МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1979

УДК 539.3.01

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО РАЗНОМОДУЛЬНОГО ТЕЛА

Е. В. ЛОМАКИН

(Москва)

В механике деформируемого твердого тела важное место занимают теоремы единственности. В классической теории упругости единственность решения задач доказана при достаточно общих предположениях.

Показано, что доказательство единственности, используемое в классической теории упругости, для разномодульных упругих тел неприменимо, поэтому рассмотрена единственность в малом. Получены ограничения на функции, входящие в выражение для потенциала, при которых решение единственно. В качестве примера исследована единственность решения для частного вида потенциала, характеризующего деформацию разномодульного тела.

1. В [1] предложены определяющие соотношения для описания деформации изотропного разномодульного тела. Потенциал для разномодульного тела можно записать в виде

$$\Phi={}^1/_2[1+\zeta(\xi)](A+B\xi^2)\sigma_0^2 \tag{1.1}$$

где $\xi=\sigma/\sigma_0$, $\sigma={}^1/_3\sigma_{ii}$ — среднее напряжение, $\sigma_0=({}^3/_2S_{ij}S_{ij})^{1/2}$ интенсивность напряжений, $S_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij}$ — девиатор напряжений, A и B — константы. При $\zeta(\xi)\equiv0$ потенциал (1.1) совпадает с потенциалом для классического упругого тела.

Зависимость деформаций от напряжений можно представить в виде

$$\varepsilon_{ij}={}^3/_2\omega(\xi)S_{ij}+{}^1/_3\Omega(\xi)\sigma\delta_{ij} \tag{1.2}$$

$$\omega(\xi)=-{}^1/_2\xi(A+B\xi^2)\zeta'(\xi)+A[1+\zeta(\xi)]$$

$$\Omega(\xi)={}^1/_2\zeta'(\xi)(A+B\xi^2)/\xi+B[1+\zeta(\xi)]$$

Штрихом обозначено дифференцирование по аргументу функции. При пропорциональном нагружении зависимость деформаций от напряжений линейная, но в общем случае зависимость нелинейная.

Обозначим всю поверхность тела через Σ. Предположим, что на части поверхности Σ_1 заданы внешние напряжения, на части Σ_2 — смещение точек поверхности $(\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2)$

$$\sigma_{ij}\nu_j=T_i^\circ \text{ на } \Sigma_1; \quad u_i=u_i^\circ \text{ на } \Sigma_2 \tag{1.3}$$

Уравнения равновесия при наличии объемных сил

$$\sigma_{ij,j}+F_i=0 \tag{1.4}$$

Предположим, что граничная задача (1.3), (1.4) допускает два решения σ_{ij}^1, u_i^1, ξ^1 и σ_{ij}^2, u_i^2, ξ^2. Разность этих двух решений $\sigma_{ij}^1-\sigma_{ij}^2$, $u_i^1-u_i^2$ удовлетворяет уравнению (1.4) при $F_i=0$ и граничным условиям (1.4) при $T_i^\circ=0$, $u_i^\circ=0$. При этом выполняется равенство

$$\int\limits_V(\sigma_{ij}^1-\sigma_{ij}^2)_{,j}\quad(u_i^1-u_i^2)\,dV=\int\limits_V(\sigma_{ij}^1-\sigma_{ij}^2)(\varepsilon_{ij}^1-\varepsilon_{ij}^2)\,dV=0 \tag{1.5}$$

$$\varepsilon_{ij}^1=(\partial\Phi/\partial\sigma_{ij})_{\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^1},\quad \varepsilon_{ij}^2=(\partial\Phi/\partial\sigma_{ij})_{\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^2}$$

Принцип суперпозиции решений задач, в которых свойства среды описываются потенциалом (1.1), в общем случае не выполняется. Суперпозиция возможна только при $\xi^1=\xi^2$. Таким образом, в общем случае $\varepsilon_{ij}^1-\varepsilon_{ij}^2\neq(\partial\Phi/\partial\sigma_{ij})_{\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^1-\sigma_{ij}^2}$.

В силу этого подынтегральное выражение в (1.5) запишется в виде

$$(\sigma_{ij}^1-\sigma_{ij}^2)(\varepsilon_{ij}^1-\varepsilon_{ij}^2)={}^3/_2\omega(\xi^1)(S_{ij}^1-S_{ij}^2)(S_{ij}^1-S_{ij}^2)+\Omega(\xi)(\sigma^1-\sigma^2)^2+$$
$$+[\omega(\xi^1)-\omega(\xi^2)](S_{ij}^1-S_{ij}^2)S_{ij}^2+[\Omega(\xi^1)-\Omega(\xi^2)](\sigma^1-\sigma^2)\sigma^2$$

Последнее выражение не есть квадратичная форма от разности компонентов тензора напряжений, поэтому доказательство единственности, используемое в классической теории упругости [2], к разномодульным материалам неприменимо.

2. Исследуем единственность в малом. Предположим, что наряду с решением σ_{ij}, u_i, удовлетворяющим граничным условиям (1.3), существует бесконечно близкое решение $\sigma_{ij}+\delta\sigma_{ij}$, $u_i+\delta u_i$, удовлетворяющее тем же граничным условиям. Тогда должно выполняться равенство [3]:

$$\int\limits_V \delta\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV=0$$

Используя (1.2), а также соотношения

$$ {}^3/_2S_{ij}\delta S_{ij}=\sigma_0\delta\sigma_0,\quad \sigma_0^2\delta\xi=\sigma_0\delta\sigma-\sigma\delta\sigma_0 \tag{2.1}$$

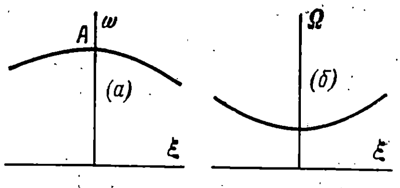
получим

$$\delta\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}={}^3/_2\omega(\xi)\delta S_{ij}\delta S_{ij}+\Omega(\xi)(\delta\sigma)^2+\xi\Omega'(\xi)(\delta\sigma-\xi\delta\sigma_0)^2 \tag{2.2}$$

Штрихом обозначено дифференцирование функции по ξ. Решение будет единственным, если выполняются условия

$$\omega(\xi)>0,\quad \Omega(\xi)>0,\quad \xi\Omega'(\xi)>0 \tag{2.3}$$

Первые два условия имеют простой физический смысл. Функции ω и Ω с помощью (1.2) можно представить в виде $\omega(\xi)=\varepsilon_0/\sigma_0$, $\Omega(\xi)=\varepsilon/\sigma$, где $\varepsilon_0=\sqrt{{}^2/_3e_{ij}e_{ij}}$ — интенсивность деформаций, $\varepsilon=\varepsilon_{ii}$ — объемная деформация, $e_{ij}=\varepsilon_{ij}-{}^1/_3\varepsilon\delta_{ij}$ — девиатор деформаций.



Условия (2.3) означают, что с увеличением интенсивности напряжений интенсивность деформаций также должна увеличиваться и объемная деформация иметь тот же знак, что и среднее напряжение. Эти условия достаточны для того, чтобы потенциал был положительно определен.

Третье условие (2.3) накладывает ограничения на характер изменения функций ω и Ω. Действительно, функции ω, Ω и их производные связаны соотношениями

$$\omega+\xi^2\Omega=(A+B\xi^2)[1+\zeta(\xi)],\quad \omega'+\xi^2\Omega'=0 \tag{2.4}$$

При условии (2.3) зависимости $\omega(\xi)$ и $\Omega(\xi)$ должны иметь вид, изображенный на фигуре. Это довольно сильное ограничение, в значительной мере сужающее класс рассматриваемых материалов. Покажем, что решение единственно при более слабых ограничениях на функции ω, Ω и их производные.

Выражение (2.2) — не квадратичная форма, между δS_{ij} и $\delta\sigma_0$ существует нелинейная зависимость

$$^3/_2\delta S_{ij}\delta S_{ij}=\sigma_0\delta^2\sigma_0+(\delta\sigma_0)^2$$

Из того, что $\delta S_{ij}=0$ и $\delta\sigma=0$, следует, что $\delta\xi$ также равно нулю, но из условия $\delta\xi=0$ не следует равенства нулю δS_{ij} и $\delta\sigma$. Условие $\delta\xi=0$ означает только, что основное напряженное состояние и бесконечно близкое имеют одинаковый параметр ξ, т. е. $\sigma/\sigma_0=\delta\sigma/\delta\sigma_0$.

Воспользуемся соотношением (2.1), из которого следует $(\delta\sigma_0)^2={}^3/_2(S_{mn}\delta S_{mn})^2(S_{kl}S_{kl})^{-1}$. С другой стороны, используя хорошо известное неравенство $(S_{mn}\delta S_{mn})^2\leqslant(S_{kl}S_{kl})(\delta S_{ij}\delta S_{ij})$, получим $^3/_2\delta S_{ij}\delta S_{ij}\geqslant(\delta\sigma_0)^2$.

Таким образом, выражение (2.2) можно оценить снизу квадратичной формой переменных $\delta\sigma_0$, $\delta\sigma$:

$$\delta\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\geqslant\omega(\xi)(\delta\sigma_0)^2+\Omega(\xi)(\delta\sigma)^2+\xi\Omega'(\xi)(\delta\sigma-\xi\delta\sigma_0)^2$$

Приведем ее к каноническому виду

$$\begin{aligned}\delta\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\geqslant\frac{1}{\omega+\xi^3\Omega'}[(\omega+\xi^3\Omega')\delta\sigma_0-\xi^2\Omega'\delta\sigma]^2+\\+\left[\Omega+\xi\Omega'-\frac{(\xi^2\omega')^2}{\omega+\xi^3\Omega'}\right](\delta\sigma)^2\end{aligned}\tag{2.5}$$

Если квадратичная форма в правой части неравенства (2.5) положительно определена, то решение единственно. Для этого достаточно выполнения условий

$$\omega+\xi^3\Omega'>0,\quad(\Omega+\xi\Omega')(\omega+\xi^3\Omega')-(\xi^2\omega')^2>0\tag{2.6}$$

При выполнении неравенств (2.3) условия (2.6) заведомо выполняются, но не наоборот. С помощью соотношений (2.4) можно из неравенств (2.6) исключить функцию $\Omega(\xi)$ и записать их в виде

$$\omega-\xi\omega'>0,\quad(A+B\xi^2)(1+\zeta)(\omega-\xi\omega')-\omega^2>0$$

Поскольку потенциал представляет собой положительно-определенную функцию, то очевидно, что выполнение второго условия влечет за собой выполнение первого. Таким образом, условия положительной определенности потенциала и единственности решения накладывают следующие ограничения на функции ω и Ω:

$$\omega+\xi^2\Omega>0,\quad\omega-\xi\omega'>\omega^2(\omega+\xi^2\Omega)^{-1}\tag{2.7}$$

Поскольку $\delta^2\Phi=\delta\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}$, неравенства (2.7) представляют собой условия выпуклости потенциала.

3. Рассмотрим частный случай, когда $\omega(\xi)$ аппроксимируется линейной функцией $\omega=A+C\xi$. Кусочно-линейная аппроксимация часто весьма удобна. Для $C>0$ характер изменения функции $\omega(\xi)$ в области положительных ξ прямо противоположен изображенному на фигуре (a). Покажем, что и в этом случае при определенных значениях C решение единственно.

Фигурирующая в (1.1) функция $\zeta(\xi)$ выражается через определяемую из эксперимента функцию $\omega(\xi)$ следующим образом [1]:

$$1+\zeta=\left(\omega+B\xi^2-\xi^2\int\frac{\omega'd\xi}{\xi^2}\right)(A+B\xi^2)^{-1}$$

Для линейной функции ω:

$$1+\zeta=(A+2C\xi+B\xi^2)(A+B\xi^2)^{-1}\tag{3.1}$$

Потенциал деформаций можно записать в виде

$$\Phi={}^1/_2(A\sigma_0{}^2+2C\sigma_0\sigma+B\sigma^2)$$

Используя (2.4) и (3.1), получим $\Omega=B+C\xi^{-1}$. Зависимость деформаций от напряжений примет вид

$$\varepsilon_{ij}={}^3/_2(A+C\sigma/\sigma_0)S_{ij}+{}^1/_3(B\sigma+C\sigma_0)\delta_{ij} \tag{3.2}$$

Зависимость (3.2) можно обратить. Потенциал напряжений

$$U={}^1/_2(B\varepsilon_0{}^2-2C\varepsilon_0\varepsilon+A\varepsilon^2)(AB-C^2)^{-1}$$

Используя последнее выражение, зависимость напряжений от деформаций запишем в виде

$$\sigma_{ij}=[{}^2/_3(B-C\varepsilon/\varepsilon_0)e_{ij}+(A\varepsilon-C\varepsilon_0)\delta_{ij}](AB-C^2)^{-1} \tag{3.3}$$

При $C=0$ соотношения (3.2) и (3.3) совпадают с соответствующими зависимостями для классического упругого тела.

Для линейной функции $\omega(\xi)$ неравенство (2.5) примет вид

$$\delta\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\geqslant(1/A)(A\delta\sigma_0+C\delta\sigma)^2+(B-C^2/A)(\delta\sigma)^2 \tag{3.4}$$

Если $C^2<AB$, то условия (2.7) выполняются при любых ξ и решение единственно.

Если $C^2>AB$, то работа дополнительных напряжений $\delta\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}$ может быть отрицательной, поскольку второе условие (2.7) не выполняется.

Первое условие (2.7) выполняется при

$$\xi<-C/B-\sqrt{(C/B)^2-A/B} \text{ и } \xi>-C/B+\sqrt{(C/B)^2-A/B}$$

Будем варьировать напряженное состояние таким образом, что вариация интенсивности напряжений и вариация среднего напряжения связаны линейным соотношением $\delta\sigma_0=k\delta\sigma$. Тогда в (3.4) можно поставить знак равенства

$$\delta\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}=(Ak^2+2Ck+B)(\delta\sigma)^2$$

Если $-C/A-\sqrt{(C/A)^2-B/A}<k<-C/A+\sqrt{(C/A)^2-B/A}$, то работа дополнительных напряжений отрицательна. При невыполнении второго условия (2.7) единственность необходимо проверять для каждой задачи в отдельности.

Условия (2.3) весьма просты, но накладывают слишком сильные ограничения на функции ω и Ω. Условия (2.7) представляют собой не столь сильные ограничения и при выполнении (2.3) они заведомо выполняются. Первое неравенство (2.7) — вполне естественное условие положительной определенности потенциала или, что то же самое, положительности работы внешних сил [1]. Второе неравенство (2.7) не столь простое ограничение на характер изменения функций. В правой части неравенства стоит некоторая положительно-определенная комбинация функций, фигурирующих в левой части неравенства. Для каждой конкретной функции $\omega(\xi)$ это условие легко проверить.

Автор благодарит Ю. Н. Работнова за внимание к работе.

Поступила 29 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ломакин Е. В., Работнов Ю. Н.* Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 6.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
3. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.