МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1979

УДК 539.375

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ С ТРЕЩИНАМИ

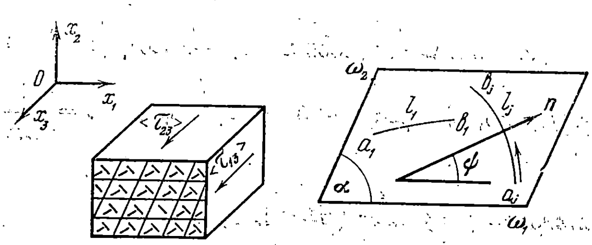
Л. В. ВОЛКОВА, Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

(Сумы)

Краевые задачи теории упругости для изотропной среды с криволинейными трещинами рассматривались в [1–3]. Для анизотропной среды с криволинейными трещинами в случае плоской деформации общий подход был развит в [4]. В предлагаемой работе рассматривается двоякопериодическая задача для трещин продольного сдвига в анизотропной среде. Строится макромодель такой регулярной структуры.

1. Постановка задачи. Рассмотрим неограниченную анизотропную среду, ослабленную двоякопериодической системой криволинейных туннельных разрезов и находящуюся в условиях продольного сдвига средними напряжениями $\langle\tau_{13}\rangle$, $\langle\tau_{23}\rangle$ (фиг. 1).

Будем предполагать, что в пределах параллелограмма периодов имеется k туннельных разрезов l_j $(j=\overline{1,k})$ и на берегах разрезов l_j задана одинаковая в конгруэнтных точках нагрузка $Z_n^\pm$ (верхний знак относится к



Фиг. 1

левому берегу разреза при движении вдоль l_j от начала — точки a_j к концу — b_j). Предположим также, что l_j — простые разомкнутые дуги Ляпунова.

Требуется определить напряжения и смещения в описанной структуре, а также построить макромодель структуры.

Пусть ω_1 и ω_2 ($\operatorname{Im}\omega_1=0$, $\operatorname{Im}\omega_2/\omega_1>0$) — основные периоды структуры, D — область, занятая средой.

Напряжения и смещения в среде выражаются через аналитическую функцию $\Phi(z_1)$ комплексного переменного $z_1=x_1+\mu x_2$ по формулам

$$\tau_{13}=2\operatorname{Re}\{\mu\Phi(z_1)\},\quad \tau_{23}=-2\operatorname{Re}\Phi(z_1),\quad u_3=-2\sqrt{\Delta}\operatorname{Im}\varphi(z_1)$$

$$\Delta=a_{44}a_{55}-a_{45}^2>0,\qquad \Phi(z_1)=\frac{d\varphi(z_1)}{dz_1},\qquad \mu=-\frac{a_{45}+i\sqrt{\Delta}}{a_{55}} \tag{1.1}$$

Здесь τ_{13}, τ_{23} — компоненты касательного напряжения на соответствующих площадках; u_3 — компонента вектора упругого смещения вдоль оси ox_3; a_{44}, a_{45}, a_{55} — соответствующие коэффициенты в законе Гука для анизотропной среды.

Краевые условия на l_j запишем в виде

$$2\operatorname{Re}\{a(\psi)\Phi^{\pm}(t_1)\}=\pm Z_n^{\pm}(t), \qquad t\in l=\bigcup^{k} l_j$$
$$a(\psi)=\mu_1\cos\psi-\sin\psi, \qquad t_1=\operatorname{Re}t+\mu\operatorname{Im}t \tag{1.2}$$

Здесь φ — угол между положительной нормалью к левому берегу в точке t и осью ox_3.

В силу групповой симметрии задачи $\Phi(z_1)$ будем разыскивать в классе двоякопериодических функций.

Таким образом задача сводится к определению двоякопериодической аналитической функции $\Phi(z_1)$ по краевому условию (1.2) и дополнительному условию однозначности перемещения в среде.

Положим

$$\Phi(z_1)=A+\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{\omega(t)}{a(\psi)}\zeta(t_1-z_1)\,dt_1, \qquad \omega(t)=\{\omega_j(t),\ t\in l_j\} \tag{1.3}$$

Здесь $\zeta(t_1-z_1)$ — дзета-функция Вейерштрасса, построенная на периодах $\omega_{11}=\omega_1$, $\omega_{21}=\operatorname{Re}\omega_2+\mu\operatorname{Im}\omega_2$; константа A определяется из условий существования в D средних напряжений $\langle\tau_{13}\rangle$, $\langle\tau_{23}\rangle$:

$$-\langle\tau_{23}\rangle|\omega_1|=2\operatorname{Re}\varphi(z_1)\,\Big|_{z_1}^{z_1+\omega_{11}} \tag{1.4}$$
$$(\langle\tau_{13}\rangle\sin\alpha-\langle\tau_{23}\rangle\cos\alpha)|\omega_2|=2\operatorname{Re}\varphi(z_1)\,\Big|_{z_1}^{z_1+\omega_{21}}$$
$$\varphi(z_1)\,\Big|_{z_1}^{z_1+\omega_{11}}=A\omega_{11}+\delta_{11}d, \quad \varphi(z_1)\,\Big|_{z_1}^{z_1+\omega_{21}}=A\omega_{21}+\delta_{21}d, \quad d=\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{\omega(t)}{a(\psi)}t_1\,dt_1$$

Решение системы (1.4) дает ($H=\operatorname{Im}\omega_2$):

$$A=\frac{4\pi\operatorname{Im}d}{\omega_1H(\bar\mu-\mu)}-\frac{\langle\tau_{23}\rangle\bar\mu+\langle\tau_{13}\rangle}{\bar\mu-\mu}-\frac{d\delta_{11}}{\omega_1} \tag{1.5}$$

Условие двоякой периодичности $\Phi(z_1)$ приводит к соотношению

$$\int_l\frac{\omega(t)}{a(\psi)}dt_1=\int_l\omega(t)\,ds=0 \tag{1.6}$$

2. Основная система сингулярных интегральных уравнений. Переходя в (1.3) к предельным значениям и подставляя их в краевое условие (1.2), получаем (вычитая из первого предельного равенства второе)

$$2\operatorname{Re}\omega(t)=F_1(t), \qquad F_1(t)=Z_n^{+}+Z_n^{-} \tag{2.1}$$

Складывая полученные предельные равенства и учитывая (2.1), приходим к основной системе сингулярных интегральных уравнений

$$\int\limits_{l} p(t)G(t,t_0)\,ds=N(t_0),\qquad G(t,t_0)=\operatorname{Re}\left[a(\psi_0)\zeta(t_1-t_{10})-\right.$$

$$\left.-\frac{\delta_{11}a(\psi_0)t_1}{\omega_1}-\frac{2\pi\cos\psi_0}{\omega_1 Hi}t_1\right],\qquad P(t)=\operatorname{Im}\omega(t) \tag{2.2}$$

$$N(t_0)=\pi[0{,}5F_2(t)-\langle\tau_{13}\rangle\cos\psi_0-\langle\tau_{23}\rangle\sin\psi_0]+$$

$$+\int\limits_{l} F_1(t)\operatorname{Im}\left[\delta_{11}a(\psi_0)t_1-0{,}5a(\psi_0)\zeta(t_1-t_{10})-\frac{\pi\cos\psi_0 t_1 i}{\omega_1 H}\right]ds$$

$$ds=dt_1/a(\psi),\qquad F_2(t)=Z_n^{+}-Z_n^{-},\qquad t_1=\operatorname{Re}t+\mu\operatorname{Im}t$$

$$t_{10}=\operatorname{Re}t_0+\mu\operatorname{Im}t_0,\qquad t\in l,\qquad t_0\in l$$

Ядро $G(t,t_0)$ имеет особенность типа Коши. К системе (2.2) необходимо присоединить k дополнительных условий однозначности смещения u_3:

$$\int\limits_{l_j} p(t)\,ds=0\qquad (j=\overline{1,k}) \tag{2.3}$$

Непосредственно видно, что условие двоякой периодичности напряжений (1.6) вытекает из условий (2.3).

Система интегральных уравнений (2.2) с дополнительными условиями (2.3) и представление (1.3) полностью определяют напряжения в D.

3. Асимптотические значения напряжений в окрестности вершин трещин. Введем параметризацию контура l_j, положив (ниже индекс j опускаем)

$$t=t(\beta),\qquad t(-1)=a,\qquad t(1)=b,\qquad t\in l_j\quad (-1\leqslant\beta\leqslant1) \tag{3.1}$$

Используя (3.1) и учитывая, что решение системы (2.2) существует в классе h_0 [5], запишем

$$p(t)=\Omega(\beta)=\Omega_0(\beta)/\sqrt{1-\beta^2} \tag{3.2}$$

где $\Omega_0(\beta)$ ограничена на l_j.

Вычисляя асимптотические значения интеграла (1.3), находим с учетом (1.1), (2.2) асимптотические значения напряжений в окрестности вершин

$$\tau_{13}=\frac{\sqrt{s'(\pm1)}}{\sqrt{2\rho}}\operatorname{Re}(\mu B),\qquad s'(\pm1)=\left.\frac{ds}{d\beta}\right|_{\beta=\pm1},\qquad \tau_{23}=\frac{-\sqrt{s'(\pm1)}}{\sqrt{2\rho}}\operatorname{Re}B$$

$$z-c=\rho e^{i\theta},\qquad \psi_c=\psi(\pm1)$$

$$B=i\Omega_0(\pm1)/[\mp(\mu\cos\psi_c-\sin\psi_c)(\cos\theta+\mu\sin\theta)]^{1/2}$$

Здесь верхний знак относится к точке $c=b$ (конец трещины), нижний знак — к точке $c=a$ (начало трещины), ds — элемент дуги на l. В частности, на продолжении трещины за точку c имеем

$$\tau_{13}=\sqrt{\frac{s'(\pm1)}{2\rho}}\operatorname{Re}\left\{\frac{\mu\Omega_0(\pm1)}{\mu\cos\psi_c-\sin\psi_c}\right\}$$

$$\tau_{23}=-\sqrt{\frac{s'(\pm1)}{2\rho}}\operatorname{Re}\left\{\frac{\Omega_0(\pm1)}{\mu\cos\psi_c-\sin\psi_c}\right\}$$

Для изотропной среды в формуле (3.3) необходимо положить $\mu=i$.

В локальной системе координат, связанной с вершиной трещины, соотношение (3.3) имеет вид, аналогичный соответствующим формулам [6], причем коэффициент интенсивности $K_{III}=(2\pi s'(c))^{1/2}\Omega_0(c)$, где $\Omega_0(c)$ — значение в вершине трещины величины Ω_0, найденной из решения краевой задачи (1.2) в локальной системе координат, связанной с вершиной c. Величина $s'(c)=ds/d\beta$ в точке c (параметризация контура также соответствует локальной системе координат).

4. Макроскопическая модель структуры. Определение макроскопической модели структуры дано в [7]. (Ниже полагаем, что берега трещины свободны от сил).

Средние деформации $\langle\gamma_{13}\rangle$ и $\langle\gamma_{23}\rangle$ имеют вид

$$\langle\gamma_{13}\rangle=\frac{1}{\omega_1}[u_3(z+\omega_1)-u_3(z)]$$
$$\langle\gamma_{23}\rangle=\frac{1}{H}[u_3(z+\omega_2)-u_3(z)]-\frac{h}{H}\langle\gamma_{13}\rangle \tag{4.1}$$

Используя (1.1) и (1.4), перепишем (4.1) в виде

$$\langle\gamma_{13}\rangle=-\frac{2\sqrt{\Delta}}{\omega_1}\operatorname{Im}(A\omega_{11}+\delta_{11}d) \tag{4.2}$$

$$\langle\gamma_{23}\rangle=-\frac{2\sqrt{\Delta}}{H\omega_1}[\omega_1\operatorname{Im}(A\omega_{21}+\delta_{21}d)-h\operatorname{Im}(A\omega_{11}+\delta_{11}d)],\quad h=\operatorname{Re}\omega_2$$

Пусть $p^{(1)}(t)$ — решение системы (2.2) при $\langle\tau_{13}\rangle=1$, $\langle\tau_{23}\rangle=0$; $p^{(2)}(t)$ — решение системы (2.2) при $\langle\tau_{13}\rangle=0$, $\langle\tau_{23}\rangle=1$.

Тогда решение системы (2.2) и функционал d представимы в форме

$$p(t)=\langle\tau_{13}\rangle p^{(1)}(t)+\langle\tau_{23}\rangle p^{(2)}(t),\quad d=\langle\tau_{13}\rangle d_1+\langle\tau_{23}\rangle d_2,$$
$$d_1=\frac{1}{2\pi}\int_l\frac{p^{(1)}(t)}{a(\psi)}t_1\,dt,\quad d_2=\frac{1}{2\pi}\int_l\frac{p^{(2)}(t)}{a(\psi)}t_1\,dt_1 \tag{4.3}$$

Подставляя в (4.2) значение A из (1.5) и d из (4.3), приходим к закону Гука для макромодели

$$\langle\gamma_{23}\rangle=\langle\tau_{23}\rangle\langle a_{44}\rangle+\langle\tau_{13}\rangle\langle a_{45}\rangle,\quad \langle\gamma_{13}\rangle=\langle\tau_{23}\rangle\langle a_{54}\rangle+\langle\tau_{13}\rangle\langle a_{55}\rangle \tag{4.4}$$

$$\langle a_{44}\rangle=a_{44}+\frac{4\pi}{H\omega_1}(\sqrt{\Delta}\operatorname{Re}d_2-a_{45}\operatorname{Im}d_2)$$

$$\langle a_{45}\rangle=a_{45}+\frac{4\pi}{H\omega_1}(\sqrt{\Delta}\operatorname{Re}d_1-a_{45}\operatorname{Im}d_1)$$

$$\langle a_{54}\rangle=a_{45}-\frac{4\pi\operatorname{Im}d_2}{\omega_1 H}a_{55},\quad \langle a_{55}\rangle=a_{55}-\frac{4\pi\operatorname{Im}d_1}{\omega_1 H}a_{55}$$

Можно показать, что $\langle a_{45}\rangle=\langle a_{54}\rangle$. Величины $\langle a_{ik}\rangle$, входящие в (4.4), представляют собой макроскопические параметры исследуемой структуры. Результаты остаются в силе и для изотропного материала, достаточно лишь положить $\mu=i$ ($a_{45}=a_{54}=0$, $a_{44}=a_{55}$).

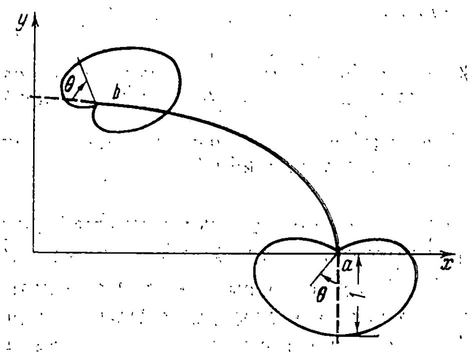
5. **Результаты расчетов.** При проведении расчетов система (2.2) сводилась к системе линейных алгебраических уравнений по схеме [8]. Рассматривался случай, когда в пределах параллелограмма периодов имеется одна трещина вдоль дуги эллипса

$$x_1=x=R_1\cos\frac{\beta+1}{2}\varphi,\qquad x_2=y=R_2\sin\frac{\beta+1}{2}\varphi\qquad(-1\leqslant\beta\leqslant1)$$

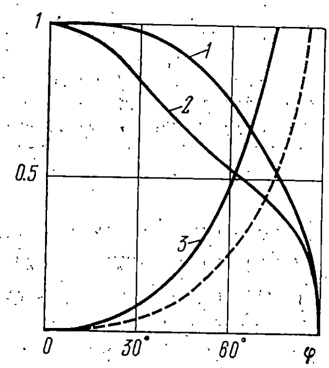
причем начало трещины соответствует значению $\beta=-1$, конец – $\beta=+1$; оси симметрии эллипса совпадают с главными осями упругой симметрии.

На фиг. 2 приведены эпюры ($2l$ – длина трещины) величины $(2\rho/l)^{1/2}\tau_{13}$ в зависимости от полярного угла Θ для следующих значений параметров: $\langle\tau_{13}\rangle=1$, $\langle\tau_{23}\rangle=0$, $R_1/R_2=2$, $\varphi=60°$, $\omega_1=2$, $\omega_2=i$, $\mu=2i$.

На фиг. 3 приведены графики величины $a_{44}/\langle a_{44}\rangle$ (кривая *1*), $a_{55}/\langle a_{55}\rangle$ (кривая *2*) и $\langle a_{45}\rangle/a_{44}$ (кривая *3*) в функции от угла φ (характеризующего длину трещины) при $R_1/R_2=1$, $\omega_1=2$, $\omega_2=2i$, $\mu=i$. Там же приведена кривая $\langle a_{45}\rangle/a_{44}$ (пунктир) для $R_1/R_2=2$, $\omega_1=2$, $\omega_2=i$, $\mu=2i$. Графики величин $a_{44}/\langle a_{44}\rangle$ и $a_{55}/\langle a_{55}\rangle$ для этого случая практически совпадают с кривой *1* и кривой *2* соответственно.



Фиг. 2



Фиг. 3

Из расчетов следует, что макромодель структуры, даже в том случае, когда материал ее изотропен, может обладать существенной анизотропией.

Поступила 10 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдштейн Р. В., Салганик Р. Л.* Плоская задача о криволинейных трещинах в упругом теле. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 3.
2. *Гольдштейн Р. В., Савова Л. Н.* Об определении раскрытия и коэффициентов интенсивности напряжений для гладкой криволинейной трещины в упругой плоскости. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 2.
3. *Линьков А. М.* Интегральные уравнения теории упругости для плоскости с разрезами, нагруженными уравновешенными системами сил. Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 6.
4. *Фильштинский Л. А.* Упругое равновесие анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 5.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
6. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
7. *Фильштинский Л. А.* К теории упругих неоднородных сред с регулярной структурой. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
8. *Каландия А. И.* Математические методы двумерной упругости. М., «Наука», 1973.