

УСТОЙЧИВОСТЬ РАСТЯЖЕНИЯ КРУГЛОГО НАГРЕТОГО ОБРАЗЦА

А. П. ГРОМОВОЙ, Г. Д. ДЕЛЬ

(Воронеж)

На основе модели вязкопластического материала методом начальных возмущений исследуется устойчивость растяжения круглого нагретого образца. Предложен критерий устойчивости, согласно которому деформирование считается устойчивым, если при неограниченном возрастании времени скорость изменения возмущения оказывается равной нулю. Выявлены две области устойчивости. Полученные результаты находятся в удовлетворительном соответствии с экспериментальными данными по сверхпластичности и ползучести.

1. Деформирование при гомологических температурах свыше 50—60% характеризуется весьма низким деформационным упрочнением и высокой чувствительностью напряжений к изменению скорости деформации. Это позволяет использовать в качестве феноменологической модели поведения нагретого металла модель вязкопластического материала, что получило подтверждение в экспериментальных исследованиях в состоянии сверхпластичности [1] и ползучести [2, 3].

А. Ю. Ишлинским [4] решена задача об устойчивости пластического растяжения круглого стержня из вязкопластического материала, у которого максимальное касательное напряжение связано линейной зависимостью с максимальной скоростью сдвига. Ниже приводится решение задачи об устойчивости растяжения круглого нагретого образца, полученное в соответствующем экспериментальным данным [1—3] предположении, что интенсивность напряжений $\sigma_e = (\sqrt{3/2} s_{ij} s_{ij})^{1/2}$ является функцией интенсивности скоростей деформации $\dot{\epsilon}_e = (\sqrt{2/3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij})^{1/2}$. Согласно теории Сен-Венана — Леви — Мизеса, скорости деформации считаются пропорциональными компонентам девиатора напряжений s_{ij} :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \sqrt{3/2} \dot{\epsilon}_e s_{ij} / \sigma_e \quad (1.1)$$

Как и в [4], потеря устойчивости трактуется как нарушение равномерности пластического деформирования, выражающееся в появлении утонения в виде шейки. При этом компоненты девиатора напряжений и тензора скоростей деформации изменяются на бесконечно малые величины δs_{ij} , $\delta \dot{\epsilon}_{ij}$, называемые в дальнейшем дополнительными компонентами, удовлетворяющие уравнениям равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\delta s_r + \delta \sigma)}{\partial r} + \frac{\partial (\delta s_{rz})}{\partial z} + \frac{(\delta s_r - \delta s_\varphi)}{r} &= 0 \\ \frac{\partial (\delta s_z + \delta \sigma)}{\partial z} + \frac{\partial (\delta s_{rz})}{\partial r} + \frac{\delta s_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

кинематическим уравнениям

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_r &= \frac{\partial (\delta v_r)}{\partial r}, & \delta \varepsilon_\varphi &= \frac{\delta v_r}{r}, & \delta \varepsilon_z &= \frac{\partial (\delta v_z)}{\partial z} \\ \delta \varepsilon_{rz} &= 1/2 \left[\frac{\partial (\delta v_r)}{\partial z} + \frac{\partial (\delta v_z)}{\partial r} \right] \end{aligned} \quad (1.3)$$

условию несжимаемости

$$\frac{\partial (\delta v_z)}{\partial z} + \frac{\partial (\delta v_r)}{\partial r} + \frac{\delta v_r}{r} = 0 \quad (1.4)$$

уравнениям состояния, следующим из (1.1)

$$\delta s_{ij} = \frac{2}{3} \left[\frac{\delta \varepsilon_{ij}}{k} + \varepsilon_{ij}^{\circ} (k\eta - 1) \frac{\delta \varepsilon_e^{\circ}}{\varepsilon_e^{\circ} k} \right], \quad k = \frac{\varepsilon_e^{\circ}}{\sigma_e^{\circ}} \quad (1.5)$$

где δv_r , δv_z — дополнительные компоненты скоростей перемещений в радиальном и осевом направлении цилиндрической системы координат r , φ , z , а градусом помечены величины, соответствующие невозмущенному состоянию.

Уравнения (1.5) получены в предположении, что в окрестности рассматриваемой точки функцию $\sigma_e(\varepsilon_e)$ можно линеаризовать и принять $\delta \sigma_e = \eta \delta \varepsilon_e$, $\eta = d\sigma_e/d\varepsilon_e$ при $\varepsilon_e = \varepsilon_e^{\circ}$.

Поскольку при растяжении круглого стержня в невозмущенном состоянии $\varepsilon_r^{\circ} = \varepsilon_\varphi^{\circ} = -\varepsilon_z^{\circ}/2 = -\varepsilon_e^{\circ}/2$, и остальные компоненты тензора скоростей деформации равны нулю, а $\delta \varepsilon_e^{\circ} = -\delta \varepsilon_r^{\circ} - \delta \varepsilon_\varphi^{\circ}$, то уравнения состояния (1.5) запишутся в виде

$$\delta s_r = 2/3 [\delta \varepsilon_r^{\circ} + 1/2 (k\eta - 1) (\delta \varepsilon_r^{\circ} + \delta \varepsilon_\varphi^{\circ})] / k, \quad \delta s_z = -2/3 \eta (\delta \varepsilon_r^{\circ} + \delta \varepsilon_\varphi^{\circ}) \quad (1.6)$$

$$\delta s_\varphi = 2/3 [\delta \varepsilon_\varphi^{\circ} + 1/2 (k\eta - 1) (\delta \varepsilon_r^{\circ} + \delta \varepsilon_\varphi^{\circ})] / k, \quad \delta s_{rz} = 2/3 \delta \varepsilon_{rz}^{\circ} / k$$

Подставляя в уравнения (1.2) соотношения (1.3), (1.6) и используя (1.4), получим

$$\left\{ \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} - \left[\frac{3}{r^2} + (1-3k\eta) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left[\frac{3}{r^3} - (1-3k\eta) \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{\partial}{\partial r} - \left[\frac{\partial^4}{\partial z^4} + (1-3k\eta) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{3}{r^4} \right] \right\} \delta v_r = 0 \quad (1.7)$$

Опишем возмущенную поверхность стержня уравнением [5, 6]:

$$r = r_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \cos n\lambda z \quad (1.8)$$

где r_0 — радиус стержня в соответствующем невозмущенном состоянии, δ_n — малые величины, λ — параметр, характеризующий протяженность шейки.

Учитывая (1.8), будем искать решение уравнения (1.7) в форме

$$\delta v_r = \left(\sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \cos n\lambda z \right) / r \quad (1.9)$$

Как следует из (1.7), функции $R_n(r)$ должны удовлетворять уравнениям

$$R_n^{IV} - 2/r R_n''' + [3/r^2 + n^2 \lambda^2 (1 - 3k\eta)] R_n'' - [3/r^2 + n^2 \lambda^2 (1 - 3k\eta)] / r R_n' + n^4 \lambda^4 R_n = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (1.10)$$

Следуя [4], представим эти уравнения в виде произведения двух коммутативных дифференциальных операторов

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \mu_n^2 \right) \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \bar{\mu}_n^2 \right) R_n = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (1.11)$$

где $\mu_n, \bar{\mu}_n$ — комплексные сопряженные числа

$$\mu_n = \frac{1}{2} n \lambda [\sqrt{3(1-k\eta)} + i\sqrt{1+3k\eta}]$$

Решением n -го уравнения $R_n(r)$ будет сумма общих решений $R_{1n}(r)$ и $R_{2n}(r)$ системы уравнений

$$R_{1n}'' - R_{1n}'/r + \mu_n^2 R_{1n} = 0, \quad R_{2n}'' - R_{2n}'/r + \bar{\mu}_n^2 R_{2n} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

которые с помощью замены переменной приводятся к уравнениям Бесселя.

2. Таким образом

$$R_n(r) = r [\bar{c}_n J_1(\mu_n r) + c_n J_1(\bar{\mu}_n r)] \quad (2.1)$$

где $J_1(\mu_n r), J_1(\bar{\mu}_n r)$ — функции Бесселя первого рода; c_n, \bar{c}_n — комплексные сопряженные постоянные, определяемые из граничных условий, которые с точностью до малых порядка выше первого запишутся в виде

$$\sigma_z^0 \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n n \lambda \sin n \lambda z - \delta s_{rz} = 0, \quad \delta \sigma + \delta s_r = 0 \quad (2.2)$$

Дополнительные компоненты девиатора напряжений определяем из (1.3), (1.4), (1.6), (1.9)

$$\delta s_r = \frac{1}{3kr} \left[(1+k\eta) \sum_{n=1}^{\infty} R_n' - \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} R_n \right] \cos n \lambda z, \quad \delta s_z = -\frac{2\eta}{3r} \sum_{n=1}^{\infty} R_n' \cos n \lambda z$$

$$\delta s_\varphi = -\frac{1}{3kr} \left[(1-k\eta) \sum_{n=1}^{\infty} R_n' - \frac{2}{r} \sum_{n=1}^{\infty} R_n \right] \cos n \lambda z \quad (2.3)$$

$$\delta s_{rz} = \frac{1}{3kr n \lambda} \left(-\sum_{n=1}^{\infty} R_n'' + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} R_n' - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \lambda^2 R_n \right) \sin n \lambda z$$

Для определения приращения гидростатического давления $\delta \sigma$ интегрируем второе уравнение равновесия по длине стержня при $r=r_0$:

$$\delta \sigma = \delta \sigma^* - \int_0 \left[\frac{\partial}{\partial z} \delta s_z + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \delta s_{rz} \right] dz \quad (2.4)$$

Здесь $\delta \sigma^*$ — приращение гидростатического давления в точке $r=r_0, z=0$.

Учитывая, что уравнения (2.2) должны удовлетворяться при любом z , и выражая их через (2.4), (2.3), получим

$$R_n''' - R_n''/r + (1/r^2 - 3n^2 \lambda^2 k\eta) R_n' + 2n^2 \lambda^2 R_n/r = 0$$

$$R_n'' - R_n'/r + n^2 \lambda^2 R_n + 3\delta_n n^2 \lambda^2 r \varepsilon_e^{\circ} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (2.5)$$

Используя соотношения (2.1) и выражение

$$R_n'' - R_n'/r = -(\mu_n^2 R_{1n} + \bar{\mu}_n^2 R_{2n}) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

преобразуем систему уравнений (2.5). В результате получим систему 2n уравнений для определения коэффициентов c_n и \bar{c}_n вида

$$\bar{c}_n a_{1n} + c_n \bar{a}_{1n} = b_{1n}, \quad \bar{c}_n a_{2n} + c_n \bar{a}_{2n} = b_{2n} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (2.6)$$

где a_{1n} и \bar{a}_{1n} , a_{2n} и \bar{a}_{2n} — комплексно-сопряженные числа

$$a_{1n} = \mu_n r (\mu_n^2 + 3n^2 \lambda^2 k \eta) J_0(\mu_n r) - 2n^2 \lambda^2 J_1(\mu_n r), \quad b_{1n} = 0$$

$$a_{2n} = (\mu_n^2 - n^2 \lambda^2) J_1(\mu_n r), \quad b_{2n} = 3\delta_n n^2 \lambda^2 \varepsilon_e^{\circ} \quad (2.7)$$

По правилу Крамера

$$\bar{c}_n = -\bar{a}_{1n} b_{2n} / (a_{1n} \bar{a}_{2n} - a_{2n} \bar{a}_{1n}), \quad c_n = a_{1n} b_{2n} / (a_{1n} \bar{a}_{2n} - a_{2n} \bar{a}_{1n}) \quad (2.8)$$

Подставляя (2.8) в (2.4) получим

$$R_n = \frac{3}{2} \delta_n r \varepsilon_e^{\circ} \frac{U_n (\sin 3\varphi + 3k\eta \sin \varphi) - V_n (\cos 3\varphi + 3k\eta \cos \varphi)}{[(U_{1n}^2 + V_{1n}^2) \cos \varphi - V_n \sin 2\varphi - U_n (3k\eta + \cos 2\varphi)] \sin \varphi} \quad (2.9)$$

$$\varphi = \arctg \sqrt{(1+3k\eta)/(3-3k\eta)}, \quad U_n = U_{0n} U_{1n} + V_{0n} V_{1n}, \quad V_n = U_{0n} V_{1n} - V_{0n} U_{1n}$$

$$U_{0n} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(n\lambda r)^{2m}}{4^m (m!)^2} \cos 2m\varphi$$

$$U_{1n} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(n\lambda r)^{2m}}{4^m m! (m+1)!} \cos (2m+1)\varphi$$

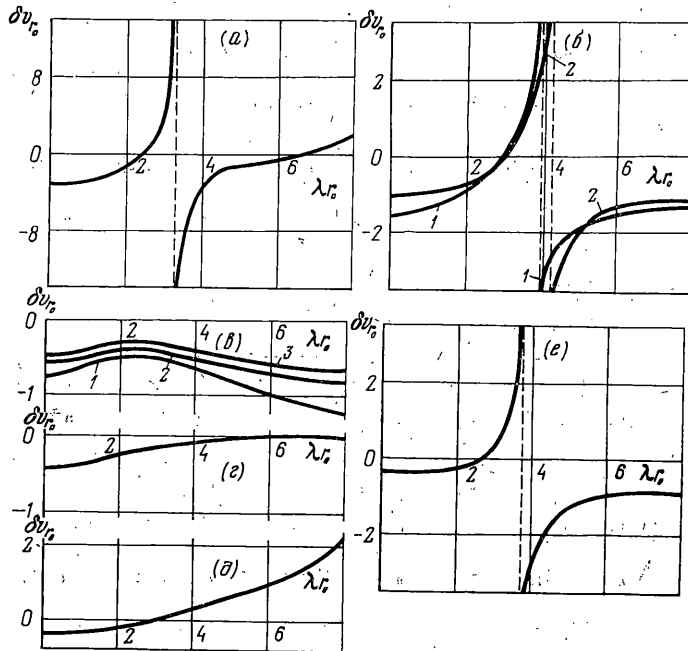
$$V_{0n} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(n\lambda r)^{2m}}{4^m (m!)^2} \sin 2m\varphi$$

$$V_{1n} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(n\lambda r)^{2m}}{4^m m! (m+1)!} \sin (2m+1)\varphi \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

Следуя [4, 5], запишем условие устойчивости деформирования в виде: $\delta v_r > 0$ при $z=0, r=r_0$.

Или с учетом (1.9), (2.9), разделив на $3/2 \varepsilon_e^{\circ}$, получаем условие устойчивости

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \frac{U_n (\sin 3\varphi + 3k\eta \sin \varphi) - V_n (\cos 3\varphi + 3k\eta \cos \varphi)}{[(U_{1n}^2 + V_{1n}^2) \cos \varphi - V_n \sin 2\varphi - U_n (3k\eta + \cos 2\varphi)] \sin \varphi} > 0 \quad (2.10)$$



Фиг. 1

В выражении (2.10) не определены коэффициенты δ_n . Для их определения необходимо знать уравнение возмущенной границы. Так, разлагая (1.8) в ряд Фурье в интервале $[-\pi/\lambda, \pi/\lambda]$, получим

$$r = r_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \cos n\lambda z = r_0 - \delta \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n' \cos n\lambda z$$

$$\delta_n' = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\pi/\lambda}^{\pi/\lambda} \exp \left[- \left(\frac{\lambda z}{2} \right)^2 \right] \cos n\lambda z \quad (n=1,2,3,\dots)$$

где δ_n' определяются численно; например $\delta_1' = 0.43913$, $\delta_2' = 0.00625$, $\delta_3' = 0.00827, \dots$

Условие устойчивости можно теперь записать в виде

$$\delta v_{r_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n' \frac{U_n (\sin 3\varphi + 3k\eta \sin \varphi) - V_n (\cos 3\varphi + 3k\eta \cos \varphi)}{[(U_{1n}^2 + V_{1n}^2) \cos \varphi - V_n \sin 2\varphi - U_n (3k\eta + \cos 2\varphi)] \sin \varphi} > 0 \quad (2.11)$$

3. Численное решение было проведено на ЭВМ М-222 для $n=10$. Для фиксированных значений параметра $k\eta$ определены зависимости δv_{r_0} от безразмерной величины λr_0 (фиг. 1). На фиг. 1, а представлены расчеты для $k\eta=0.1$; на фиг. 1, б кривые 1, 2 соответствуют $k\eta=0.2, 0.3$; на фиг. 1, в приводятся кривые 1, 2, 3 для параметра $k\eta=0.4, 0.5, 0.6$; кривые на фиг. 1, г, д, е соответствуют $k\eta=0.7, 0.8, 0.9$. В [4, 5, 7] параметр λ определялся в предположении, что на длине стержня укладывается целое число полуволн. Вследствие этого критическая скорость деформации оказывается зависящей от длины, что не согласуется с экспериментом.

Более близким к действительности является предположение, что поверхность стержня имеет множество различных возмущений с $0 < \lambda < \infty$ [8, 9]. Однако в этом случае оказывается, что, согласно принятому критерию устойчивости, деформирование стержня всегда неустойчиво, поскольку для любых $k\eta$ существуют такие λ , для которых $\delta v_{r_0} < 0$. Этот результат согласуется с наблюдениями. Эксперименты показывают, что при растяжении образца в состоянии сверхпластичности, по су-

ществу, в любой момент времени, имеются одна или несколько «шеек», которые развиваются, исчезают, появляются в новом месте. В литературе это явление получило название «бегущей шейки». Поскольку, несмотря на указанное обстоятельство, в состоянии сверхпластичности стержни достигают весьма значительных удлинений без разрушения, представляется целесообразным изменить критерий устойчивости.

Испытания ряда металлов в холодном состоянии показали, что в процессе локализации деформации параметр λr_0 возрастает [8]. В связи с этим примем, что при $\delta v_{r_0} > 0$ λr_0 уменьшается, а при $\delta v_{r_0} < 0$ параметр λr_0 возрастает, и будем считать деформирование устойчивым, если при неограниченном возрастании времени t для любого начального (т. е. при $t=0$) значения λr_0 величина $\delta v_{r_0} \rightarrow 0$.

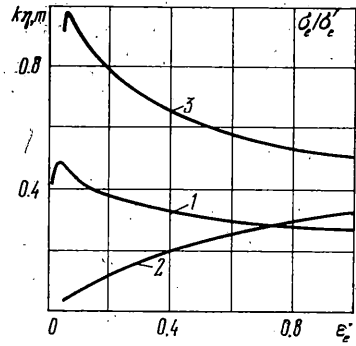
Согласно этому критерию, растяжение стержня устойчиво при $0 < k\eta < 0.12$, $0.66 < k\eta < 0.82$. Анализ численного решения показал, что для $n=10$ границы областей устойчивости, вычисленные с точностью до сотых, не зависят от числа членов ряда в выражении (2.11).

Если начальному λr_0 соответствует отрицательная скорость δv_{r_0} для значений параметра $k\eta$ из областей устойчивости (см. фиг. 1, а, з, д), то возмущение границы усиливается и наоборот. При этом соответственно λr_0 возрастает и убывает, стремясь к значению, с достижением которого скорость δv_{r_0} оказывается равной нулю, и развитие шейки прекращается. Для всех прочих $k\eta$ существуют такие начальные λr_0 , при которых происходит неограниченная локализация деформации. В полном соответствии с наблюдениями, описанными в [10], в случае неустойчивого деформирования могут иметь место шейки, развитие которых может прекратиться (например, при $k\eta=0.3$ на фиг. 1, б это возмущение с $\lambda r_0 < 3.8$), и шейки, развивающиеся вплоть до разрушения (при $k\eta=0.3$ это возмущение с $\lambda r_0 > 3.8$).

Полученный результат хорошо согласуется с экспериментальными данными. Обычно функцию $\sigma_e(\epsilon_e^*)$ аппроксимируют уравнением $\sigma_e = \sigma_e' \epsilon_e^{*m}$. Если параметры материала σ_e' , m не зависят от скорости деформации, то $k\eta = m$. В [11] указано, что если преобладает скоростное упрочнение, то устойчивая деформация сплава ВТ6 в состоянии сверхпластичности наблюдается при $m=0.7-0.8$. В [1] приведен более широкий интервал устойчивого деформирования: $0.35 < m < 0.8$, что, видимо, объясняется зависимостью m от ϵ_e^* .

На фиг. 2 показаны зависимость m (кривая 1) от ϵ_e^* (мин⁻¹), приведенная в этой работе, и функции σ_e/σ_e' (кривая 2), $k\eta$ (кривая 3), при построении которых не приняты во внимание участки кривых, соответствующие $k\eta \leq 0$. Полученные $k\eta$ достаточно близки к значениям из области устойчивости (0.66, 0.82).

Области устойчивости (0, 0.12) могут соответствовать высокоскоростные процессы, при которых, согласно наблюдениям [10], $d\sigma_e/d\epsilon_e^*$ мало, или деформирование при ползучести, скорости которой на несколько порядков меньше скоростей сверхпластической деформации (например $0.08 \leq m \leq 0.625$ [12]).



Фиг. 2

Поступила 18 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Ragab A. R., Dunkan J. L. Superplasticity: constitutive equations and forming problems. In: Internat. Sympos. on Foundation of Plasticity. Warsaw, Groningen, Noordhoff Internat. Publ., 1972. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1973, № 4.)
2. Бойков В. Н., Бойцов Ю. И., Лазаренко Э. С., Малинин Н. Н. Кратковременная ползучесть сплава Д16 при больших деформациях. Изв. вузов. Машиностроение, 1971, № 4.
3. Бойков В. Н., Бойцов Ю. И., Лазаренко Э. С., Малинин Н. Н. Исследование растяжения сплава Д16 при повышенных температурах. Изв. вузов. Машиностроение, 1971, № 6.
4. Ишлинский А. Ю. Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута. ПММ, 1943, т. 7, вып. 2.
5. Ильюшин А. А. Деформация вязкопластического тела. Уч. зап. МГУ. Механика, 1940, вып. 39.
6. Дель Г. Д. Устойчивость двухосного растяжения листа из вязкопластического материала. В сб.: Механика деформируемых тел и конструкций. М., «Машиностроение», 1975.

7. Тузь А. Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев, «Наукова думка», 1974.
8. Дель Г. Д., Одина С. С. Устойчивость двухосного пластического растяжения изотропного листа. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3.
9. Одина С. С. Устойчивость при пластическом растяжении цилиндрического образца. В сб.: Исследования в области пластичности и обработки металлов давлением, вып. 3. Тула, Изд-во Тульск. политехн. ин-та, 1975.
10. Wray P. G. Tensile plastic instability at an elevated temperature and its dependence upon strain rate. J. Appl. Phys., 1970, vol. 41, No. 8.
11. Смирнов О. М., Озрименко Я. М., Шляев В. Е., Балакин В. П. Исследование процесса получения заготовок растяжением в состоянии сверхпластичности. Кузнечно-штамповочное производство, 1975, № 7.
12. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: «Машиностроение», 1975.