трещины от контура отверстия:  $\varepsilon_* = \varepsilon_1 - 2.5$  при  $\varepsilon_1 > 2.5$  и  $\varepsilon_* = |\varepsilon_1| - 1.5$  при  $\varepsilon_1 < -1.5$ . Кривые 1, 2 соответствуют  $\kappa_{2p^+}$  и  $\kappa_{2p^-}$ , а кривые 3, 4 -  $\kappa_{2q^+}$  и  $\kappa_{2q^-}$  (индексы  $p$  и  $q$  указывают на вид нагрузки). Приведенные кривые не зависят от параметров  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  и, значит, имеют общий характер. Поэтому можно утверждать, что степень взаимодействия между отверстием и трещиной при температурной нагрузке выше, чем при силовой.

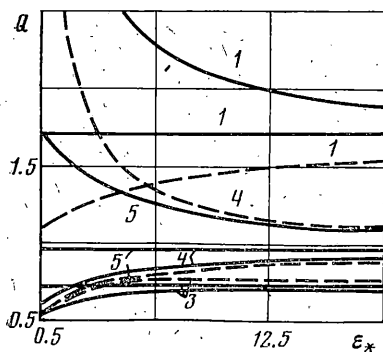
Зависимости предельного значения теплового потока  $Q = q_* HR^{3/2}/K_{IC}$  от параметра  $\varepsilon_*$  при  $\beta = \pi/2$  представлены на фиг. 3, а от угла  $\beta$  при  $\varepsilon_* = 2.5$  - на фиг. 4. Кривые 1, 2, 3 относятся к соответствующим вершинам гипоциклоиды ( $A_1, A_2, A_3$ ), а кривые 4, 5 - к правой и левой вершине трещины.

Горизонтальные линии на фиг. 3 соответствуют случаю, когда отверстие и трещина не взаимодействуют ( $|\varepsilon_1| \rightarrow \infty$ ). Как видно из графиков, разрушение тела начнется в вершине гипоциклоиды  $A_3$  как в случае левой ( $\varepsilon_1 < -1.5$ ), так и правой ( $\varepsilon_1 > 2.5$ ) трещин.

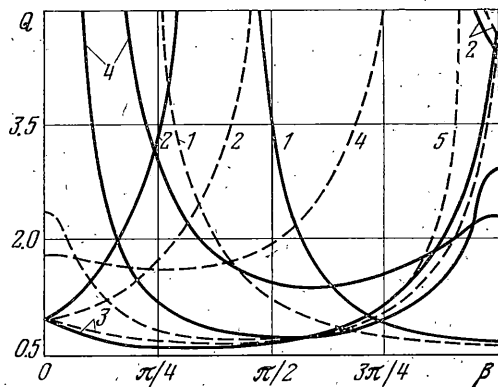
Анализ зависимости предельного значения теплового потока от угла  $\beta$  (фиг. 4) показывает, что при  $0 \leq \beta \leq 106^\circ$  разрушение начнется в вершине  $A_3$ , при  $106^\circ \leq \beta \leq 133^\circ$  - в правой вершине трещины, при  $133^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$  - в вершине  $A_1$  для правой трещины и при  $0 \leq \beta \leq 103^\circ$  - в вершине  $A_3$ , при  $103^\circ \leq \beta \leq 120^\circ$  - в левой вершине



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

трещины и при  $120^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$  — в вершине  $A_1$  для левой трещины. Для рассмотренных значений параметров ( $\delta_1=1$ ,  $\varepsilon_1=5$ ,  $\varepsilon_2=-4$ ) распространение трещины никогда не происходит со стороны перемычки. Учитывая асимптотический характер зависимостей  $k_j^\pm(\varepsilon_*)$ ,  $q_j^\pm(\varepsilon_*)$  (см. фиг. 2, 3), можно предположить, что этот вывод имеет место для произвольных значений параметра  $\varepsilon_*$ .

В заключение отметим, что сопоставление полученных результатов с их значениями, найденными численным путем по расчетной схеме [9], показывает, что при  $\varepsilon_*=\delta_1=1$  погрешность приближенных решений не превышает 5%.

Поступила 20 II 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Интегральные уравнения задачи термоупругости для плоскости с криволинейным отверстием и трещинами. Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 11.
2. Панасюк В. В., Саврук М. П., Борщук Е. М. Упругое равновесие пластины, ограниченной криволинейным контуром и ослабленной системой трещин. Физико-химическая механика материалов, 1977, т. 13, № 3.
3. Кривцун М. Г. Предельное равновесие пластины с эллиптическим отверстием и трещиной. В сб: Математические методы и физико-механические поля, вып. 6. Киев, «Наукова думка», 1977.
4. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости. Минск, Изд-во Белорусск. гос. ун-та им. В. И. Ленина, 1972.
5. Панасюк В. В., Бережницкий Л. Т. К вопросу о предельном равновесии пластин с острыми концентраторами напряжений. Физико-химическая механика материалов, 1965, т. 1, № 4.
6. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев, «Наукова думка», 1968.
7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1958.
8. Гайвась И. В. Температурные напряжения, обусловленные возмущением однородного теплового потока в окрестности макровключений. Прикл. механ., 1966, т. 2, вып. 2.
9. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М., «Наука», 1973.