

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ
КРУЧЕНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ
КОНЕЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТИПА МЕЛЕРА — ФОКА

Я. С. УФЛЯНД

(Ленинград)

Рассмотрены задачи о кручении тел, поверхности которых описываются системой тороидальных координат. В случае неполной сферической луночки точное решение найдено с помощью некоторого интегрального преобразования, названного конечным преобразованием типа Мелера — Фока. В более сложных задачах со смешанными краевыми условиями (например для пространства, содержащего тороидальную полость и круговую щель), применен метод парных рядов, содержащих присоединенные функции Лежандра. Найдены специальные разрывные ряды, позволяющие свести уравнения в парных рядах к интегральному уравнению Фредгольма.

1. Рассмотрим упругое тело, называемое неполной сферической луночкой и ограниченное в системе тороидальных координат (α, β, φ) частями поверхностей тора $(\alpha = \gamma)$ и двух сфер $(\beta = \beta_{1,2})$, пересекающихся по окружности $\alpha = \infty$ (меридиональное сечение представлено на фиг. 1). При этом введенные координаты определяются соотношениями [1]:

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \alpha \cos \varphi}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \quad y = \frac{a \operatorname{sh} \alpha \sin \varphi}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \quad z = \frac{a \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \quad (1.1)$$

Будем предполагать, что заданные касательные напряжения $\tau_{\alpha\varphi}$ приложены как к сферическим поверхностям $\beta = \beta_{1,2}$ луночки, так и к поверхности $\alpha = \gamma$ тороидальной выемки. Тогда задача сводится к решению уравнения для функции напряжений [2]:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad r = \frac{a \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \quad (1.2)$$

при граничных условиях¹

$$\Phi(\alpha, \beta_{1,2}) = - \int_0^\alpha (\tau_{\beta\varphi} r^2 h)_{\beta=\beta_{1,2}} d\alpha = \Phi_{1,2}(\alpha), \quad h = \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \quad (1.3)$$

$$\Phi(\gamma, \beta) = - \int_0^\gamma (\tau_{\beta\varphi} r^2 h)_{\beta=\beta_{1,2}} d\alpha - \int_{\beta_{1,2}}^\beta (\tau_{\alpha\varphi} r^2 h)_{\alpha=\gamma} d\beta = \Phi_\gamma(\beta)$$

Нетрудно проверить, что функция $\omega = r^{-2} \Phi$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta \omega - 4r^{-2} \omega = 0 \quad (1.4)$$

¹ Полученных из соотношения $r^2 \tau_{\alpha\varphi} = -\partial \Phi / \partial s$ и условия на оси $\Phi(0, \beta) = 0$ (с учетом требования равновесия).

Делая подстановку $\omega = [\sqrt{\text{ch } \alpha + \cos \beta}]^{1/2} f$ и учитывая, что функция $\omega e^{2i\varphi}$ является гармонической, получаем для $f(\alpha, \beta)$ уравнение [1]:

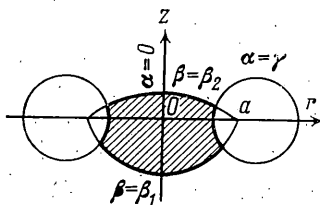
$$\frac{1}{\text{sh } \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\text{sh } \alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{\text{sh}^2 \alpha} \right) f + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} = 0 \quad (1.5)$$

и краевые условия

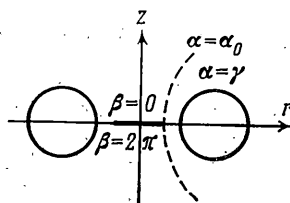
$$a^2 f(\alpha, \beta_{1,2}) = \text{sh}^{-2} \alpha (\text{ch } \alpha + \cos \beta_{1,2})^{1/2} \Phi_{1,2}(\alpha) = a^2 f^{1/2}(\alpha) \quad (1.6)$$

$$a^2 f(\gamma, \beta) = \text{sh}^{-2} \gamma (\text{ch } \gamma + \cos \beta)^{1/2} \Phi_{\gamma}(\beta) = a^2 f_{\gamma}(\beta) \quad (1.7)$$

Так как в полученной задаче (1.5)–(1.7) все граничные условия неоднородны, то для ее решения целесообразно применить метод Г. А. Грин-



Фиг. 1



Фиг. 2

берга [3]. В соответствии с этим осуществляем в (1.5) разделение переменных и ищем решение в виде разложения¹

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n^{-1} f_n(\beta) y_n(\alpha), \quad N_n = \int_0^{\gamma} y_n^2(\alpha) \text{sh } \alpha \, d\alpha \quad (1.8)$$

по ортогональным собственным функциям краевой задачи

$$\frac{1}{\text{sh } \alpha} \frac{d}{d\alpha} \left(\text{sh } \alpha \frac{dy_n}{d\alpha} \right) + \left(\lambda_n - \frac{4}{\text{sh}^2 \alpha} \right) y_n = 0 \quad (1.9)$$

$$y_n(0) < \infty, \quad y_n(\gamma) = 0$$

Решая уравнение (1.9), находим

$$\lambda_n = -\nu_n(\nu_n + 1), \quad y_n(\alpha) = P_{\nu_n}^2(\text{ch } \alpha), \quad \nu_n = -1/2 + i\tau_n \quad (1.10)$$

где $P_{\nu}^m(\text{ch } \alpha)$ — присоединенные функции Лежандра первого рода, а вещественный числа τ_n — корни уравнения²

$$P_{-1/2+i\tau}^2(\text{ch } \gamma) = 0 \quad (1.11)$$

Для нахождения искомых величин

$$f_n(\beta) = \int_0^{\gamma} f(\alpha, \beta) y_n(\alpha) \text{sh } \alpha \, d\alpha \quad (1.12)$$

умножим (1.5) на $\text{sh } \alpha y_n(\alpha)$ и проведем в первом слагаемом двукратное интегрирование по частям. Используя (1.7), получим для $f_n(\beta)$ неодно-

¹ Аналогичные разложения рассматривались в [4, 5].

² О корнях функции $P_{\nu}^m(\text{ch } \gamma)$ см. [6].

родное уравнение

$$f_n'' - \tau_n^2 f_n = \text{sh } \gamma f_\tau(\beta) y_n'(\gamma) \quad (1.13)$$

общее решение которого можно записать в виде

$$f_n = \frac{A_n^{(1)} \text{sh } \tau_n(\beta_2 - \beta) + A_n^{(2)} \text{sh } \tau_n(\beta - \beta_1)}{\text{sh } \tau_n(\beta_2 - \beta_1)} + f_n^\circ(\beta) \quad (1.14)$$

где $f_n^\circ(\beta)$ — частное решение уравнения (1.13).

Подставляя далее (1.14) в (1.8) и применяя оставшиеся условия (1.6), находим

$$A_n^{(1,2)} = \int_0^\gamma f^{(1,2)}(\alpha) y_n(\alpha) \text{sh } \alpha \, d\alpha - f_n^\circ(\beta_{1,2}) \quad (1.15)$$

на этом заканчивается общее решение поставленной задачи.

В качестве конкретного примера рассмотрим сферу радиуса a ($-\beta_1 = -\beta_2 = \pi/2$), ослабленную экваториальной выточкой ($\alpha = \gamma$) и скручиваемую поверхностной нагрузкой $\tau_{\theta\varphi}(a, \theta) = \tau_0 \sin \theta \cos \theta$ (ρ, θ — сферические координаты). Численные расчеты проводились для некоторых значений параметра $b = a \text{th } ^{1/2} \gamma$ — расстояния от центра сферы до дна выточки. Результаты вычислений максимального касательного напряжения $\tau = \tau_{\theta\varphi}(b, \pi/2)$ в плоскости $z=0$ приведены ниже

b/a	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
τ/τ_0	3.43	2.64	2.32	2.11	2.02

По этим данным можно судить о сравнительной степени концентрации напряжений, вызванной наличием выточки, ибо для рассматриваемого конкретного типа нагружения в случае полной сферы имеется решение в явном виде $u_\varphi = \tau_0 r z / G a$; причем напряжения в плоскости $z=0$ распределены по линейному закону $\tau_{\theta\varphi}(r, \pi/2) = \tau_0 r / a$.

Заметим, что аналогичным способом можно найти точное решение некоторых задач теории потенциала (например задачи Дирихле) для неполной сферической луночки. При этом уравнение (1.11) заменится на более общее¹

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m (\text{ch } \gamma) = 0 \quad (1.16)$$

В подобных задачах искомую величину вида (ср. (1.12)):

$$f_n = \int_0^\gamma f(\alpha) P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}^m (\text{ch } \alpha) \text{sh } \alpha \, d\alpha$$

естественно назвать конечным интегральным преобразованием типа Мелера — Фока² заданной функции $f(\alpha)$.

2. Переходя к смешанным задачам теории кручения, разрешимым с помощью указанного преобразования, рассмотрим сначала простейшую задачу о кручении упругого пространства, ослабленного тороидальной полостью и круговой щелью (фиг. 2). Предполагается, что напряженно-деформированное состояние создано касательными напряжениями, приложенными к поверхности полости ($\alpha = \gamma$) и к берегам разреза ($\beta = 0$ и $\beta = 2\pi$, $0 \leq \alpha < \alpha_0$).

¹ В случае осевой симметрии $m=0$.

² О классическом преобразовании Мелера — Фока см. [1, 7].

Представляется удобным разбить поставленную задачу на две — симметричную и антисимметричную относительно плоскости $z=0$. В первой из них касательные напряжения в противолежащих точках $(\alpha, 0)$ и $(\alpha, 2\pi)$ разреза (а также в точках γ, β и $\gamma, 2\pi-\beta$ полости) имеют одинаковую величину и направление. Нетрудно видеть, что такая задача не является смешанной. В самом деле, из соображений симметрии ясно, что напряжения $\tau_{\beta\varphi}$ на плоскости $z=0$ (вне щели и полости) равны нулю, т. е. задача сводится к кручению полупространства с выемкой ($0 \leq \alpha < \gamma$, $0 < \beta < \pi$), причем на всей границе такого тела заданы касательные напряжения. Так как эта задача есть частный случай ($\beta_1=0, \beta_2=\pi$) рассмотренной в п. 1 несмешанной задачи, то в дальнейшем обратимся ко второй антисимметричной задаче, когда поверхностные усилия в симметричных точках имеют одинаковую величину, но противоположное направление. При этом по симметрии в точках плоскости $z=0$ (вне щели и полости) отсутствует угловое перемещение, т. е.

$$u_{\varphi}(\alpha, 0) = 0 \quad (0 < \alpha < \gamma); \quad u_{\varphi}(\alpha, \pi) = 0 \quad (0 < \alpha < \gamma) \quad (2.1)$$

Воспользовавшись первой из связей [8]:

$$Gr^3 \partial \psi / \partial \alpha = -\partial \Phi / \partial \beta, \quad Gr^3 \partial \psi / \partial \beta = \partial \Phi / \partial \alpha \quad (2.2)$$

где $\psi = u_{\varphi} / r$ — функция перемещений (G — модуль сдвига), поставим следующие краевые условия:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right|_{\beta=\pi} = 0 \quad (0 < \alpha < \gamma);$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} = 0 \quad (\alpha_0 < \alpha < \gamma) \quad (2.3)$$

Присоединяя к ним равенства, эквивалентные заданию напряжений на поверхностях щели и полости

$$\Phi(\alpha, 0) = - \int_0^{\alpha} (\tau_{\beta\varphi} r^2 h)_{\beta=0} d\alpha = \Phi_0(\alpha) \quad (0 \leq \alpha < \alpha_0) \quad (2.4)$$

$$\Phi(\gamma, \beta) = C - \int_0^{\beta} (\tau_{\alpha\varphi} r^2 h)_{\alpha=\gamma} d\beta = \Phi_{\gamma}(\beta) \quad (0 < \beta < \pi)$$

сводим задачу к нахождению функции напряжений $\Phi(\alpha, \beta)$, удовлетворяющей в области $0 \leq \alpha < \gamma, 0 < \beta < \pi$ уравнению (1.2) и смешанным краевым условиям (2.3), (2.4). После определения Φ следует найти функцию перемещений из связей (2.2). При этом в области $\beta=0, \alpha_0 < \alpha < \gamma$ величина ψ постоянна ($\psi = \psi_0$) и для выполнения первого условия (2.1) ($\psi_0 = 0$) необходимо постоянную C , входящую в (2.4), выбрать соответствующим образом¹.

Переходя к решению краевой задачи для функции Φ , применим, как и в п. 1, метод Гринберга, т. е. положим

$$\Phi = r^2 \sqrt{\text{ch } \alpha + \cos \beta} f, \quad f(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n^{-1} f_n(\beta) P_{\nu_n}^2(\text{ch } \alpha) \quad (2.5)$$

¹ Второе условие (2.1) ($\psi(\alpha, \pi) = 0$) выполнено, так как $\psi \rightarrow 0$ на бесконечности ($\beta = \pi, \alpha \rightarrow 0$).

где величина f_n — решение уравнения (1.13); при этом уравнение (1.2) и второе граничное условие (2.4) уже удовлетворены. Полагая

$$f_n = A_n \operatorname{ch} \tau_n \beta + B_n \operatorname{sh} \tau_n \beta + f_n^\circ(\beta) \quad (2.6)$$

и учитывая первое условие в (2.3), находим связь

$$\tau_n (A_n \operatorname{sh} \tau_n \pi + B_n \operatorname{ch} \tau_n \pi) + f_n'(\pi) = 0 \quad (2.7)$$

Оставшиеся граничные условия в (2.3) и (2.4) приводят к уравнениям в парных рядах

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n P_{\nu_n}^2(\operatorname{ch} \alpha) = g(\alpha) \quad (0 \leq \alpha < \alpha_0)$$

$$g(\alpha) = \frac{\Phi_0(\alpha)}{a^2 \operatorname{sh}^2 \alpha} (\operatorname{ch} \alpha + 1)^{1/2} - \sum_{n=1}^{\infty} f_n^\circ(0) P_{\nu_n}^2(\operatorname{ch} \alpha) H_n^{-1}, \quad f_n^{\circ\prime}(0) = f_n^{\circ\prime}(\pi) = 0 \quad (2.8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \operatorname{th} \tau_n \pi C_n P_{\nu_n}^2(\operatorname{ch} \alpha) = 0 \quad (\alpha_0 < \alpha < \gamma)$$

из которых следует определить величины $N_n C_n = -B_n \operatorname{cth} \tau_n \pi$.

Можно показать, что к парным уравнениям вида (2.8) сводится и более общая задача, когда вместо кругового разреза имеется сферическая щель, расположенная на поверхности $\beta = \beta_0$.

В п. 3 будет изложен способ сведения к уравнению Фредгольма парных рядов более общего вида¹ ($m=0, 1, 2, \dots$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n P_{\nu_n}^m(\operatorname{ch} \alpha) = g(\alpha) \quad (0 \leq \alpha < \alpha_0) \quad (2.9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \operatorname{th} \tau_n \pi C_n P_{\nu_n}^m(\operatorname{ch} \alpha) = 0 \quad (\alpha_0 < \alpha < \gamma) \quad (2.10)$$

где $\nu_n = -1/2 + i\tau_n$ — корни уравнения (1.16).

3. В дальнейшем будут использованы разрывные ряды следующего вида ($H(x)$ — функция Хевисайда):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n P_{\nu_n}(\operatorname{ch} \alpha) \sin \tau_n t = \frac{H(t-\alpha)}{\sqrt{2}(\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} \alpha)} - \omega(\alpha, t) \quad (3.1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{cth} \tau_n \pi P_{\nu_n}(\operatorname{ch} \alpha) \cos \tau_n t = \frac{H(\alpha-t)}{\sqrt{2}(\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} t)} - I(\alpha, t) \quad (3.2)$$

$$\beta_n = \frac{(-1)^m \Gamma(1/2 + i\tau_n + m)}{\tau_n N_n \Gamma(1/2 + i\tau_n - m)}$$

¹ Они возникают при использовании тороидальных координат для решения некоторых классов смешанных задач теории потенциала. Однородность уравнения (2.10) не нарушает общности (см. [9]).

$$N_n = \int_0^{\tau} [P_{\nu_n}^m(\operatorname{ch} \alpha)]^2 \operatorname{sh} \alpha d\alpha = \frac{\operatorname{sh}^2 \gamma}{2\tau_n} P_{\nu_n}^m(\operatorname{ch} \gamma) \frac{\partial P_{-\nu_n+i\tau}(\operatorname{ch} \gamma)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\tau_n}$$

$$\omega = 2 \sum_{k=1}^m Q_{k-1}^m(\operatorname{ch} \gamma) \left[\frac{\partial P_{\nu}^m(\operatorname{ch} \gamma)}{\partial \nu} \right]_{\nu=k-1}^{-1} P_{k-1}(\operatorname{ch} \alpha) \operatorname{sh} \left(k - \frac{1}{2} \right) t$$

$$I = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n Q_{n-1/2}^m(\operatorname{ch} \gamma) [P_{n-1/2}^m(\operatorname{ch} \gamma)]^{-1} P_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha) \operatorname{ch} nt$$

$$\delta_n = 1/2, \quad n=0; \quad \delta_n = 1, \quad n \geq 1$$

где $Q_{\nu}^m(x)$ — присоединенные функции Лежандра второго рода, а числа $\nu_n = -1/2 + i\tau_n$ — комплексные корни уравнения (1.16).

Для вывода соотношения (3.1) применим теорему о вычетах к функции

$$F(z) = Q_{-1/2-iz}^m(\operatorname{ch} \gamma) [P_{-1/2+iz}^m(\operatorname{ch} \gamma)]^{-1} P_{-1/2+iz}(\operatorname{ch} \alpha) \sin zt \quad (3.3)$$

выбирая за контур интегрирования полуокружности c_n радиуса ε , расположенные между ними отрезки вещественной оси и полуокружность C_R (фиг. 3). Учитывая, что функция $F(z)$ имеет конечное число простых полюсов в точках $z_k = i(k-1/2)$, $1 \leq k \leq m$, заменяя интегралы по контурам c_n полувычетами в полюсах $\pm \tau_n$ и переходя к пределу² при $\varepsilon \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$, будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) d\tau = 2\pi i \sum_{k=1}^m (a_{-1})_{z=z_k} + \pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_{-1})_{z=\tau_n} \quad (3.4)$$

Вычисление вычетов дает

$$(a_{-1})_{z=z_k} = Q_{k-1}^m(\operatorname{ch} \gamma) \left[\frac{\partial P_{\nu}^m(\operatorname{ch} \gamma)}{\partial \nu} \right]_{\nu=k-1}^{-1} P_{k-1}(\operatorname{ch} \alpha) \operatorname{sh} \left(k - \frac{1}{2} \right) t$$

$$(a_{-1})_{z=\tau_n} = Q_{-1/2-i\tau_n}^m(\operatorname{ch} \gamma) \left[\frac{\partial P_{-1/2+iz}^m(\operatorname{ch} \gamma)}{\partial z} \right]_{z=\tau_n}^{-1} P_{\nu_n}(\operatorname{ch} \alpha) \sin \tau_n t \quad (3.5)$$

причем последнее выражение с учетом значения вронскиана функций $P_{\nu_n}^m(\operatorname{ch} \alpha)$ и $Q_{\nu_n}^m(\operatorname{ch} \alpha)$ может быть преобразовано к виду

$$(a_{-1})_{z=\tau_n} = 1/2 \beta_n P_{\nu_n}(\operatorname{ch} \alpha) \sin \tau_n t \quad (3.6)$$

Для вычисления интеграла в левой части (3.4) применим соотношение [1]:

$$\operatorname{Im} Q_{-1/2-i\tau}^m(\operatorname{ch} \gamma) = \frac{\pi}{2} \operatorname{th} \pi \tau P_{-1/2+i\tau}^m(\operatorname{ch} \gamma) \quad (3.7)$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) d\tau = \pi i \int_0^{\infty} P_{-1/2+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) \operatorname{th} \pi \tau \sin \tau t d\tau \quad (3.8)$$

¹ Для случая $m=0$ этот прием был указан в [9].

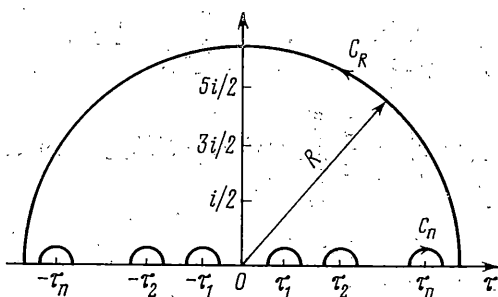
² Можно показать, что при этом $\int_{C_R} F(z) dz \rightarrow 0$.

Если теперь воспользоваться известным синус-интегралом Мелера [7]:

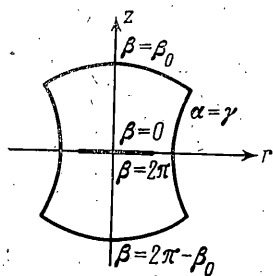
$$\int_0^\infty P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \operatorname{th} \pi\tau \sin \pi\tau \, d\tau = [2(\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} \alpha)]^{-\frac{1}{2}} H(t-\alpha) \quad (3.9)$$

то равенство (3.4) переходит в (3.1).

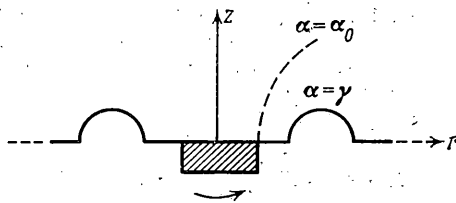
Формула (3.2) для другого разрывного ряда получается аналогично, если в выражении (3.3) заменить функцию $\sin zt$ на $\operatorname{cth} zt \cos zt$; при этом вместо z_n возникнут простые полюса $z_n = ni$ ($n \geq 0$), а для вычисления левой



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

части (3.4) следует использовать косинус-интеграл Мелера ([7], дополнение 2).

Переходя к решению уравнений в парных рядах (2.9), (2.10), положим

$$\operatorname{th} \tau_n \pi C_n = \beta_n \int_0^{\infty} \varphi(t) \cos \tau_n t \, dt \quad (3.10)$$

где $\varphi(t)$ — искомая функция. Подставляя (3.10) в (2.10), пользуясь равенством [1]:

$$P_\nu^m(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^{m/2} \frac{d^m P_\nu(\lambda)}{d\lambda^m}, \quad \lambda = \operatorname{ch} \alpha \quad (3.11)$$

проводя интегрирование по частям, применяя формулу (3.1) и учитывая, что $\partial^m \omega / \partial \lambda^m = 0$, получаем, что уравнение (2.10) удовлетворяется тождественно относительно функции $\varphi(t)$, непрерывной вместе с первой производной.

Уравнение (2.9) с помощью (3.11) можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n P_\nu^n(\operatorname{ch} \alpha) = \int_1^\lambda \int_1^\lambda \dots \int_1^\lambda \frac{g(\alpha) d\lambda^m}{(\lambda^2 - 1)^{m/2}} + \sum_{h=0}^{m-1} c_h P_h(\lambda) = \chi(\alpha) \quad (3.12)$$

где c_k — пока неопределенные постоянные. Подстановка (3.10) в (3.12) с учетом (3.2) дает интегральное уравнение типа Абея

$$\int_0^{\alpha} \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} t)}} = \chi(\alpha) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha_0} \varphi(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n Q_{n-1/2}^m(\operatorname{ch} \gamma) \times \\ \times [P_{n-1/2}^m(\operatorname{ch} \gamma)]^{-1} P_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha) \operatorname{ch} nt dt \quad (3.13)$$

Пользуясь его решением (см., например, [9]), а также получаемым с помощью интегрального представления [5]:

$$P_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} [2(\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} \theta)]^{-1/2} \operatorname{ch} n\theta d\theta$$

равенством

$$\int_0^{\infty} P_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha) [2(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} \alpha)]^{-1/2} \operatorname{sh} \alpha d\alpha = \frac{1}{n} \operatorname{sh} nx$$

приходим к интегральному уравнению Фредгольма

$$\varphi(x) - \int_0^{\alpha_0} K(x, t) \varphi(t) dt = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{\chi(\alpha) \operatorname{sh} \alpha}{\sqrt{2(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} \alpha)}} d\alpha$$

с симметричным ядром

$$K(x, t) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n Q_{n-1/2}^m(\operatorname{ch} \gamma) [P_{n-1/2}^m(\operatorname{ch} \gamma)]^{-1} \operatorname{ch} nx \operatorname{ch} nt \quad (3.14)$$

Определение входящих в решение постоянных c_k можно осуществить с помощью приема, предложенного в [10] и связанного с требованием интегрируемости левой части уравнения (2.10) в области $0 \leq \alpha < \alpha_0$. Выкладки приводят к равенствам

$$\varphi^{(h)}(\alpha_0) = 0 \quad (h=0, 1, \dots, m-1)$$

которые, как нетрудно видеть, являются линейной алгебраической системой для искомых величин¹ c_k .

Применительно к рассмотренной в п. 2 задаче кручения, где $m=2$, условия $\varphi(\alpha_0) = \varphi'(\alpha_0) = 0$ эквивалентны требованиям интегрируемости напряжений $\tau_{\beta\varphi}$ в области $\beta=0$ при подходе к разрезу ($\alpha \rightarrow \alpha_0 + 0$). Можно показать, что их асимптотическое выражение, характеризующее коэффициент интенсивности, имеет вид (при $\alpha \rightarrow \alpha_0 + 0$):

$$\tau_{\beta\varphi}(\alpha, 0) \approx \frac{1}{a} [2(\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} \alpha_0)]^{-1/2} \varphi''(\alpha_0) (\operatorname{ch} \alpha_0 + 1)^{3/2}$$

¹ Использование в (3.12) полиномов $P_k(\lambda)$ вместо степеней λ^k , не являясь принципиальным, представляет, однако, вычислительные преимущества (ср. [10]).

Развитая методика применима и к парным уравнениям более общего вида, в которых под знаком ряда в (2.9) имеется дополнительный множитель $1-g_n$ ($g_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$). Нетрудно проверить, что в этом случае к ядру (3.14) добавляется ряд

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} g_n \beta_n \operatorname{cth} \tau_n \pi \cos \tau_n x \cos \tau_n t$$

Примером соответствующей смешанной задачи является кручение симметричной луночки со щелью (фиг. 4), когда $m=2$ и

$$g_n = [\operatorname{ch} \tau_n (\pi - \beta_0)] / [\operatorname{ch} \tau_n \pi \operatorname{ch} \tau_n \beta_0]$$

Заметим, что метод парных рядов, связанных с конечным преобразованием типа Мелера — Фока, применим и к некоторым контактными задачам, например к задаче о кручении жестким штампом полупространства с поверхностной полусферической канавкой (фиг. 5).

Поступила 1 II 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.—Л., Физматгиз, 1963.
2. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
3. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1948.
4. Vanežji D. P. The expansion of an arbitrary function in a series of conal or toroidal functions. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1938, vol. 31, No. 1.
5. Абрамян Б. Л. Кручение составного вытянутого эллипсоида вращения. Докл. АН АрмССР, 1970, т. 51, № 1.
6. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
7. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
8. Соляник-Красса К. В. Кручение валов переменного сечения. М., Гостехиздат, 1949.
9. Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л., «Наука», 1977.
10. Руховец А. Н., Уфлянд Я. С. Об одном классе парных интегральных уравнений и их приложениях в теории упругости. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.