

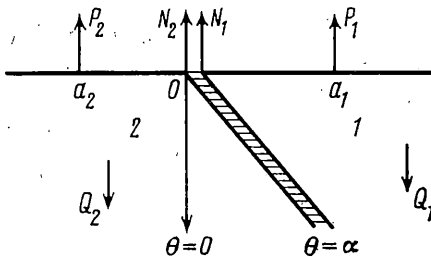
ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГИХ ОБЛАСТЕЙ,
ОСЛАБЛЕННЫХ НЕОДНОРОДНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Б. М. НУЛЛЕР, Л. Ф. СПЕСИВЦЕВА

(Ленинград)

На примере исследования задачи Фламана для упругой полуплоскости, ослабленной прямолинейным наклонным винклеровским включением с переменным коэффициентом постели, описывается метод решения в квадратурах одного класса контактных задач для конических, цилиндрических, клиновидных и полосовых областей, отнесенных в [1] к задачам второго типа. Как и задачи первого типа, в которых включениями и накладками служат оболочки, плиты и стержни переменной жесткости, они сводятся к разностному уравнению Барнса со сдвигом ω — одним из параметров коэффициента постели, но имеют существенные особенности. Наряду с общим случаем ограниченных значений ω задача изучена при $\omega = \mp\infty$, когда включение вырождается во внутреннюю полубесконечную щель или в поверхностный закрытый надрез. Указаны ошибочные результаты, полученные ранее в этом предельном случае.

1. Рассмотрим плоскую деформацию упругого полупространства $0 \leq r < \infty$, $-\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$, ослабленного в плоскости $\theta = \alpha$ неоднородным включением (фигура). Имея в виду различные приложения в теории трещиноватых скальных оснований, будем считать, что включение, представляющее собою слой выветренных пород, в большей степени подвержено сдвигу в плоскости $\theta = \alpha$, чем поперечному сжатию, и что последнее можно не учитывать. Пусть величины касательных напряжений на смежных гранях секторов 1 и 2 одинаковы и пропорциональны взаимному касательному смещению берегов включения



(винклеровская модель); коэффициент пропорциональности (постели) имеет форму $K(r) = (\beta r + \gamma r^{1-\omega})^{-1}$, причем $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$ и ω — любые действительные числа; нормальные перемещения и напряжения в плоскости $\theta = \alpha$ изменяются без скачка.

На границу области в точках $r = a_j$, $\theta = \theta_j$, где $j = 1, 2$, $\theta_1 = \frac{1}{2}\pi$, $\theta_2 = -\frac{1}{2}\pi$, действуют нормальные силы P_j ; касательные нагрузки для простоты исключены из рассмотрения. В точке $r = 0$ нормальные силы N_j приложены к вершинам соответствующих секторов и независимы, если жесткость включения это допускает. Напряжения на бесконечности равны нулю и убывают не медленнее, чем r^{-1} ; через Q_j обозначена проекция на ось $\theta = 0$ их главного вектора в j -м секторе; если это возможно, величины Q_1 и Q_2 также независимы.

Запишем граничные условия задачи

$$\tau_j(r, \theta_j) = 0, \quad \sigma_j(r, \theta_j) = P_j \delta(r - a_j) \quad (1.1)$$

$$v_1(r, \alpha) = v_2(r, \alpha), \quad \sigma_1(r, \alpha) = \sigma_2(r, \alpha), \quad \tau_1(r, \alpha) = \tau_2(r, \alpha) \quad (1.2)$$

$$\tau_1(r, \alpha) = K(r) [u_1(r, \alpha) - u_2(r, \alpha)] \quad (1.3)$$

$$\tau_j(r, \theta), \quad \sigma_j(r, \theta), \quad \sigma_{rj}(r, \theta) = O(r^{-1}) \quad (r \rightarrow \infty) \quad (1.4)$$

Здесь $\tau_j(r, \theta)$ и $\sigma_j(r, \theta)$ — касательные и нормальные напряжения на площадках $\theta = \text{const}$, $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака.

Однородные задачи второго типа (в отличие от задач первого) всегда имеют элементарные решения, определяющие либо растяжение и чистый изгиб цилиндра и полосы, либо деформацию конуса и клина, к вершинам которых приложены сосредоточенные силы и моменты. В данном случае условиям (1.1) — (1.4) при $P_j = 0$ удовлетворяет известное решение задачи Фламана о действии на полуплоскость нормальной силы P :

$$\begin{aligned} u^*(r, \theta) &= P\pi^{-1}G^{-1}[(1-\nu) \ln r \cos \theta + (1/2-\nu)\theta \sin \theta] \\ v^*(r, \theta) &= -P\pi^{-1}G^{-1}\{[(1-\nu) \ln r + 1/2] \sin \theta - (1/2-\nu)\theta \sin \theta\} \\ \tau^*(r, \theta) &= \sigma^*(r, \theta) = 0, \quad \sigma_r^*(r, \theta) = 2P\pi^{-1}r^{-1} \cos \theta \end{aligned} \quad (1.5)$$

а также решение задачи Черрути о действии касательной силы, которое здесь не понадобится, поскольку $\tau_j(r, \theta_j) = 0$.

Используя преобразование Меллина, общее решение задачи (1.1) — (1.4) будем искать отдельно для каждого сектора в виде [2]:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} u_j(r, \theta) \\ v_j(r, \theta) \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} u^*(r, \theta) \\ v^*(r, \theta) \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left\langle (p \pm \kappa) \left[A_j(p) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (p+1)\theta \pm \right. \right. \\ &\quad \left. \pm B_j(p) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (p+1)\theta \right] + (p-1) \left[C_j(p) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (p-1)\theta \pm \right. \\ &\quad \left. \left. \pm D_j(p) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (p-1)\theta \right] \right\rangle \frac{dp}{r^p} \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\kappa = 3 - 4\nu$, контур L — прямая $\text{Re } p = \lambda$.

Подставив (1.6) в условия (1.1) и (1.2), получим

$$\begin{aligned} A_j(p) &= -\frac{D_1(p)}{c_{j1}} \left(p+1 \frac{c_{j2}^- \Delta_1^+}{\Delta_1^-} \right) + \frac{c_{j2}^- \Delta_2}{p(p-1)c_{j1}\Delta_1^-} - \\ &\quad \frac{t_j(p+1) \sin[(p+1)(\alpha-\theta_j)]}{p(p-1)c_{j1}} \\ B_j(p) &= \frac{D_1(p)\Delta_1^+}{\Delta_1^-} - \frac{\Delta_2}{p(p-1)\Delta_1^-}, \quad D_j(p) = \frac{C(p)\Delta_1^- + \Delta_2}{2p \sin^2 \pi p G(p)} \\ C_j(p) &= \frac{D_j(p)}{c_{j1}} \left[c_{j2}^+ + \frac{(p-1)\Delta_1^+}{\Delta_1^-} \right] - \frac{\Delta_2}{c_{j1}\Delta_1^-} + \frac{t_j \sin[(p-1)(\alpha-\theta_j)]}{pc_{j1}} \\ c_{j1} &= p \sin 2\alpha + (-1)^j \sin 2p(\alpha-\theta_j), \quad c_{j2}^\pm = p \cos 2\alpha \pm \cos 2p(\alpha-\theta_j) \\ c_{j3}^\pm &= p \cos^2 \alpha \pm \sin^2 p(\alpha-\theta_j), \quad c_{j4} = p^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 p(\alpha-\theta_j) \\ c_{j5} &= -\sin \alpha \sin p(\alpha-\theta_j) - (-1)^j p \cos(\alpha-\theta_j), \quad t_j = P_j a_j^p \\ G(p) &= \sin^{-1} \pi p [\cos \pi p + (2p^2 \cos^2 \alpha - p \sin 2\alpha \operatorname{tg} 2p\alpha - 1) \cos 2p\alpha] \\ \Delta_1^\pm &= c_{23}^\pm c_{11} - c_{13}^\pm c_{21}, \quad \Delta_2 = t_2 c_{25} c_{11} - t_1 c_{15} c_{21} \\ \Delta_3 &= (p\Delta_1^-)^{-1} \Delta_2 (c_{21} - c_{11}) + p^{-1} \{t_2 c_{11} \sin[(p-1)(\alpha-\theta_2) - \\ &\quad - t_2 c_{21} \sin[(p-1)(\alpha-\theta_1)]\} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь $C(p)$ — трансформанта функции $\tau_1(r, \alpha)$.

Допустим, что на L существует меллиновское обращение функции $C(p)$; в полосе между прямыми L и $\text{Re } p = \lambda - \omega$ эта функция регулярна и

стремится к нулю при $|\operatorname{Im} p| \rightarrow \infty$. Тогда из условия (1.3) обычным путем [1] получим уравнение Барнса [3]:

$$C(p-\omega) = F(p)C(p) + f(p) \quad (p \in L) \quad (1.8)$$

$$F(p) = \frac{-\kappa_1 - \beta p G(p)}{\gamma p G(p)}, \quad f(p) = -\frac{\kappa_1 \Delta_2}{\gamma p G(p) \Delta_1} - \frac{\kappa_1 \Delta_3}{\gamma c_{11} c_{21}}, \quad \kappa_1 = \frac{2(1-\nu)}{G}$$

$$f(iy) = O\{[t_1 - t_2 \exp(-2\alpha|y|)] \exp[|y|(\alpha - 1/2\pi)]\}$$

Используя общий подход [4], коэффициент этого уравнения, как и в задачах первого типа [1, 5-7], будем разлагать в произведение $F(p) = F_1(p)F_2(p)$, где $F_1(p)$ — элементарная функция, а функция $F_2(p)$ на мнимой оси удовлетворяет условию Гельдера, имеет индекс, равный нулю, не обращается в нуль и на бесконечности достаточно быстро стремится к единице. Такая факторизация даст возможность строить решение в наиболее эффективной форме.

Рассмотрим разные сочетания параметров β , γ , ω и их влияние на знак λ . Если $\omega=0$ или $\gamma=0$, то уравнение (1.8) становится тривиальным (например при $\omega=0$ $C(p) = f(p)[1-F(p)]^{-1}$), контур L можно провести и слева, и справа от мнимой оси. Если $\omega < 0$ ($\omega > 0$), то число $\lambda < 0$ ($\lambda > 0$) будем выбирать таким, чтобы в полосе $\lambda \leq \operatorname{Re} p < 0$ ($0 < \operatorname{Re} p \leq \lambda$) функции (1.7) не имели нулей.

Пусть $\beta \neq 0$. Полагая

$$F_1(p) = \beta \gamma^{-1} \operatorname{ctg}^2(1/2\pi\omega^{-1}p) \quad (1.9)$$

в силу (1.8) и (1.7) на мнимой оси iy получим оценки

$$F_2(iy) = 1 + O\{y \exp[|y|(2\alpha - \pi)]\} + O[\exp(-2\pi|y\omega^{-1}|)]$$

$$\operatorname{Re} F_2(iy) > 0, \quad \operatorname{Im} F_2(iy) = 0, \quad \operatorname{Ind} F_2(iy) = 0 \quad (1.10)$$

Каноническое решение однородного уравнения $C_0(p-\omega) = F(p)C_0(p)$ примет вид

$$C_0(p) = (\beta/\gamma)^{-p/\omega} \cos^{-2}(1/2\pi\omega^{-1}p) X(p) \quad (1.11)$$

$$X(p) = Y(p)F_2^{-1} \quad (\omega < \operatorname{Re} p \leq 0, \quad 0 < \operatorname{Re} p \leq \omega)$$

$$X(p) = Y(p) \quad (0 < \operatorname{Re} p \leq -\omega, \quad -\omega < \operatorname{Re} p \leq 0)$$

$$Y(p) = \exp\left[-\frac{1}{2i|\omega|} \int_{-i\infty}^{i\infty} \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-p)}{\omega} \ln F_2(t) dt\right]$$

При $\omega < 0$ это решение характеризует деформацию полуплоскости, в составных частях которой на бесконечности приложены напряжения с главными векторами, связанными равенством $Q_1 = -Q_2$, $P_j = N_j = 0$. При $\omega > 0$ оно соответствует случаю $P_j = Q_j = 0$, $N_1 = -N_2$. Среди задач первого типа указанные решения аналогов не имеют. По своему механическому смыслу они близки к решениям однородных задач о закрытых щелях и совпадают с ними при $\omega \rightarrow \pm\infty$. Подобные предельные задачи ранее рассматривались в [8, 9].

Общее решение уравнения (1.8) имеет вид (где A — произвольная постоянная):

$$C(p) = C_0(p) [A + \cos(\pi\omega^{-1}p) Z(p)] \quad (1.12)$$

$$Z(p) = W(p) - g(p) \quad (\omega < \operatorname{Re} p \leq 0, \quad 0 < \operatorname{Re} p \leq \omega)$$

$$Z(p) = W(p) \quad (0 < \operatorname{Re} p \leq -\omega, \quad -\omega < \operatorname{Re} p \leq 0)$$

$$W(p) = \frac{1}{2i|\omega|} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{g(t) dt}{\sin[\pi\omega^{-1}(t-p)]}, \quad g(p) = \frac{j(p)}{\cos(\pi\omega^{-1}p)C_0(p-\omega)}$$

Пусть $\beta=0$. Тогда в решении (1.9)–(1.12) изменятся только функции $F_1(p)$, $F_2(p)=F(p)F_1^{-1}(p)$ и $C_0(p)$:

$$F_1(p) = \kappa_1 \gamma^{-1} p^{-1} \operatorname{ctg} (\frac{1}{2}\pi |\omega|^{-1} p) \tag{1.13}$$

$$C_0(p) = (\kappa_1^{-1} \gamma |\omega|)^{p/\omega} \cos (\frac{1}{2}\pi \omega^{-1} p) \Gamma(1+p/\omega) X(p) \tag{1.14}$$

Формулы (1.8), (1.9) и (1.13) показывают, что с ростом $|\omega|$ сходимость интеграла в (1.11) ухудшается, и в нем нельзя перейти к пределу при $|\omega| \rightarrow \infty$. Этот недостаток можно устранить¹. Ограничиваясь случаем $\beta=0$, положим вместо (1.13) и (1.14) [1]:

$$F_1(p) = \kappa_1 \gamma^{-1} p^{-1} \operatorname{ctg} (\pi p) \tag{1.15}$$

$$C_0(p) = (\kappa_1^{-1} \gamma \omega^2)^{p/\omega} \Gamma^2(1+p/\omega) T(p, \omega) X(p)$$

$$T(p, \omega) = \prod_{s=1}^{\infty} \Gamma\left(\frac{s-1/2+p}{-\omega}\right) \Gamma\left(1-\frac{s-p}{\omega}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{s+p}{-\omega}\right) \times \\ \times \Gamma^{-1}\left(1-\frac{s-1/2-p}{\omega}\right) \left(1-\frac{1}{2s}\right)^{1+2p/\omega}$$

$$T(0, \omega) = 1, \quad T(p, \pm\infty) = \pi^{-1/2} \Gamma(p+1/2) \Gamma^{-1}(p+1)$$

Входящая в (1.15) функция $X(p)$, а также общее решение уравнения Барнса $C(p)$ по-прежнему выражаются формулами (1.14), (1.12).

Найдем постоянные A и P . С этой целью разложим интегралы (1.6) в ряды по вычетах: при $\omega < 0$ – в полюсах подынтегральных функций, расположенных в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$, при $\omega > 0$ – в полюсах из полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$. Очевидно, отличными от нуля будут только главные векторы напряжений, порождаемых полюсом $p=0$. Но оказывается, что и в этом полюсе существенную роль играют лишь вычеты трансформант $\sigma_{r_j}(r, \theta)$, а трансформанты $\tau_j(r, \theta)$ имеют в нем устранимые особенности. Вычисляя для j -го сектора вертикальную составляющую главного вектора суммы указанных напряжений и напряжений $\sigma_{r_j}^*(r, \theta)$ в решении Фламанна, приравнивая ее заданным величинам Q_j при $\omega < 0$ или N_j при $\omega > 0$, получим

$$A = Z(0) + \left[R + \frac{P}{2\pi} (\pi - 2\alpha - \sin 2\alpha) - \frac{(t_1+t_2) (\frac{1}{2}\pi - \alpha) [d(\alpha) - \pi \cos^2 \alpha]}{\pi \cos \alpha (\sin 2\alpha - 2\alpha + \pi)} \right] \times \\ \times \frac{\cos^2 \alpha \sin 2\alpha}{\cos \alpha (\cos^2 \alpha - \frac{1}{4}\pi^2 + \alpha^2) X(0)} + \frac{(t_1+t_2) d(\alpha) + (t_1-t_2) \pi \cos^2 \alpha}{2\pi \cos^2 \alpha X(0)} \tag{1.16}$$

$$d(\alpha) = \frac{1}{2}\pi^2 \sin \alpha - (\sin 2\alpha - 2\alpha) (\cos \alpha - \alpha \sin \alpha)$$

Здесь при $\omega < 0$, $R=Q_1$, $P=N_1+N_2$, величины N_1 и N_2 задаются в сумме как вертикальная сила P , приложенная к полуплоскости, и не могут быть независимыми, поскольку при $r \rightarrow 0$ жесткость включения неограниченно возрастает. В итоге из параметров P , P_j и Q_j любые четыре произвольны, а пятый определяется условием равновесия полуплоскости. При $\omega > 0$

¹ Заметим, что в [1] здесь допущена ошибка: в формулах (2.22) и (3.18) следует вычеркнуть π .

$R = -N_1$, $P = P_1 + P_2 + N_1 + N_2$, величины Q_1 и Q_2 зависимы, по условию равновесия $Q_1 + Q_2 = P_1 + P_2 + N_1 + N_2$, где P_i и N_i произвольны.

Построенное решение наиболее интересно для приложений при $\beta = 0$, $\omega = 1$ и при $\beta = 0$, $\omega = \pm\infty$. Первый случай, отвечающий однородному включению, не вносит существенных упрощений в общие формулы, второму посвящен п. 2.

Переходя к обобщениям, прежде всего отметим, что к уравнению (1.8) сводятся также задачи о включениях, заполняющих координатные цилиндрические щели в цилиндрах, конические щели в конусах, произвольно расположенные прямолинейные координатные щели в клине и полосе. При этом по обе стороны от щелей упругие постоянные материала могут быть неодинаковыми, а пространственные области можно заменить соответствующими оболочками, плитами или стержнями. Предельные задачи такого рода описаны в [10]. Уравнение (1.8) и его решение сохраняют свой вид, если, несколько усложняя коэффициент постели включения, положить

$$K(r) = \frac{\beta_1 + \gamma_1 r^{-\omega}}{r(\beta_2 + \gamma_2 r^{-\omega})}, \quad K(z) = \frac{\beta_1 + \gamma_1 e^{\omega z}}{\beta_2 + \gamma_2 e^{\omega z}} \quad (1.17)$$

где постоянные β_s , γ_s и ω имеют прежний смысл, r — радиальная координата в клине и конусе, z — продольная координата в полосе и цилиндре. Обобщение (1.17) позволяет изучать контактные задачи, в которых ω определяет величину переходной зоны между постоянными жесткостями включения $K(z) \sim \beta_1 \beta_2^{-1}$ и $K(z) \sim \gamma_1 \gamma_2^{-1}$, на задачи первого типа оно не распространяется. Наконец, во всех перечисленных задачах функции $K(r)$ и $K(z)$ могут описывать как сдвиговые свойства включений, так и их поперечную жесткость.

2. Нетрудно видеть, что при $\omega = \pm\infty$, когда жесткость включения в точке $r=1$ претерпевает бесконечный разрыв, по одну сторону от этой точки щель полностью заклеивается, а по другую — становится обычным закрытым надрезом или заполняется винклеровским слоем с коэффициентом постели $K(r) = \beta^{-1} r^{-1}$. Это означает, что при $\omega = \pm\infty$ основная задача для неоднородной области переходит в смешанную задачу для области однородной. Указанный предельный переход можно повторить во всех случаях, когда речь идет об уравнениях среды и координатных системах, к которым применимы преобразования Лапласа или Меллина. Ранее такого рода смешанные задачи о конических, цилиндрических и несимметричных плоских щелях с линией раздела одного типа граничных условий исследовались с помощью метода Винера — Хопфа [8–12]. Для решения более сложных задач о несимметричных щелях в плоских клиновидных областях специального вида разработан матричный аналог этого метода [13]. Учитывая простоту и естественность рассуждений, приводящих к разностным уравнениям (в большинстве работ они получены независимо, см., например, [14–16, 5]), хотелось бы обратить внимание на то, что значительный прогресс в решении смешанных задач, достигнутый благодаря развитию метода Винера — Хопфа, мог быть основан и на более ранней работе [3]. По существу метод Барнса — это обобщение метода бесконечных произведений [19], вытесненного в последнее время более эффективной процедурой сведения уравнения Винера — Хопфа к краевой задаче Римана. Здесь аналогичная упрощающая процедура в отношении уравнения Барнса основана на результатах [17, 5, 1].

Итак, пусть $\beta = 0$, $\omega = -\infty$. Тогда условие (1.3) принимает вид

$$u_1(r, \alpha) = u_2(r, \alpha) \quad (r \leq 1), \quad \tau_1(r, \alpha) = 0 \quad (r > 1) \quad (2.1)$$

и определяет, вместе с условием (1.1), (1.2), положение закрытой полубесконечной щели внутри полуплоскости. Если же $\beta = 0$, $\omega = \infty$, то (1.3) переходит в условие на поверхностном надрезе единичной длины

$$u_1(r, \alpha) = u_2(r, \alpha) \quad (r \geq 1), \quad \tau_1(r, \alpha) = 0 \quad (r < 1) \quad (2.2)$$

Полагая в формулах (1.11) (для $X(p)$ и $Y(p)$), (1.12), (1.15) (для $C_0(p)$ и $T(p, \omega)$) $\omega = \pm\infty$, получим

$$C(p) = C_0(p) [A + Z(p)], \quad C_0(p) = \pi^{-1/2} \Gamma(p+1/2) \Gamma^{-1}(p+1) X(p)$$

$$Y(p) = \exp \left[\mp \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln F_2(t) dt}{t-p} \right], \quad F_2(p) = -\frac{\operatorname{tg} \pi p}{G(p)} \quad (2.3)$$

$$W(p) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{g(t) dt}{t-p}, \quad g(p) = \frac{f(p)}{F(p)C_0(p)}$$

При этом для задачи (1.1), (1.2), (2.1) имеем

$$\begin{aligned} X(p) &= Y(p)F_2^{-1}(p), \quad Z(p) = W(p) - g(p) \quad (\operatorname{Re} p \leq 0) \\ X(p) &= Y(p), \quad Z(p) = W(p) \quad (\operatorname{Re} p > 0) \end{aligned}$$

Для задачи (1.1), (1.2), (2.2) здесь нужно только поменять местами неравенства.

Напряженное состояние полуплоскости на продолжении щели вблизи точки $r=1$ нетрудно найти при помощи обычных асимптотических оценок [19]. Например, учитывая, что $C(p)$ — трансформант функции $\tau_j(r, \alpha)$, для касательных напряжений получим ($r \rightarrow 1 \pm 0$ при $\omega = \pm\infty$):

$$\tau_j(r, \alpha) = \pi^{-1} A |1-r|^{-1/2} + O(|1-r|^{1/2})$$

Задача, несколько более общая, чем (1.1), (1.2), (2.2) — с условием предельного трения на берегах конечного надреза — рассмотрена в [14]. Однако при ее решении допущены некоторые ошибки. Во-первых, в [14] не учитывается, что индекс коэффициента Гельдера в задаче Римана (3.2) не равен нулю. Это приводит к нарушению условия Гельдера на контуре L в связи с выбором на нем разрывных ветвей функции $\ln G(p)$ или, если считать указанную функцию непрерывной на соответствующей римановой поверхности, — к расходимости интеграла (3.3).

Во-вторых, выписанное в начале п. 2 ограничение на рост напряжений при $r \rightarrow 0$ в дальнейшем не используется, что влечет за собой возникновение в точке $r=0$ неконтролируемых сил (в принятых обозначениях N_1 и $N_2 = -N_1$). Требуется уточнения и физическая постановка задачи. Контактное трение по своей природе может быть допределенным, поэтому нельзя без оговорок ставить условие (1.6) в виде строгого равенства.

Например, в случае однородного сжатия на бесконечности при любых $p_0 > 0$ и $\alpha < \rho$ (ρ — угол трения) самое естественное из бесчисленного множества напряженных состояний полуплоскости остается элементарным: $\sigma_y = -p_0$, $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$. Надрез не окажет на него никакого влияния.

Аналогичная задача в [12] рассмотрена при условии (2.5), противоречащем принципу Сен-Венана и не обеспечивающем единственности решения. Принимая во внимание частный характер заданной нагрузки, устойчивое и физически реальное решение этой задачи можно построить на контуре L , предварительно сдвинутом вправо на $1/2$, тогда $K^\pm(p) = \Gamma(1 \mp p) \Gamma^{-1}(1/2 \mp p)$. В задаче Римана (3.1) за контур прощито всего взять мнимую ось: на ней $\operatorname{Ind} G(p) = 0$.

Поступила 17 X 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Нуллер Б. М. О деформации упругой клиновидной пластинки, подкрепленной стержнем переменной жесткости, и об одном методе решения смешанных задач. ПММ, 1976, т. 40, вып. 2.
2. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1968.
3. Barnes E. W. The linear finite differences equations of the first order. Proc. London Math. Soc. Ser. 2, 1904, vol. 2.
4. Газов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
5. Нуллер Б. М. Деформация упругого клина, подкрепленного балкой. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.

6. Нуллер Б. М. К расчету подкрепленных откосов. Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехн., 1974, т. 105.
7. Нуллер Б. М., Рыбкин М. Б. Передача усилий на упругую клиновидную пластинку через впаивный в нее стержень. Прикл. механ., 1976, т. 12, № 10.
8. Нуллер Б. М. Кручение упругого пространства, ослабленного полубесконечной конической щелью. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 1.
9. Лиговченко С. И., Нуллер Б. М. Кручение упругих цилиндров, ослабленных цилиндрическими щелями. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3.
10. Лебедев Д. Ф., Нуллер Б. М. Круглая плита переменной толщины на упругом полупространстве. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 5.
11. Черепанов Г. П. Равновесие откоса с тектонической трещиной. ПММ, 1976, т. 40, вып. 1.
12. Черепанов Г. П. Пластические линии разрыва в конце трещины. ПММ, 1976, т. 40, вып. 4.
13. Храпков А. А. Задачи об упругом равновесии бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине, разрешимые в замкнутой форме. ПММ, 1971, т. 35, вып. 6.
14. Koiter W. T. On the diffusion of load from a stiffener into a sheet. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1975, vol. 8, No. 2.
15. Лебедев Н. Н., Скальская И. П. Новый метод решения задачи дифракции электромагнитных волн на клине конечной проводимости. Ж. техн. физ., 1962, т. 32, вып. 10.
16. Васильев Б. А. Некоторые стационарные задачи теории теплопроводности для клиновидных тел при граничном условии третьего рода. Инж.-физ. ж., 1966, т. 11, № 2.
17. Банцури Р. Д. Контактная задача для клина с упругим креплением. Докл. АН СССР, 1973, т. 211, № 4.
18. Попов Г. Я., Тихоненко Л. Я. Плоская задача о контакте полубесконечной балки с упругим клином. ПММ, 1974, т. 38, вып. 2.
19. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.