МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1979

УДК 539.3

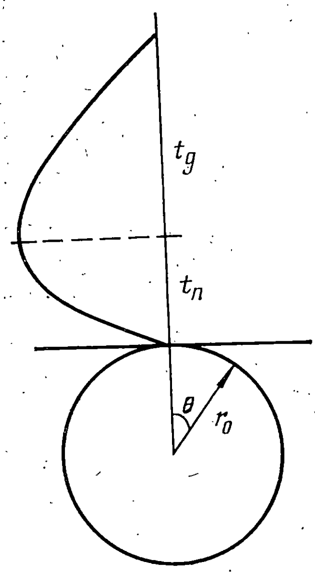
ДИФРАКЦИЯ УПРУГОЙ ВОЛНЫ НА СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

А. Н. КОВШОВ

(Москва)

Вопросы, связанные с дифракцией упругих волн на полостях различной формы в безграничной упругой среде, рассматривались в [1–11].

Для построения решения задач в [1–8] к волновым уравнениям, описывающим потенциалы, применялось преобразование Лапласа по времени. Трансформанты Лапласа решений представлялись в виде рядов по модифицированным функциям Бесселя и полиномам Лежандра. Обратное преобразование выполнялось при помощи теории вычетов или численным методом. Медленную сходимость получающихся при этом рядов для больших частот улучшали преобразованием Ватсона. Из-за громоздких вычислений, связанных с необходимостью удерживать большое число членов ряда, этот метод практически не может быть применен для расчета всего поля напряжений и скоростей около полости.



Фиг. 1

В работе [9] описано применение интегрального уравнения Кирхгофа. Этот метод требует большого объема вычислений и может применяться для описания начальной стадии взаимодействия. Сведение задач взаимодействия упругих волн с полостями к решению интегральных уравнений Вольтерра произведено в работах [10, 11].

Методы конечных разностей применялись для анализа дифракционных полей и движения включений в работах [12–14]. Эти методы позволяют эффективно рассчитывать динамические поля напряжений и скоростей во всем поле около включений.

Ниже методом конечных разностей решается задача о дифракции продольной волны на сферической полости. Система уравнений записывается в виде симметричной системы гиперболических уравнений первого порядка относительно скоростей и напряжений. Во внутренних точках применяется разностная схема второго порядка точности типа «пространственный крест». При расчете граничных точек используются бихарактеристические соотношения. Для регуляризации разностного решения применяется сглаживание. Обследованы поля напряжений в окрестности полости на расстоянии около двух радиусов. Произведено сравнение с напряженными состояниями, возникающими при дифракции волн на цилиндрической полости.

1. Введем сферическую систему координат r, θ, φ с полюсом в центре сферы (фиг. 1). Упругую среду характеризуем плотностью ρ и параметрами Ламе λ и μ.

Введем безразмерные величины

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}'/(\lambda+2\mu),\qquad u_i=u_i'/a,\qquad r=r'/r_0,\qquad t=t'a/r_0$$

При этом σ_{ij}' — компоненты тензора напряжений, u_i' — компоненты вектора скорости, $a=[(\lambda+2\mu)/\rho]^{1/2}$ — скорость продольной волны в среде, t' и r' — размерные время и радиус. Далее единицы измерения примем такими, что $a=1$, $\rho=1$. Считаем, что среда описывается линейными уравнениями теории упругости. В силу выбранной ориентации системы координат относительно фронта падающей волны можно считать, что решение не зависит от угла φ, т. е. обладает осевой симметрией. Систему уравнений удобнее записать в виде симметрической системы гиперболических уравнений.

Для этого обозначим $\sigma_r=\sigma_{rr}$, $\sigma_\theta=\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_\varphi=\sigma_{\varphi\varphi}$, $\mu=b^2/a^2$ и сделаем замену

$$p=(\sigma_r+\sigma_\theta)/2,\quad q=(\sigma_r-\sigma_\theta)/2,\quad R=\sigma_\varphi-p(1-2\mu)/(1-\mu) \tag{1.1}$$

Тогда получим систему уравнений

$$u^{\cdot}=p_{,r}+q_{,r}+\frac{1}{r}\tau_{,\theta}+\frac{1}{r}\left(\frac{\mu}{1-\mu}p+3q-R+\tau\operatorname{ctg}\theta\right) \tag{1.2}$$

$$v^{\cdot}=\frac{1}{r}(p_{,\theta}-q_{,\theta})+\tau_{,r}+\frac{1}{r}\left[3\tau+\left(\frac{\mu}{1-\mu}p-q-R\right)\operatorname{ctg}\theta\right]$$

$$\frac{1}{1-\mu}p^{\cdot}=u_{,r}+\frac{1}{r}v_{,\theta}+\frac{2-3\mu}{1-\mu}\frac{u}{r}+\frac{1-2\mu}{1-\mu}\frac{v}{r}\operatorname{ctg}\theta$$

$$\frac{1}{\mu}q^{\cdot}=u_{,r}-\frac{1}{r}v_{,\theta}-\frac{u}{r},\qquad \frac{1}{\mu}\tau^{\cdot}=\frac{1}{r}u_{,\theta}+v_{,r}-\frac{v}{r}$$

$$\frac{1}{\mu}R^{\cdot}=\frac{3-4\mu}{1-\mu}\left(\frac{u}{r}+\frac{v}{r}\operatorname{ctg}\theta\right),\qquad u=u_r,\quad v=u_\theta$$

Система (1.2) имеет вид симметричной системы уравнений первого порядка с положительно-определенной матрицей

$$A^t y_{,t}+A^r y_{,r}+A^\theta y_{,\theta}+B=0$$

$$y=\begin{Vmatrix} u\\ v\\ p\\ q\\ \tau\\ R\end{Vmatrix},\quad A^t=\begin{Vmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & \frac{1}{1-\mu} & & \\ & 0 & & & \frac{1}{\mu} & \\ & & & & & \frac{1}{\mu}\end{Vmatrix},\quad A^r=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}$$

$$A^\theta=\frac{1}{r}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}\cdot\quad B=\frac{1}{r}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & m_1 & -3 & -s & 1\\ 0 & 0 & m_1 s & s & 0 & s\\ m_2 & m_3 s & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ m_4 & m_4 s & 0 & 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}$$

$$m_1=\frac{\mu}{1-\mu},\quad m_2=\frac{3\mu-2}{1-\mu},\quad m_3=\frac{2\mu-1}{1-\mu},\quad m_4=\frac{4\mu-3}{1-\mu},\quad s=\operatorname{ctg}\theta$$

Из вида матриц A^t, A^r, A^θ видно, что они содержат в верхнем левом углу блоки [5×5], совпадающие с соответствующими матрицами, для системы уравнений, описывающей плоские движения и представленной в полярной системе координат (r, θ) [14]. Это связано с существованием осевой симметрии.

Задача о дифракции плоской продольной волны на сферической полости, свободной от напряжений, сводится к нахождению решения системы (1.2), удовлетворяющего граничным и начальным значениям. Начальное условие состоит в том, что при $t=t_0$ напряжения и скорости должны совпадать с напряжениями и скоростями в падающей продольной волне. Пусть $\sigma_0=1$ — интенсивность падающей волны, $f(\xi)$ — ее форма. Тогда в силу замены (1.1) получаем следующие начальные данные для системы (1.2):

$$p=-\sigma_0 f(\xi)(1-\mu),\quad q=-\sigma_0 f(\xi)\mu\cos 2\theta,\quad \tau=\sigma_0\mu f(\xi)\sin 2\theta$$
$$R=0,\quad u=-\sigma_0 f(\xi)\cos\theta,\quad v=\sigma_0 f(\xi)\sin\theta,\quad \xi=r\cos\theta-1 \tag{1.3}$$

В предположении, что полость свободна от напряжений, получим граничное условие

$$p+q=0,\quad \tau=0 \text{ при } r=1 \tag{1.4}$$

Пользуясь линейностью задачи, будем искать решение в виде $y=y_0+y_1$, где y_0 задается падающей волной. Тогда для y_1 получим задачу с нулевыми начальными данными, с ненулевыми граничными условиями при $r=1$.

В силу (1.4) имеем, что при $r=1$ должно удовлетворяться

$$p_1+q_1=f(\xi)(1-2\mu\sin^2\theta),\quad \tau_1=-f(\xi)\mu\sin 2\theta \tag{1.5}$$

При построении конечно-разностного решения ограничим расчетную область дополнительной границей $r=r_1$ и поставим на ней условия, соответствующие расходящейся волне [13, 14]. Эти условия предполагают, что при $r=r_1\gg 1$ движение близко к одномерному по нормали к границе $r=r_1$ и имеют вид

$$p_1+q_1+u_1=0,\quad \tau_1+\sqrt{\mu}v_1=0 \tag{1.6}$$

В силу осевой симметрии будем строить решение для $0<\theta<\pi$. При $\theta=0, \pi$ из условия симметрии получаем следующие условия:

$$\tau_1=v_1=0,\quad p_{1,\theta}=q_{1,\theta}=R_{1,\theta}=u_{1,\theta}=0 \tag{1.7}$$

Построив решение y_1 для $t>t_0$ и сложив его с решением, задаваемым падающей волной (выражения (1.3)), найдем решение задачи о дифракции продольной волны на сферической полости, свободной от напряжений (ниже индекс 1 у соответствующих величин опускается).

2. В координатах r, θ расчетная область $1<r<r_1$, $0<\theta<\pi$ разбивается на ячейки прямыми

$$\theta_j=\Delta\theta\times j,\quad r_i=(1+\Delta\theta)^i\quad (i=0, 1, \dots, M;\ j=0, 1, \dots, N)$$

Переменный шаг h_i по координате r берется таким образом, что $h_i=r_i\Delta\theta$. При таком разбиении ячейки будут близки к квадратным во всей расчетной области. Считается, что функции p, q, τ, R определены в узлах сетки, а скорости u, v определены в центрах ячеек. Вводится расщепление по времени; при этом скорости u, v считаются определенными для $t=\nabla t\ (k-0.5)$, а p, q, τ, R — для $t=\Delta tk\ (k=0, 1, \dots, K)$.

Во внутренних точках используется схема типа пространственный крест. При этом уравнения для скоростей аппроксимируются со вторым порядком точности по всем переменным, а в ошибку аппроксимации производных по r от напряжений войдет член $h_i-h_{i-1}\simeq r_i\Delta\theta^2$. Применение переменного шага по координате хотя и увеличивает ошибку аппроксимации, но позволяет уменьшить влияние дополнительной границы и условий на ней на решение [14]. Граница расчетной области проходит по узлам сетки, поэтому граничные условия должны формулироваться для величин p, q, τ, R.

Граничное условие (1.7) заменяется на следующее:

$$\tau=0,\quad \delta_\theta p=\delta_\theta q=\delta_\theta R=0 \tag{2.1}$$

где δ_θ — оператор, аппроксимирующий первую производную по θ со вторым порядком точности.

Условий (1.5) недостаточно для определения четырех величин p, q, R, τ на «верхнем» слое по времени при $r=1$. Поэтому к ним добавляются еще два бихарактеристических соотношения для системы уравнений (1.2) [15, 16]. На характеристической плоскости вдоль прямой, по которой она касается поверхности $r=\text{const}$, имеем соотношения

$$\begin{gathered}\mu p_{,t}-(1-\mu)q_{,t}-2\mu(1-\mu)\frac{v_{,\theta}}{r}-\mu(3-4\mu)\frac{u}{r}-\mu(1-2\mu)\frac{v}{r}\operatorname{ctg}\theta=0\\(1-\mu)R_{,t}-\mu(3-4\mu)\left(\frac{u}{r}+\frac{v}{r}\operatorname{ctg}\theta\right)=0\end{gathered}\tag{2.2}$$

Соотношения (2.2) используются для определения неизвестных величин на верхнем слое по времени при $r=1$ и $r=r_1$, при этом скорости экстраполируются на границу и применяются центральные разности. Обозначив индексом 1, 0, $^1/_2$ величины на верхнем, нижнем и промежуточном слоях по времени при $r=1$, получим

$$\begin{gathered}p_1=(1-\mu)(1-2\mu\sin^2\theta)f(\xi)+\Delta tA_{1/2}+\mu p_0-(1-\mu)q_0\\q_1=-p_1+(1-2\mu\sin^2\theta)f(\xi),\qquad\tau_1=-\mu\sin 2\theta f(\xi)\\R_1=R_0+\Delta t\mu\frac{3-4\mu}{1-\mu}(u+v\operatorname{ctg}\theta)_{1/2}\frac{1}{r},\qquad\xi=r\cos\theta-1+t-t_0\end{gathered}\tag{2.3}$$

Условие (1.6) также добавляется бихарактеристическими соотношениями и неизвестные при $r=r_1$ определяются следующим образом:

$$\begin{gathered}p_1=\Delta tA_{1/2}+\mu p_0-(1-\mu)(q_0+u_{1/2}),\\q_1=-p_1-u_{1/2},\qquad\tau_1=-\sqrt{\mu}v_{1/2}\\R_1=R_0+\Delta t\mu\frac{3-4\mu}{1-\mu}(u+v\operatorname{ctg}\theta)_{1/2}\frac{1}{r}\\A_{1/2}=2\mu(1-\mu)\frac{v_{,\theta}}{r}+\mu(3-4\mu)\frac{u}{r}+\mu(1-2\mu)\frac{v}{r}\operatorname{ctg}\theta\end{gathered}\tag{2.4}$$

Таким образом решение определяется во всех точках на верхнем слое по времени.

Чтобы гасить колебания разностного решения, возникающие при резких формах падающей волны и вызванные использованием схемы второго порядка точности, применяется сглаживание решения. Для одномерного случая применяемое сглаживание имеет следующую форму:

$$f_j^c=b_0|f_{j+1}-f_j|f_{j+1}+(1-b_0|f_{j+1}-f_j|-b_0|f_j-f_{j-1}|)f_j+b_0|f_j-f_{j-1}|f_{j-1}\tag{2.5}$$

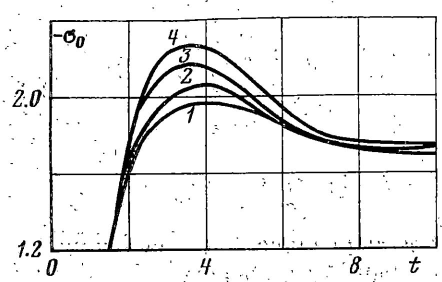
т. е. это трехточечное сглаживание с коэффициентами, зависящими от градиента сглаживаемого решения. Такое сглаживание применялось по координатам θ и r во внутренних точках. На границах $r=1$ и $r=r_1$ применялось пятиточечное сглаживание [17–19]. Коэффициент b_0 подбирался в процессе расчетов. Шаг Δt выбирается по ячейкам, имеющим наименьшие размеры, и из соображений устойчивости должен удовлетворять условию

$$\frac{\Delta t}{\sqrt{(\Delta\theta)^2+h_0^2}}\leqslant\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\qquad\lambda<1\tag{2.6}$$

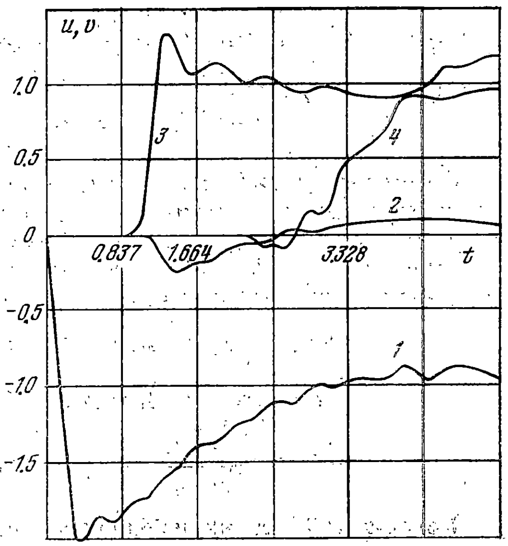
3. Расчеты производились на сетке $M=20$, $N=30$. При этом шаг по углу $\Delta\theta=0.1047$, шаг по времени $\Delta t=0.0837$, $r_1=7.3289$. Интенсивность падающей волны принималась равной единице, форма волны принималась треугольной и характеризовалась двумя параметрами: временем нарастания t_n и временем длительности t_g. Коэффициент в операторе сглаживания $b_0=0.2$, а значение коэффициента μ варьировалось.

На фигурах представлены результаты расчетов для формы волны, взятой в виде ступенчатой функции Хевисайда. Для этого выбирается $t_n \ll 1$ и $t_g \gg 100$. В этом случае из физических соображений ясно, что при больших значениях времени t около полости должно устанавливаться некоторое стационарное распределение напряжений. При этом во всех точках среды будет одинаковая скорость. Распределение напряжений можно получить, решив статическую задачу о полости в безграничной среде, с условиями на бесконечности, порожденными «прошедшей» волной.

Применяя метод установления, можно также получить решение статической задачи. Заметим, однако, что



Фиг. 2



Фиг. 3

условия (1.6) для отраженных волн в случае установления дают $\sigma_r^1=0$, $\tau^1=0$ при $r=r_1$, т. е. условия, которые в точной постановке должны выполняться в бесконечности, переносятся на $r=r_1$. Это внесет некоторую погрешность для напряжений вблизи полости, но, как показывают расчеты, эта погрешность тем меньше, чем больше r_1. Решение, полученное методом установления, позволяет оценить точность результатов и характер установления нестационарного решения к статическому.

Решение статической задачи для упругой среды со сферической полостью, свободной от напряжений и с условиями на бесконечности

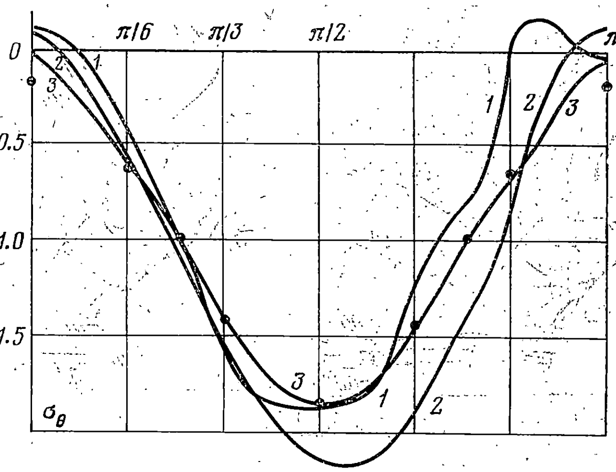
$$\sigma_r=-(1-2\mu\sin^2\theta),\quad \tau=\mu\sin 2\theta,\quad \sigma_\theta=-(1-2\mu\cos^2\theta),\quad \sigma_\varphi=-(1-2\mu) \tag{3.1}$$

можно построить методом, изложенным в [20].

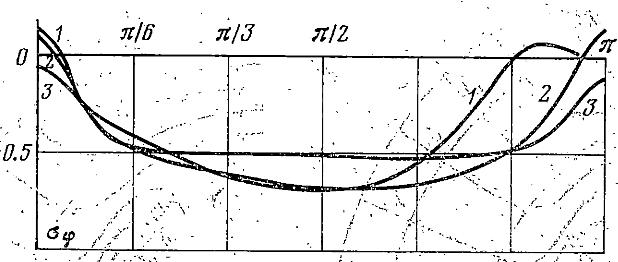
Заметим, что условия (3.1) порождаются прошедшей продольной волной. Для статической задачи на полости при $r=1$ получим следующие выражения для σ_θ и σ_φ:

$$\sigma_\theta=-\frac{3}{2}+\mu\frac{6m}{5-7m}-\mu\frac{30m}{5-7m}\cos^2\theta$$
$$\sigma_\varphi=-\frac{3}{2}+\mu\frac{30-24m}{5-7m}-\mu\frac{30}{5-7m}\cos^2\theta \tag{3.2}$$
$$m=2(1-\mu)/(1-2\mu)$$

Чтобы сравнить конечно-разностное решение с результатами [6, 7], рассчитывался случай $\mu=0.25$, $t_n=0.2$, $t_g=10^{10}$. На фиг. 2 показана зависимость кольцевого напряжения σ_θ от времени в точке $r=1$, $\theta=\pi/2$. Кривая *1* – результаты работы [7], кривая *2* – конечно-разностное решение. Видно, что конечно-разностное решение несколько (5%) превышает максимальное значение, полученное в рядах. Время установления к статическому значению ($\sigma_\theta=-1.781$) согласуется хорошо и составляет восемь пробегов радиуса. На этой же фигуре показаны результаты расчета для $\mu=0.3$, 0.333 (кривые *3*, *4* соответственно). Статические значения соответственно рав-



Фиг. 4



Фиг. 5

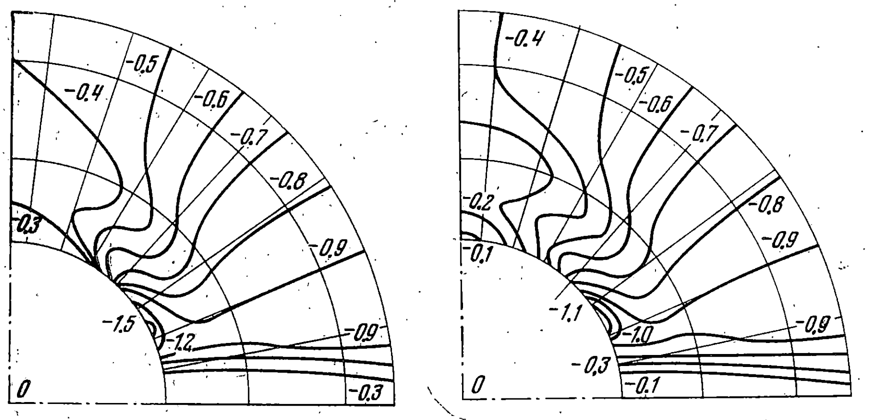
ны $\sigma_\theta=-1.821$, $\sigma_\theta=-1.844$. Видно, что для больших μ максимальные динамические напряжения увеличиваются.

На фиг. 3 показаны зависимости скоростей от времени в различных точках полости для $\mu=0.3$. (Кривые *1*, *2*, *3* соответствуют скоростям $u(0, 0)$, $u(0, \pi/2)$, $v(0, \pi/2)$, а кривая *4* – скорости $u(0, \pi)$). Видно, что присутствие полости сильно меняет скорости в различных точках среды. Так, при $\theta=0$ радиальная скорость удваивается по сравнению со скоростью в падающей волне, что соответствует локальному отражению плоской волны от плоской свободной границы. Скорость v при $\theta=\pi/2$ превышает значение скорости в падающей волне (около 30%). При $t\approx5$ скорости близки к своим стационарным значениям. Как показывают расчеты, при $t>10$ отклонение от стационарных значений составляет менее 3%.

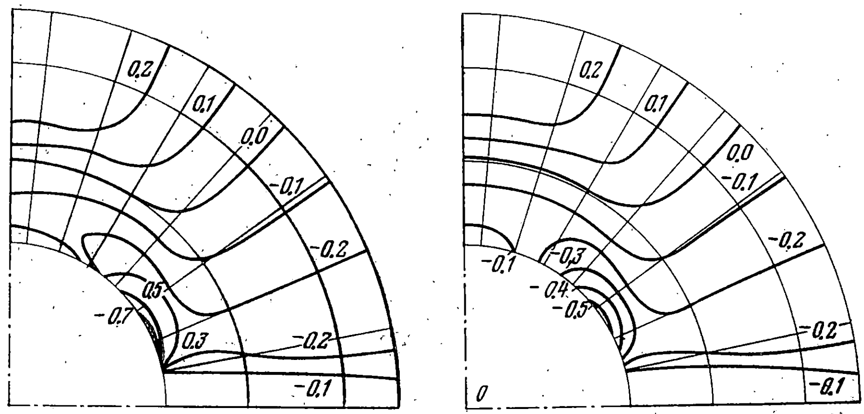
На фиг. 4, 5 построено распределение напряжений σ_θ и σ_φ от угла θ для различных моментов времени. Кривые *1*, *2*, *3* соответствуют времени $t=2.094$, 4.188, 6.983. Кривая, отмеченная точками,– распределение, соответствующее решению статической задачи, полученное по (3.2). Видно, что для $t<5$ в областях $\theta\approx0$ и $\theta=\pi$ имеются растягивающие напряжения σ_θ и σ_φ. При $t>7$ конечно-разностное решение близко к статическому. Заметим, что при использовании сглаживания для $t>10$ происходит уменьшение максимальных значений. Например, при $t=18.849$ напряжение $\sigma_\theta(1, \pi/2)=-1.599$, а при $t=6.983$ напряжение $\sigma_\theta=-1.821$.

Конечно-разностный метод позволяет построить решение во всех точках расчетной области при меньших затратах машинного времени, чем если бы использовались методы [5–8]. Так, время расчета одного варианта, результаты которого представлены ниже, на сетке 20×30 для интервала времени $0<t<10$ составляет на БЭСМ-6 около семи минут. Поэтому возможно анализировать динамические поля напряжений около полости. Такой анализ проводится с целью выявления областей концентрации напряжений. Можно предположить, что именно в этих областях может произойти разрушение среды.

Хотя результаты, полученные для упругой среды, имеют характер прогнозов, можно предположить, что они будут полезными и в других ситуациях. Ниже выбрана следующая форма представления результатов. Построены линии уровня функций $\sigma_\theta(r, \theta, t)$ и $\tau_m=(\sigma_\theta-\sigma_r)/2$ для различных значений времени t, где τ_m – максимальное касательное напряжение, действующее на площадке, перпендикулярной плоскости чертежа и расположенной под углом ±45° к радиусу. На фигурах представлена



Фиг. 6



Фиг. 7

зона вблизи полости $1<r<2.5$, хотя в расчетной области $1<r<7.8$. Именно в этой зоне имеются наибольшие концентрации напряжений, и она должна быть изучена подробно.

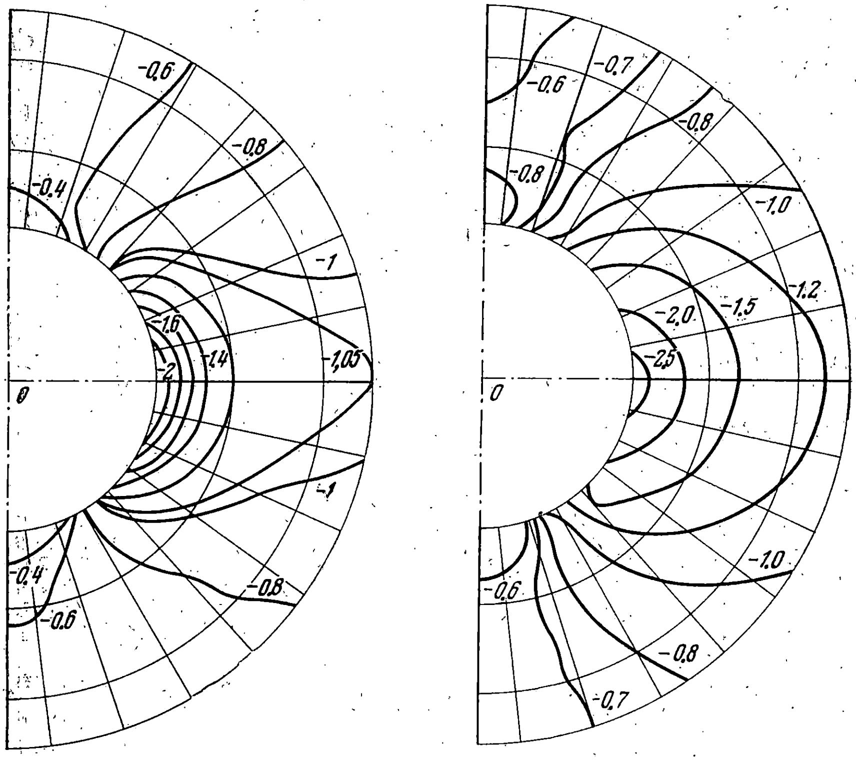
Дифракция на сферической полости представляет собой простейший случай дифракции в пространстве трех измерений. Поэтому представляет интерес сравнить результаты задач о дифракции на сферической и цилиндрической полостях. Такое сравнение позволит оценить влияние пространственности и в каком-то смысле конечности полости, на которой происходит дифракция волны.

Задача о дифракции на цилиндрической полости рассчитывалась по аналогичной методике, описанной в [14]. Некоторые результаты расчетов представлены на фиг. 6–9 (фиг. 6, *а*–9, *а* соответствуют дифракции на сферической полости, а фиг. 6, *б*–9, *б* – на цилиндрической полости)[1].

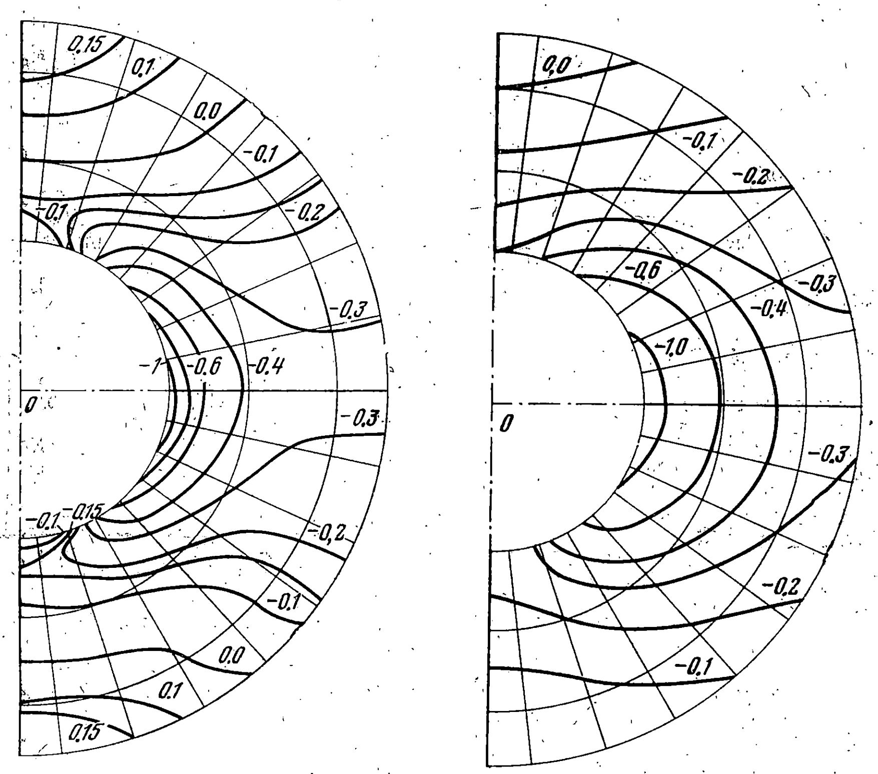
Фиг. 6, 7 относятся ко времени $t=0.837$. Как показывают расчеты, поля σ_r около сферической и цилиндрической полостей при $t=0.837$ отличаются мало. Нужно отметить для обоих случаев появление при малых θ области растягивающих напряжений σ_r. Из фиг. 6, 7 видно, что при $t=0.837$ функции σ_θ и τ_m вблизи сферической полости принимают большие значения, чем у цилиндрической полости, но область, где действуют эти большие напряжения, мала. Таким образом, динамическая концентрация напряжений непосредственно у сферической полости выше, чем у цилиндрической.

Большие напряжения локализуются у сферической полости в гораздо меньших областях и поэтому отдельные точки среды подвержены большим напряжениям в течение меньшего интервала времени по сравнению с временем действия умеренных напряжений около цилиндрической полости. Можно прогнозировать возможный характер разрушения среды около полостей. Так, при малых углах θ возможен откол,

[1] Подробные результаты см: *Ковшов А. Н.* Взаимодействие упругой волны со сферической полостью. Численное решение. М., Ин-т проблем механики АН СССР, 1978, препринт № 109.


-0,6
-0,8
-0,4
-1
-1,6
-1,4
-2
-1,05
0
-1
-0,4
-0,8
-0,6
-0,7
-0,6
-0,8
-0,8
-1,0
-1,2
-1,5
-2,0
-2,5
0
-1,0
-0,6
-0,8
-0,7

Фиг. 8


0,15
0,1
0,0
-0,1
-0,1
-0,2
-0,3
-1
-0,6
-0,4
0
-0,3
-0,1
-0,15
-0,2
-0,1
0,0
0,1
0,15
0,0
-0,1
-0,2
-0,6
-0,3
-0,4
-1,0
0
-0,3
-0,2
-0,1

Фиг. 9

а в зоне отражения падающей волны вероятнее разрушение от τ_m, т. е. «сколом». Как и следовало ожидать, в случае сферической полости «концентрации» сильнее «затухают» от расстояния от полости, чем в цилиндрическом случае.

Фиг. 8, *а*, 9, *а* относятся к $t=4.56$, а 8, *б*, 9, *б* – к $t=5.86$. Как показывают расчеты, для этих значений времени σ_θ и τ_m принимают наибольшие значения на полости. При этом распределение по углу обладает симметрией, как и для случая статической задачи, но концентрация напряжений несколько выше, особенно при дифракции на сферической полости. Так, например, при $\mu=0.3$ и $\theta=\pi/2$ статическое напряжение $\sigma_\theta/\sigma_0=1.821$, а в динамике $\sigma_\theta/\sigma_0=2.10$ при $t=4.16$. При этих значениях t области с большими по модулю значениями σ_θ и τ_m в случае цилиндрической полости занимают большую часть окрестности. При этом и сами значения σ_θ и τ_m больше для цилиндрической полости. Поэтому можно предположить, что и разрушению в этом случае будет подвержена большая часть окрестности, причем характер разрушения – скол. Заметим, что при $t=5.86$ уже возможно сказывается выглаживание решения. Поэтому максимальные значения напряжений у цилиндрической полости могут оказаться несколько заниженными.

Автор благодарит Н. В. Зволинского за внимание к работе.

Поступила 27 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baron M. L., Matthews A. T.* Diffraction of a pressure wave by a cylindrical cavity in an elastic medium. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1961, vol. 28, No. 3. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1961, № 3).
2. *Baron M. L., Parnes R.* Displacements and velosities produced by the diffraction of a pressure wave by a cylindrical cavity in an elastic medium. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, No. 2. (Рус. перев.: Прикл. механ Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1962, № 2.)
3. *Яворская И. М.* Дифракция плоских стационарных упругих волн на гладких выпуклых цилиндрах. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
4. *Mow C. C., Workman J. W.* Dynamic stresses around a fluid-filled cavity. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1966, vol. 33, No. 4. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1966, № 4.)
5. *Norwood E. R., Miklowitz J.* Diffraction of transient elastic waves by a spherical cavity. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1967, vol. 34, No. 3. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1967, № 3.)
6. *McLeary R.* The interaction of a plane wave with a spherical cavity. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1969, vol. 36, No. 3. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1969, № 3.)
7. *Huang H., Wang Y. F.* Transient stress concentration by a spherical cavity in an elastic medium. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1972, vol. 39, No. 4. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1972, № 4.)
8. *Дашевский М. А.* Расчет полостей в упругой среде на действие нестационарной плоской волны сжатия. Строительная механика и расчет сооружений, 1976, № 3.
9. *Ko W. L., Karlsson T.* Application of Kirchhoff's integral equation formulation to an elastic wave scattering problem. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1967, vol. 34, No. 4. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1967, № 4.)
10. *Kromm A.* Zur Ausbreitung von Stroswellen in Kreislochscheiben. Z. angew. Math. und Mech., 1948, Bd 28, H 4.
11. *Кубенко В. Л.* Про розв'язок задач дифракції нестаціонарних пружиних хвиль на перешкодах циліндричної і сферичної форми Доп. АН УРСР, Сер. А, 1975, № 10.
12. *Скобеев А. М.* Дифракция упругой волны на диске. ПМТФ, 1972, № 3.
13. *Скобеев А. М.* Взаимодействие упругой волны с пластинкой. ПМТФ, 1972, № 2.
14. *Ковшов А. Н.* О дифракции нестационарной упругой волны на цилиндрической полости. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 4.
15. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
16. *Clifton R. J.* A difference method for plane problems in dynamic elasticity. Quart. Appl. Math., 1967, vol. 25, No. 1. (Рус. перев.: Механ. Сб. перев., 1968, № 1.)
17. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М., «Мир», 1972.
18. *Росляков Г. С., Сухоруков В. П.* Применение сглаживания к расчету разрывных течений. В сб.: Вычислительные методы и программирование, т. 15. Изд-во МГУ, 1970.
19. *Ляхов В. И.* Сглаживание и искусственная вязкость при расчетах двумерных нестационарных течений с разрывами. В сб.: Численные методы в механике сплошной среды, т. 5 вып. 3. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1974.
20. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.