МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1979

УДК 539.374

ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ИДЕАЛЬНЫХ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЯ ГРАНИЦЫ

Г. И. БЫКОВЦЕВ, А. И. ХРОМОВ

(Куйбышев)

Методы решения задач теории плоской деформации идеально пластических сред хорошо изучены [1, 2], однако решений с учетом изменения формы границы тел в процессе деформации получено мало. Автомодельные задачи о внедрении клина в полупространство и раздавливании клина жестким плоским штампом получены в [3]. (В последней задаче известно решение только для углов раствора клина, больших 53.2°.) Оригинальный вариант решения такой задачи при наличии трения был предложен в [4]. Методом малого параметра вдавливание тонкого лезвия произвольной конфигурации рассматривалось в [5]. Приближенное решение, в котором выпучившаяся граница предполагалась всегда прямолинейной, рассмотрено в [6]. Если изменяющаяся свободная граница находится в пластическом состоянии, а краевая задача является кинематически определимой, то построение этой границы можно произвести в плоскости годографа [7], что и позволило авторам решить задачу о растяжении шейки в форме окружности.

Отметим, что в автомодельных решениях [3, 4] материал у свободной поверхности предполагался находящимся в пластическом состоянии условно, т. е. при построении статического решения. После построения кинематики оказывалось, что материал, прилегающий к свободной поверхности, движется как жесткое целое вдоль некоторой линии скольжения. В [8] рассмотрена задача о давлении плоского штампа на выпуклую заготовку в предположении, что у свободной поверхности материал находится в пластическом состоянии. При этом в области задачи Коши у свободной поверхности получается отрицательная диссипация энергии. Поэтому естественно предположить, что у свободной поверхности имеются области, двигающиеся как жесткое целое, и в этих областях напряжения будут ниже предела текучести.

Эти предположения позволили развить метод решения определенного класса технологических задач с учетом изменения геометрии тела в процессе деформирования, в частности построить решение нестационарной задачи о раздавливании пирамиды плоским штампом, из которой как частный случай следует решение [3], а также новое автомодельное решение углов раствора клина, меньших 53.2°.

1. Рассмотрим задачу о внедрении клина углом раствора 2θ в выпуклую заготовку криволинейной формы (фиг. 1). В результате внедрения клина часть материала будет выдавлена и форма заготовки в процессе внедрения будет изменяться. Сетка линий скольжения, так же как и в решении, предложенном в [3], состоит из треугольников $АВД$ и $АЕС$, в которых оба семейства линий скольжения прямолинейные и центрированного веера $АДЕ$. Выше линии $АС$ материал движется как жесткое целое, напряжения выше линии $АС$ не должны превосходить предела текучести.

В каждый момент времени поле скоростей совпадает с соответствующим полем, построенным в [3], т. е. $V_\alpha=\sqrt{2}\sin\theta$, $V_\beta=0$. Здесь V_α и V_β — проекции скорости на α и β линии (предполагается, что клин внедряется с единичной скоростью). В отличие от автомодельного решения [3] угол ψ не остается постоянным, а изменяется со временем по неизвестному заранее закону, и задача сводится к определению формы границы на участке AFC и положения точки A и C.

Если $\psi(t)$ — угол раствора веера в момент времени t, то точки криволинейной свободной границы AFC движутся со скоростями

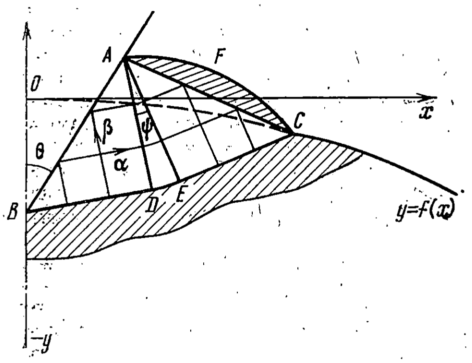
$$V_x=\sqrt{2}\sin\theta\cos\left({}^1/_4\pi-\theta+\psi\right),\quad V_y=\sqrt{2}\sin\theta\sin\left({}^1/_4\pi-\theta+\psi\right)\qquad(1.1)$$

Уравнения свободной границы AFC получаются интегрированием соотношений (1.1)

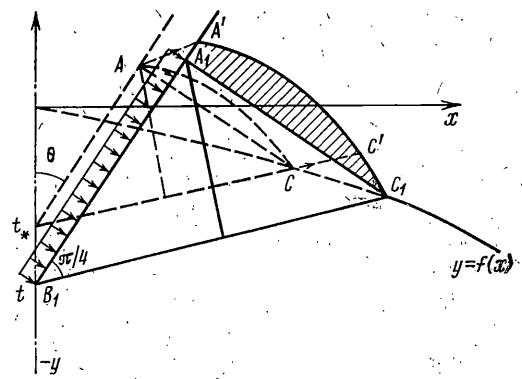
$$x(t,\tau)=\sqrt{2}\sin\theta\int_\tau^t\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta+\psi\right)dt+x_0(\tau)\qquad(1.2)$$

$$y(t,\tau)=\sqrt{2}\sin\theta\int_\tau^t\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta+\psi\right)dt+y_0(\tau)$$

Здесь $x=x_0(\tau)$, $y=y_0(\tau)$ — параметрическое представление границы заготовки до деформации; $x=x(t, \tau)$, $y=y(t, \tau)$ — параметрические уравне-



Фиг. 1



Фиг. 2

ния деформированной части свободной поверхности AFC в момент времени t; параметр τ выбран так, что τ совпадает с временем прихода точки C в точку $x_0(\tau)$, $y_0(\tau)$, т. е. с моментом начала движения. Тогда $x_0(t)$ и $y_0(t)$ — координаты точки C, а для координат точки $A(x_1, y_1)$ из условия $AB=AC$ получим

$$x_1=\frac{x_0\sin\theta}{\sin\theta+\cos(\theta-\psi)},\qquad y_1=\frac{t\sin(\theta-\psi)+y_0\cos\theta}{\cos\theta-\sin(\theta-\psi)}\qquad(1.3)$$

Так как точка A лежит на клине, то $y_1=\operatorname{ctg}\theta x_1$; отсюда

$$(t+y_0)\cos(2\theta-\psi)+x_0[\sin(2\theta-\psi)-1]=0\qquad(1.4)$$

Точка C лежит на недеформированной поверхности заготовки, поэтому $y_0(t)=f(x_0(t))$, где $y=f(x)$ — форма недеформированной поверхности заготовки.

Точка A лежит на недеформированной поверхности заготовки, поэтому из (1.2) и (1.3) следует

$$x_0\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos(\theta-\psi)}=\sqrt{2}\sin\theta\int_\tau\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\pm\psi\right)dt+x(\tau)$$

$$\frac{t\sin(\theta-\psi)-y_0\cos\theta}{\cos\theta-\sin(\theta-\psi)}=\sqrt{2}\sin\theta\int_{\tau_1}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta+\psi\right)dt+y_0(\tau_1)\qquad(1.5)$$

Здесь $\tau_1=\tau_1(t)$ — время начала движения материальной точки, которая в момент времени t имеет координаты x_1, y_1. Таким образом для определения функций $x_0(t)$, $y_0(t)$, $\psi(t)$ и $\tau_1(t)$ имеем четыре уравнения (1.4), (1.5). Эта система эквивалентна системе четырех дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$y_0'-f_x(x_0)x_0'=0; \quad y_0'\cos(2\theta-\psi)+x_0'[\sin(2\theta-\psi)-1]+$$
$$+\psi'[t\sin(2\theta-\psi)+y_0\sin(2\theta-\psi)-x_0]=-\cos(2\theta-\psi)$$
$$x_0'\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos(\theta-\psi)}-\psi'\frac{x_0\sin\theta\sin(\theta-\psi)}{[\sin\theta+\cos(\theta-\psi)]^2}=$$
$$=\sqrt{2}\sin\theta[\cos(^1/_4\pi-\theta-\psi(t))-\cos(^1/_4\pi-\theta+\psi(\tau_1))\tau_1']+x_0'(\tau_1)\tau_1' \quad (1.6)$$
$$\frac{y_0'\cos\theta+\sin(\theta-\psi)-t\cos(\theta-\psi)\psi'}{\cos\theta-\sin(\theta-\psi)}-\frac{[t\sin(\theta-\psi)+y_0\cos\theta]\cos(\theta-\psi)\psi'}{[\cos\theta-\sin(\theta-\psi)]^2}=$$
$$=\sqrt{2}\sin\theta[\sin(^1/_4\pi-\theta+\psi(t))-\sin(^1/_4\pi-\theta+\psi(\tau))\tau']+y_0'(\tau_1)\tau_1'$$

Из геометрических построений следует, что при $t=0$ имеем

$$\tau_1=0, \quad x_0=0, \quad y_0=0 \qquad (1.7)$$

Рассмотрим систему (1.6) при $t=0$:

$$y_0'-f_x|_{t=0}x_0'=0, \quad y_0'\cos(2\theta-\psi_0)+x_0'[\sin(2\theta-\psi)-1]=-\cos(2\theta-\psi_0)$$
$$x_0'\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos(\theta-\psi_0)}+\tau_1'\{\sin\theta[\cos(\theta-\psi_0)+\sin(\theta-\psi_0)]-x_0'\}=$$
$$=\sin\theta[\cos(\theta-\psi)+\sin(\theta-\psi)] \qquad (1.8)$$
$$y_0\frac{\cos\theta}{\cos\theta-\sin(\theta-\psi_0)}+\tau_1'\{\sin\theta[\cos(\theta-\psi_0)-\sin(\theta-\psi_0)]-y_0'\}=$$
$$=\sin\theta[\cos(\theta-\psi)-\sin(\theta-\psi)]-\frac{\sin(\theta-\psi_0)}{\cos(\theta-\psi_0)}$$

В системе (1.8) для определения трех неизвестных y_0', x_0', τ_1' имеем четыре уравнения. Условие совместности этой системы определяет начальное значение для функции $\psi(t)$. При $f_x'|_{t=0}=0$ это условие совпадает с уравнением, связывающим углы ψ и θ при вдавливании клина в полупространство [3]:

$$\cos(2\theta-\psi_0)=\cos\psi_0/(1+\sin\psi_0) \qquad (1.9)$$

Решение, полученное интегрированием системы (1.6) при начальных условиях (1.7) и (1.9), будет справедливо только при $\psi\geqslant 0$ и выпуклой линии AFC. Расчет напряженного состояния в пластической области производится аналогично [3]. Так как на линии AFC нагрузки отсутствуют, а в области AEC однородное напряженное состояние, то на линии AC имеем $n_j\sigma_{ij}=0$. Усилие, необходимое для внедрения клина, может быть рассчитано, согласно [3], по формуле $P=4k(1+\psi)BA\sin\theta$.

Так как недеформированная заготовка предполагается выпуклой, угол ψ в процессе деформации будет монотонно уменьшаться от ψ до 0.

Пусть в момент времени t_* угол $\psi=0$. Схема деформации при $t>t_*$ представлена на фиг. 2. Угол ψ сохраняет постоянное значение $\psi=0$ и все точки области $A'C'C_1B_1A_1$ двигаются в каждый момент времени t с одной и той же скоростью $\mathbf{V}$, проекции которой на оси координат, согласно [3], равны

$$V_x=\sqrt{2}\sin\theta\cos({}^1/_4\pi-\theta),\qquad V_y=\sqrt{2}\sin\theta\sin({}^1/_4\pi-\theta)$$

Поэтому уравнение подвижной границы $A'C'C_1$ можно записать в виде

$$Y(x,t)=F(x-\sqrt{2}\sin\theta\cos({}^1/_4\pi-\theta)(t-t_*))+\sqrt{2}\sin\theta\sin({}^1/_4\pi-\theta)(t-t_*) \tag{1.10}$$

где $yF(x)$ — уравнение некоторой линии, проходящей через точку C. Выше точки C линия $y=F(x)$ определена, так как в момент времени t_* она совпадает с деформированной границей AC. Форма кривой ниже точки C определяется процессом дальнейшей деформации.

Рассмотрим деформацию заготовки в окрестности точки C (фиг. 3). В результате вдавливания клина точка C недеформированной поверхности, движение которой началось в момент времени t, в момент времени $t+\Delta t$ займет положение C_1, а дуга CC_1 перейдет в дугу $C'C_1$, причем $CC'=\sqrt{2}\sin\theta\Delta t$. Рассматривая бесконечно малый промежуток времени Δt, дуги CC_1 и $C'C_1$ можно считать прямолинейными. Из выполненных построений следует $\operatorname{tg}\varphi=CE/EC_1$ или

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\sqrt{2}\sin\theta\sin({}^1/_4\pi-\theta)[\operatorname{tg}({}^1/_4\pi-\theta)+\operatorname{tg}\alpha]}{1-\sqrt{2}\sin\theta\cos({}^1/_4\pi-\theta)[\operatorname{tg}({}^1/_4\pi-\theta)+\operatorname{tg}\alpha]} \tag{1.11}$$

При $\Delta t\to 0$ отрезок CC_1 займет положение касательной к недеформированной поверхности $y=f(x)$ в точке C, поэтому $\operatorname{tg}\alpha=-f(x_C)$, а отрезок $C'C_1$ займет положение касательной к деформированной поверхности $y=Y(x,t)$ в точке C, поэтому

$$\operatorname{tg}\varphi=-\partial Y/\partial x=-\partial F/\partial x \quad \text{при} \quad x=x_C,\quad t=t_C \tag{1.12}$$

Здесь t_C — время начала движения точки C. Точка C определяется пересечением линии BC, которая удовлетворяет уравнению $y=\operatorname{tg}({}^1/_4\pi-\theta)x-t_C$, с недеформированной поверхностью $y=f(x)$; поэтому

$$\operatorname{tg}({}^1/_4\pi-\theta)x_C-t_C=f(x_C) \tag{1.13}$$

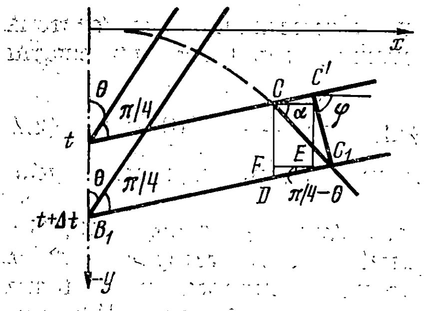
Подставляя значение $\operatorname{tg}\alpha$ и (1.12) в (1.11) и вводя новую переменную x, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{f(x)-\sqrt{2}\sin\theta\sin({}^1/_4\pi-\theta)[\operatorname{tg}({}^1/_4\pi-\theta)-f'(x_C)]}{1-\sqrt{2}\sin\theta\cos({}^1/_4\pi-\theta)[\operatorname{tg}({}^1/_4\pi-\theta)-f'(x_C)]} \tag{1.14}$$

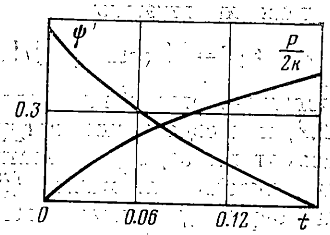
$$x=x_C-\sqrt{2}\sin\theta\cos({}^1/_4\pi-\theta)(t_*-t_C)$$

Выполненная замена переменных эквивалентна обратному перемещению подвижной границы из положения $A'C'C_1$ (фиг. 2) в момент времени t в положение AC в момент времени t_*. Таким образом система уравнений (1.13) и (1.14) при условии $F(x_C)=y_C$ определяет ниже точки C некоторую проходящую через точку C кривую $y=F(x)$, которая, перемещаясь со скоростью $V=\sqrt{2}\sin\theta$ вдоль линии скольжения, образует деформированную границу.

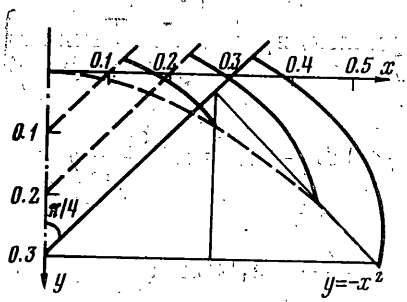
Необходимо отметить, что при $\psi=0$ материал в области $A_1A'C'C_1$ свободен от напряжений и не оказывает давления на клин на участке $A'A_1$.



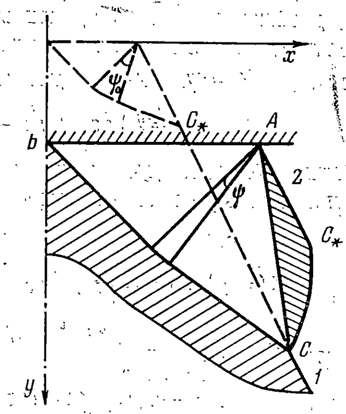
Фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 4



Фиг. 6

Расчет давления, необходимого для вдавливания клина, проводится в этом случае по формуле $P=4kB_1A_1\sin\theta$.

На фиг. 4, 5 представлены процесс деформации параболического цилиндра $y=-x^2$ при вдавливании в него клина $y=\operatorname{ctg}\alpha x$ при $\alpha=45°$ и графики зависимостей угла $\psi=\psi(t)$ и усилия, необходимого для вдавливания клина $P(t)$. Система уравнений (1.6) решалась численным методом. Деформация при $\psi=0$ начинается с момента $t_*=0.18$. Уравнение образующейся при этом деформированной границы можно получить из системы (1.13), (1.14) в виде

$$F(x)=x+{}^1/_2\sqrt{1+4t_*+4x}+\ln|2-\sqrt{1+4t_*+4x}|+C$$

2. Рассмотрим задачу о сжатии выпуклой заготовки гладким плоским штампом. Эта задача является частным случаем предыдущей задачи при $\theta={}^1/_4\pi$. Уравнения (1.3) запишутся в виде $x_0=x_1(1+\sin\psi)$, $y_0=y_1-x_1\cos\psi$. или, так как $y_1=-t$, то $y_0=-t-x_0\cos\psi/(1+\sin\psi)$.

Система уравнений (1.4), (1.5) преобразуется к виду

$$-(t+y_0)\cos\psi+x_0(\sin\psi-1)=0,\quad y_0'(t)=f'(x_0(t))$$

$$x_0=(1+\sin\psi)\left[\sqrt{2}\int_{\tau_1}^{t}\cos\left(\psi-\frac{\pi}{4}\right)dt+x_0(\tau_1)\right] \tag{2.1}$$

$$t+\sqrt{2}\int_{\tau_1}^{t}\sin\left(\psi-\frac{\pi}{4}\right)dt+y_0(\tau_1)=0$$

Аналогично предыдущей задаче условие совместности этой системы при $t=0$ совпадает с уравнением, связывающим углы θ и ψ при сжатии клина плоским штампом

$$\operatorname{tg}\theta=[(1+\sin\psi)^2]/[\cos(2+\sin\psi)],\qquad \operatorname{tg}\theta=-1/f'(0) \tag{2.2}$$

Численная реализация решения уравнений (2.1) при начальном условии (2.2) не представляет затруднений.

Рассмотрим задачу о сжатии усеченного клина $y=ax+b$, $a<0$, $b>0$ гладким плоским штампом (фиг. 6), прямая *1* соответствует $y=ax+b$. В этом случае движение материала заготовки начинается не из точки, а пластическое состояние возникает сразу в конечной области. При этом часть подвижной границы, которая в начальный момент времени приходит в движение, в последующем поступательно перемещается. Проекции скорости на линии скольжения вычисляются из соотношений Гейрингер [3], откуда $V_\alpha=\sqrt{2}$, $V_\beta=0$; для проекций скорости на оси координат имеем

$$V_x=\sqrt{2}\cos(^1/_4\pi-\psi),\qquad V_y=\sqrt{2}\sin(^1/_4\pi-\psi)$$

Таким образом для подвижной границы, пришедшей в движение в начальный момент времени, получим уравнение (кривая *2* на фиг. 6)

$$Y(x,t)=a\left(x-\sqrt{2}\int_0^t\cos\left(\frac{\pi}{4}-\psi\right)dt\right)-\sqrt{2}\int_0^t\sin\left(\frac{\pi}{4}-\psi\right)dt \tag{2.3}$$

Так как $OA=AC$, то

$$x_0=-x_1(t)+x_1(t)\sin\psi,\qquad y_0=-t-x_1(t)\cos\psi \tag{2.4}$$

Точка A является пересечением линии (2.3) с плоскостью штампа, откуда для x_1 получаем уравнение

$$a\left(x_1(t)-\sqrt{2}\int_0^t\cos\left(\frac{\pi}{4}-\psi\right)dt\right)-\sqrt{2}\int_0^t\sin\left(\frac{\pi}{4}-\psi\right)dt=-t \tag{2.5}$$

Так как точка C принадлежит недеформированной поверхности заготовки, то $y_0=f(x_0)$; отсюда будем иметь

$$-t-x_1(t)\cos\psi(t)=a(x_1(t)\sin\psi)+b \tag{2.6}$$

$$x_1=(-t-b)/(a+a\sin\psi+\cos\psi) \tag{2.7}$$

Из (2.5) следует

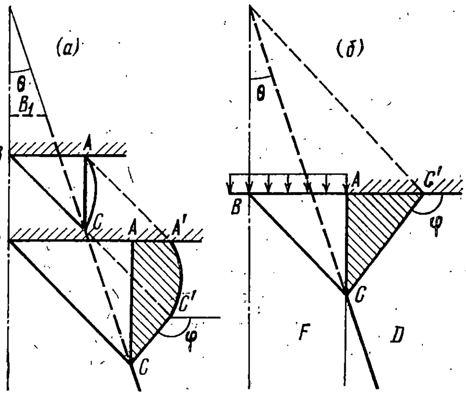
$$x_1(t)=-\frac{t}{a}+\frac{\sqrt{2}}{a}\int_0^t\sin\left(\frac{\pi}{4}-\psi\right)dt+\sqrt{2}\int_0^t\cos\left(\frac{\pi}{4}-\psi\right)dt-\frac{b}{a} \tag{2.8}$$

Подставляя (2.8) в (2.7) и дифференцируя по t, получим уравнение для определения функции $\psi(t)$ в виде

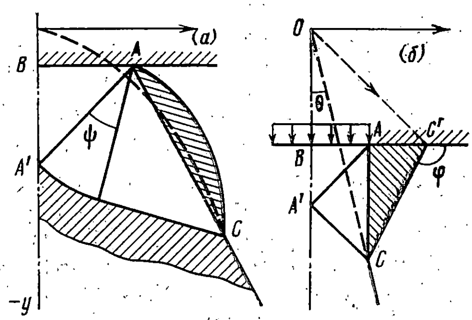
$$\frac{1}{t+b}=$$

$$=\frac{(a^2\cos\psi-a\sin\psi)\psi'}{(a+a\sin\psi+\cos\psi)^2[\cos\psi-\sin\psi+a(\sin\psi-\cos\psi)-1]+a(a+a\sin\psi+\cos\psi)} \tag{2.9}$$

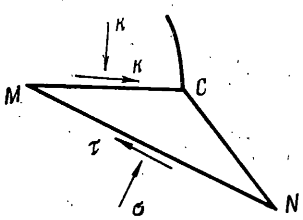
Решение уравнения (2.9) не представляет затруднений. По известной функции $\psi(t)$ вновь образующаяся подвижная граница C_*C может быть определена из уравнений (1.2) при $\theta=^1/_2\pi$. Полученное



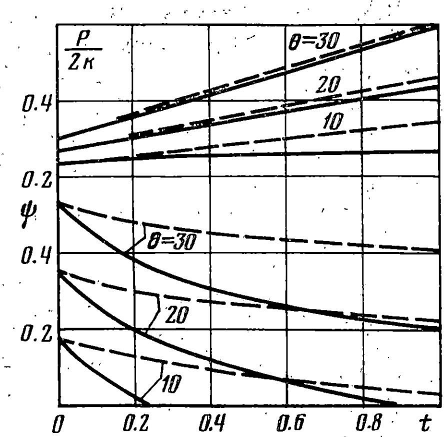
Фиг. 7



Фиг. 9



Фиг. 8



Фиг. 10

решение будет справедливо только в начальный период $\psi \geqslant 0$, когда граница заготовок под штампом определяется уравнением (2.3). Дальнейшее построение решения может быть осуществлено методом, развитым выше при решении задачи о вдавливании клина в выпуклую заготовку.

На фиг. 7 представлена схема пластического течения при $\psi=0$. Из системы уравнений (1.13) и (1.14) следует, что прямолинейная недеформированная граница будет преобразовываться в прямолинейную подвижную границу $C'C$. При этом углы θ и φ связаны соотношением $\operatorname{tg}\varphi = 1/(2-\operatorname{ctg}\theta)$.

Заметим, что криволинейный участок подвижной границы $A'C'$ в процессе деформирования при $\psi=0$ не изменяется и определяется величиной начальной площадки под штампом B_1, величина же прямолинейного участка $C'C$ постоянно увеличивается. Это позволяет построить автомодельное решение задачи о сжатии клина гладким плоским штампом при углах $\theta < 26.6°$, которое можно рассматривать как предельное решение задачи о сжатии усеченного клина при $B_1 \to 0$ (фиг. 7, *б*).

Так как вдоль линии AC касательные напряжения отсутствуют, то жесткая область $AC'C$ в каждый момент времени t движется вдоль плоскости штампа, не оказывая на него давления. Давление на штамп рассчитывается при этом по формуле $P=4kBA=4kt/(\operatorname{ctg}\theta-1)$.

Построенное автомодельное решение в каждый момент времени t является полным, так как оно является кинематически возможным и существует статически допустимое продолжение поля напряжений в жесткие области. Например, в областях $AC'C$ и $FCД$ $\sigma_{ij}=0$, в области ниже линии BC $\sigma_1=0$, $\sigma_2=-2k$.

Отметим, что во всех решениях точка C является особой, поэтому краевые условия в этой точке требуют дополнительных пояснений. Линия скольжения в точке C может подходить к свободной границе, вообще говоря, под любым углом и необходимо только найти продолжения поля напряжений в жесткие зоны, такие, чтобы с обеих сторон точки C граница была свободна от напряжений.

Выше точки C во всех решениях $\sigma_{ij}=0$ и прямая AC является линией разрыва напряжений. Покажем, что ниже точки C невозможно построить статически допустимое продолжение в тех случаях, когда $\alpha<{}^3/_4\pi$ (фиг. 8). Рассмотрим равновесие треугольника NMC; пусть на MN среднее касательное напряжение τ. Проектируя все действующие силы на NM, получим $\tau=k(\cos\varphi+\sin\varphi)(\cos\varphi+\mathrm{ctg}\,\alpha\sin\varphi)$.

При $\varphi=0$ имеем $\tau=k$, $d\tau/d\varphi=k(1+\mathrm{ctg}\,\alpha)$. При $\alpha={}^3/_4\pi$ получаем $\tau=k(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\leqslant k$.

При $\alpha<{}^3/_4\pi$ находим, что при $\varphi=0$ производная $d\tau/d\varphi>0$, а, следовательно, при $\varphi=0$ напряжение $\tau>k$. Таким образом при $\alpha<{}^3/_4\pi$ статически допустимого продолжения в жесткую зону не существует, и все построенные решения будут верны до тех пор, пока продолжение линии AC будет находиться внутри заготовки. При $\alpha>{}^3/_4\pi$ в области ниже линии $ВДЕС$ (фиг. 1) продолжение поля напряжений можно построить методом, предложенным в [9].

В задаче о сжатии выпуклой заготовки плоским штампом возможно другое кинематически возможное решение (фиг. 9, *а*). Здесь материал в области $A'AB$ движется как жесткое целое вместе со штампом. Аналогичные построения могут быть выполнены и в задаче о сжатии усеченного клина. При этом получается другое автомодельное решение для углов $\theta<18.6°$ (фиг. 9, *б*). Здесь углы θ и φ связаны соотношением $\mathrm{tg}\,\varphi=1/(3-\mathrm{ctg}\,\theta)$.

Давление на штамп определяется по формуле $P=2kBA=2kt/(\mathrm{ctg}\,\theta-2)$. Во всех трех задачах это решение дает в каждый момент времени t более высокие значения давления P. Данное автомодельное решение также является полным.

На фиг. 10 представлены графики зависимостей угла $\psi(t)$ и давления на штамп $P/2k$ при сжатии усеченного клина для различных углов θ. Непрерывная линия соответствует течению по схеме фиг. 7, *а*, пунктирная — по схеме фиг. 8.

Поступила 23 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. М., «Высшая школа», 1969.
2. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. М., «Наука», 1966.
3. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М., Гостехиздат, 1956.
4. *Mises R.* Three remarks on the theory of the ideal plastic body. In: Reissner Anniversary volume. Michigan, Ann Arbor, 1949.
5. *Ивлев Д. Д.* Вдавливание тонкого лезвия в пластическую среду. Изв. АН СССР. ОТН, 1957, № 10.
6. *Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д.* Об определении предельной нагрузки тел, вдавливаемых в пластическую среду. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1961, № 1.
7. *Дудукаленко В. В., Мяснянкин Ю. М.* Об определении изменяющейся границы тела при плоском пластическом деформировании. В сб.: Научн. тр. фак. прикл. матем. и механ. Воронежск. ун-та, 1971, вып. 2.
8. *Григорьев О. Д.* Об ограничении, накладываемом условием положительности рассеивания на краевые условия при плоской деформации жесткопластического тела. ПММ, 1977, т. 41, вып. 1.
9. *Bishop J. F. W.* On the complete solution to problems of deformation of a plastic-rigid material. J. Mech. and Phys. Solids, 1953, vol. 2, No. 1.