МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1979

УДК 539.3

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ В СХЕМЕ МЕТОДА РИТЦА

В. А. ПУПЫРЕВ

(Ленинград)

Применение только одного вариационного принципа для расчета неоднородной упругой конструкции в целом не всегда целесообразно. В ряде случаев для получения решения высокой точности при малом числе координатных функций необходимо последовательное сочетание двух методов.

В качестве иллюстрации приводится пример расчета вынужденных колебаний многослойного кольца периодической в окружном направлении структуры.

1. Из наиболее известных четырех принципов статической теории упругости три обобщены на динамические задачи [1]: принцип минимума потенциальной энергии, смешанный принцип Рейсснера и принцип Ху — Вашицу. Исключение составляет принцип дополнительной работы (Кастильяно).

Классическим является первый принцип, представляющий естественное распространение на задачи динамической теории упругости принципа Гамильтона, хорошо известного в аналитической механике. Этот принцип чаще других применяется для вывода дифференциальных уравнений движения упругих систем как однородной, так и неоднородной структуры. Упомянутые принципы используются и для применения основанных на них прямых методов решения вариационных задач.

Перед исследователем, пытающимся решить, например, задачу о вынужденных колебаниях конкретной упругой конструкции, всегда встает вопрос об оптимальном выборе не только определенного прямого метода, но и способа формулировки вариационной задачи.

Вариация функционала Гамильтона содержит уравнения движения, в которых фигурируют компоненты тензора напряжений или эквивалентные им силовые характеристики, которые через соотношения упругости связаны с компонентами тензора деформаций. Следовательно, в формулах этого принципа обязательно участвует матрица жесткостей конструкции. Ясно, что при изучении конструкции, состоящей из элементов, соединенных параллельно или работающих в «параллель», когда компоненты матрицы представляют сумму жесткостей элементов, следует предпочесть принцип Гамильтона. Таковы, например, многослойные системы: слоистые стержни, плиты, кольца, оболочки.

Классическая кинематическая гипотеза о недеформируемой нормали, применяемая для перехода от трехмерной теории упругости к двумерной (или одномерной), говорит о том, что элементы-слои работают параллельно. Действительно, сечения указанных систем перемещаются как твердые тела, волокна работают независимо и реакции их суммируются в соответствующих силовых факторах. Таким образом, при выводе уравнений движения указанных конструкций требуется обязательное применение принципа Гамильтона или какого-либо иного принципа, в котором фигурирует потенциал, содержащий жесткости.

Вариация функционала Рейсснера (или дополнительной работы в статике) содержит соотношения упругости, в которых фигурирует тензор деформаций, выраженный через тензор напряжений или силовые факторы и потому в формулах принципа должна участвовать матрица податливости. Ясно, что принцип будет хорошо «работать» в случае системы последовательно соединенных или работающих элементов, когда складываются их податливости. Продольные колебания неоднородных по длине стержней, осесимметричные колебания неоднородных в окружном направлении колец [2], оболочек — примеры задач, где следует ожидать успеха, применяя принцип Рейсснера.

Из изложенного выше вытекает, что использование принципа Гамильтона в этих задачах, как и принципа Рейсснера для конфигураций с параллельно работающими элементами, потребует взять достаточно большое число базисных функций для получения решения с приемлемой степенью точности. Кроме того, следует исключительно важный вывод о том, что в ряде практически важных задач хорошие результаты можно достичь, используя не тот или иной принцип в отдельности, а их разумное последовательное сочетание. Оно позволяет ожидать достаточно большой точности решения даже при одночленной аппроксимации в схеме метода Ритца, что не только значительно сокращает затраты машинного времени, но, главное, для ряда практически важных задач дает возможность найти простые аналитические оценки искомых характеристик, так необходимых на стадии предварительного проектирования сложных конструкций.

В работе этот вывод иллюстрируется на примере расчета осесимметричных вынужденных колебаний тонкого многослойного кольца, произвольное число слоев которого кусочно-однородно в окружном направлении. Определенные элементы одного из этих слоев обладают пьезоэлектрическими свойствами, так что возмущающим фактором служит электрическое поле, прикладываемое к ним. При этом учитывается возможность излучения кольца в окружающую акустическую среду.

В соответствии с изложенным выше задача разбивается на два этапа. На первом этапе осуществляется стандартный переход от уравнений трехмерной теории упругости к одномерной теории многослойного кольца с применением принципа Гамильтона. Формулы (1.10) показывают, что элементы матрицы жесткостей представляют сумму жесткостей с «весами» — формами колебаний по толщине кольца. Реакции волокон суммируются в растягивающем усилии T и изгибающем моменте M. Дальнейшее применение принципа, связанное с разложением в тригонометрические ряды кинематических величин (относительного удлинения ε и изменения кривизны нейтральной линии $\varkappa$), нецелесообразно, ибо и в этом случае результирующие формулы соответствовали бы суммированию жесткостей. Между тем, условия работы кольца таковы, что реакция определяется не суммой жесткостей, а суммой податливостей отдельных секторов кольца. Действительно, при рассмотрении формы колебаний, близкой к пульсирующей, податливость кольца определяется суммой податливостей отдельных секторов его (при других формах это обстоятельство прослеживается менее отчетливо).

Поэтому на втором этапе, при анализе колебаний кольца как целого, используется принцип Рейсснера. При этом получаем суммирование податливостей (формулы (3.2)) с необходимыми весами — формами колебаний по дуговой координате.

На конкретном примере пятислойного кольца периодической структуры показано, что расчет только по одной пульсирующей форме колебаний позволяет с достаточно высокой степенью точности построить кинематические характеристики кольца практически во всем частотном диапазоне.

Соотношения закона Гука с учетом электрического возбуждения кольца в окружном направлении имеют вид [3]:

$$\varepsilon=\frac{1}{2\mu}\left[\mathbf{T}-\frac{\nu}{1+\nu}I_1(\mathbf{T})\mathbf{E}\right]+\varepsilon_q\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi,\quad \mu=\frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1.1}$$

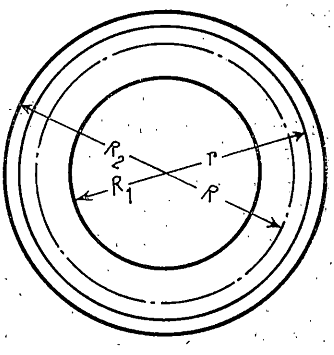
где ε — тензор деформаций, $\mathbf{T}$ — тензор напряжений, I_1 — его первый инвариант, $\mathbf{E}$ — единичный тензор, ε_q — деформация обратного пьезоэффекта, μ — модуль сдвига, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ — «плоский» базис цилиндрической системы координат.

В случае плоского напряженного состояния рассматриваемого кольца из (1.1) следует иная форма записи

$$\mathbf{T}^\circ=\frac{2\mu}{1-\nu}[(1-\nu)\varepsilon^\circ+\nu\theta^\circ\mathbf{E}^\circ-$$
$$-(\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi+\nu\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r)\varepsilon_q] \tag{1.2}$$

где величины с градусом представляют плоские части соответствующих тензоров, а плоское объемное расширение

$$\theta^\circ=\nabla^\circ\cdot\mathbf{u}^\circ,\quad \mathbf{u}^\circ=u\mathbf{e}_r+v\mathbf{e}_\varphi$$
$$\nabla^\circ=\mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\mathbf{e}_\varphi\frac{\partial}{r\partial\varphi} \tag{1.3}$$



Фиг. 1

Здесь u — радиальное перемещение, v — окружное, ∇° — оператор Гамильтона на плоскости.

Уравнения движения в предположении о малости инерционных свойств кольца в осевом направлении в отсутствии объемных сил записываются следующим образом:

$$\nabla^\circ\cdot\mathbf{T}^\circ-\rho\mathbf{u}^{\circ\cdot\cdot}=0 \tag{1.4}$$

где ρ — плотность материала кольца, точкой обозначена производная по времени.

Введем координату (фиг. 1): $\xi=r-R$, $R_1-R\leqslant\xi\leqslant R_2-R$, где R — некоторый характерный радиус кольца. Пусть $u_0(\varphi,t)$ и $v_0(\varphi,t)$ — перемещения точек окружности $R=\text{const}$. Принятие гипотез Кирхгофа — Лява о несжимаемости кольца по толщине и прямой нормали к указанной окружности приводит к известной записи кинематических соотношений [4]:

$$u=u_0,\quad v=v_0+\left(\frac{v_0}{R}-\frac{\partial u_0}{R\partial\varphi}\right)\xi,\quad \varepsilon_\varphi=\frac{1}{1+\xi/R}\left(\varepsilon+\varkappa\frac{\xi}{R}\right)$$
$$\varepsilon=\frac{u_0}{R}+\frac{\partial v_0}{R\partial\varphi},\quad \varkappa=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{v_0}{R}-\frac{\partial u_0}{R\partial\varphi}\right) \tag{1.5}$$

т. е. отлична от нуля только одна компонента ε° — относительное удлинение ε_φ окружностей $r=\text{const}$.

Далее, используется динамический аналог принципа минимума потенциальной энергии — принцип Гамильтона — Остроградского

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{R_1-R}^{R_2-R}(\delta U_k-\delta U_p)\left(1+\frac{\xi}{R}\right)d\xi+\mathbf{F}_n{}^\circ\cdot\delta\mathbf{u}^\circ\right]d\varphi dt=0 \tag{1.6}$$

где вариации удельных кинетической U_k и потенциальной U_p энергии таковы:

$$\delta U_k = \rho \mathbf{u}^{\circ\cdot} \cdot (\delta \mathbf{u}^\circ)^\cdot$$

$$\left(1+\frac{\xi}{R}\right)\delta U_p = \left(1+\frac{\xi}{R}\right)\sigma_\varphi \delta\varepsilon_\varphi = \sigma_\varphi\left(\delta\varepsilon + \delta\varkappa\frac{\xi}{R}\right) \tag{1.7}$$

Здесь σ_φ — окружное растягивающее напряжение, а $\mathbf{F}_n^\circ$ — вектор плоской поверхностной нагрузки (в свете принятых гипотез ее можно считать приложенной к поверхности $R=\text{const}$). Вводится обобщенная «плотность» $m(\varphi)$, силовые факторы T, M:

$$m(\varphi)=\int\limits_{R_1-R}^{R_2-R}\rho(\xi,\varphi)\,d\xi, \quad T(\varphi)=\int\limits_{R_1-R}^{R_2-R}\sigma_\varphi d\xi, \quad M(\varphi)=\int\limits_{R_1-R}^{R_2-R}\sigma_\varphi \xi d\xi \tag{1.8}$$

и рассматривается случай нормальной нагрузки. Тогда $\mathbf{F}_n\cdot\delta\mathbf{u}=-p\delta u_0$ и стандартная процедура вычислений интегралов в (1.6) с учетом условий периодичности всех факторов по φ приводит к следующей вариации функционала:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\{[-m u_0^{\cdot\cdot}+R^{-1}(T-R^{-1}M'')+p]\delta u_0+ \\ +[-m v_0^{\cdot\cdot}+R^{-1}(T'+R^{-1}M')]\delta v_0\}d\varphi=0 \tag{1.9}$$

Следует отметить, что в (1.9) учтены только кинетические энергии радиальных и окружных движений элемента поперечного сечения. Инерцией его вращения пренебрегается. Произвольность моментов времени t_0 и t_1, а также возможных перемещений δu_0 и δv_0 требует обращения квадратных скобок в нуль, что дает известные уравнения движения тонкого кольца [4] (штрихом обозначена производная по φ).

Подстановка выражения для σ_φ в (1.8) (при сохранении членов порядка ξ/R по сравнению с единицей) позволяет получить следующие соотношения упругости:

$$T=B\varepsilon+R^{-1}A\varkappa-C_t, \quad M=A\varepsilon+R^{-1}D\varkappa-C_m \tag{1.10}$$

$$B(\varphi)=\int\limits_{R_1-R}^{R_2-R}\frac{E}{1-\nu^2}d\xi, \quad A(\varphi)=\int\limits_{R_1-R}^{R_2-R}\frac{E\xi}{1-\nu^2}d\xi, \quad D(\varphi)=\int\limits_{R_1-R}^{R_2-R}\frac{E\xi^2}{1-\nu^2}d\xi$$

$$C_t(\varphi)=\int\limits_{R_1-R}^{R_2-R}\frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_q d\xi, \quad C_m(\varphi)=\int\limits_{R_1-R}^{R_2-R}\frac{E\xi}{1-\nu^2}\varepsilon_q d\xi$$

Матрица жесткостей в (1.10) не диагональна. Имеется корреляция деформаций $\varkappa$ и ε соответственно с растягивающим усилием T и изгибающим моментом M. В случае однородного в окружном направлении кольца матрица становится диагональной, если выбрать R (радиус нейтральной линии) из условия обращения A в нуль. Для неоднородного кольца в качестве значения R целесообразно назначить то, которое сообщает $\min\limits_\varphi A(\varphi)$.

2. Для дальнейшего расчета используется вариационный принцип Рейсснера [3], в котором одновременно варьируются вектор перемещений $\mathbf{u}$ и тензор напряжений $\mathbf{T}$. Вариационное уравнение в общем случае имеет вид

$$\delta J_R(\mathbf{u},\mathbf{T})=\iiint\limits_V[\delta\mathbf{T}\cdot\cdot(\varepsilon-\varepsilon^*)-(\nabla\cdot\mathbf{T}-\rho\mathbf{u}^{\cdot\cdot})\cdot\delta\mathbf{u}]dv+\iint\limits_O(\mathbf{n}\cdot\mathbf{T}-\mathbf{F}_n)\cdot\delta\mathbf{u}\,do=0 \tag{2.1}$$

Здесь вместо традиционной объемной силы во второй круглой скобке фигурирует плотность сил инерции $-\rho\ddot{\mathbf{u}}$; кроме того, предполагается, что всюду на поверхности тела объемом V задано лишь поверхностное распределение нагрузки $\mathbf{F}_n$ (вторая задача). Далее, ε — тензор деформаций, построенный по $\mathbf{u}$, а ε^* — по $\mathbf{T}$ с помощью соотношений упругости (1.1).

Применительно к рассматриваемой задаче о вынужденных колебаниях неоднородного кольца вариационное уравнение (2.1) следует записать с учетом уравнений движения, содержащихся в (1.9), и соотношений упругости (1.10), которые необходимо разрешить относительно деформаций ε и $\varkappa$. Отбрасывание в (1.10) слагаемых, пропорциональных A, позволяет записать условие стационарности J_R в следующем виде:

$$\int_{-\pi}^{\pi}[(M''-RT+mR^2\omega^2u_0-p)\delta u_0+(M'+RT'+mR^2\omega^2v_0)\delta v_0]d\varphi+$$
$$+R^2\int_{-\pi}^{\pi}\{[\varepsilon-B^{-1}(T+C_t)]\delta T+[\varkappa-RD^{-1}(M+C_m)\delta M]\}d\varphi=0 \tag{2.2}$$

При изучении гармонических колебаний все кинематические (u_0, v_0, ε, $\varkappa$) и силовые (T, M) характеристики кольца содержат временной множитель $\exp(i\omega t)$, где ω — круговая частота колебаний. Это обстоятельство уже учтено в (2.2), где под указанными в скобках величинами (и давлением p) следует подразумевать их комплексные амплитуды.

3. В качестве примера рассматривается кольцо, имеющее ось симметрии, и изучаются его осесимметричные колебания.

Пусть внешняя поверхность кольца или часть ее находится в контакте с неограниченной акустической средой. При этом p — комплексная амплитуда давления излучения, которая определяется известным соотношением [5]: $p=i\omega Z(\omega)$, где $Z(\omega)$ — импеданс, характеризующий динамическую реакцию среды.

В качестве аппроксимаций искомых характеристик предлагаются отрезки рядов Фурье

$$u_0=\frac{1}{2}U_0+\sum_{n=1}^{L}U_n\cos n\varphi,\quad v_0=\sum_{n=1}^{L}V_n\sin n\varphi$$
$$T=\frac{1}{2}T_0+\sum_{n=1}^{L}T_n\cos n\varphi,\quad M=\frac{1}{2}M_0+\sum_{n=1}^{L}M_n\cos n\varphi \tag{3.1}$$

Ясно, что такой выбор продиктован наличием условий периодичности по координате φ. По заданным в (3.1) u_0 и v_0 находятся ε и $\varkappa$, а затем производится подстановка в (2.2). В силу независимости вариаций коэффициентов в (3.1) условие стационарности приводит к конечной системе $4L+3$ линейных алгебраических уравнений для этих коэффициентов ($\nu=1, 2, \ldots, L$)

$$-\frac{1}{2}T_0R+\frac{1}{2}R^2\omega^2m_{00}{}^*U_0+\sum_{n=1}^{L}R^2\omega^2m_{n\nu}{}^*U_n=0$$

$$\frac{1}{2}R^2\omega^2 m_{0\nu}{}^*U_0-\frac{1}{2}(\nu^2 M_\nu+RT_\nu)+\sum_{n=1}^{L}R^2\omega^2 m_{n\nu}{}^*U_n=0 \tag{3.2}$$

$$-\frac{1}{2}\nu(M_\nu+RT_\nu)+\sum_{n=1}^{L}R^2\omega^2 m_{n\nu}V_n=0$$

$$\frac{1}{2}X_0R^{-1}-\frac{1}{2}b_{00}T_0-\sum_{n=1}^{L}b_{n0}T_n=q_{00}$$

$$-\frac{1}{2}b_{0\nu}T_0+\frac{1}{2}R^{-1}(U_\nu+\nu V_\nu)-\sum_{n=1}^{L}b_{n\nu}T_n=q_{0\nu}$$

$$-\frac{1}{2}R^2d_{00}M_0-\sum_{n=1}^{L}R^2d_{n0}M_n=R^2g_{00}$$

$$-\frac{1}{2}R^2d_{0\nu}M_0-\sum_{n=1}^{L}R^2d_{n\nu}M_n+\frac{1}{2}\nu(V_\nu-\nu U_\nu)=R^2g_{0\nu}$$

$$\begin{Bmatrix} m_{n\nu}^* \\ b_{n\nu} \\ d_{n\nu}\end{Bmatrix}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \begin{Bmatrix} m^* \\ B^{-1} \\ D^{-1}\end{Bmatrix}\cos n\varphi\cos\nu\varphi\, d\varphi \quad (n,\nu=0,1,2\ldots,L)$$

$$\begin{Bmatrix} g_{0\nu} \\ q_{0\nu}\end{Bmatrix}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \begin{Bmatrix} D^{-1}C_m \\ B^{-1}C_t\end{Bmatrix}\cos\nu\varphi\, d\varphi \quad (\nu=0,1,2\ldots,L)$$

$$m_{n\nu}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi m\sin n\varphi\sin\nu\varphi\, d\varphi,\quad m_{00}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi m\,d\varphi \quad (n,\nu=1,2,\ldots,L)$$

где $m^*=m(1-Z(\omega)\,/\,i\omega m)$ — новая приведенная плотность кольца.

Наличие мнимой части в m^* позволяет не вводить в систему никаких других параметров, характеризующих рассеяние энергии при вынужденных колебаниях кольца. При отсутствии акустической нагрузки учет рассеяния можно произвести, вводя комплексный модуль Юнга, фигурирующий в жесткостях на растяжение и изгиб.

Для одного варианта пятислойного кольца со средним слоем, имеющим периодическую структуру (фиг. 2), был произведен расчет на основании (3.2) по пяти формам ($L=4$) амплитуды радиальной скорости движения кольца, усредненной по излучаемой поверхности $|\varphi|\leqslant\gamma$:

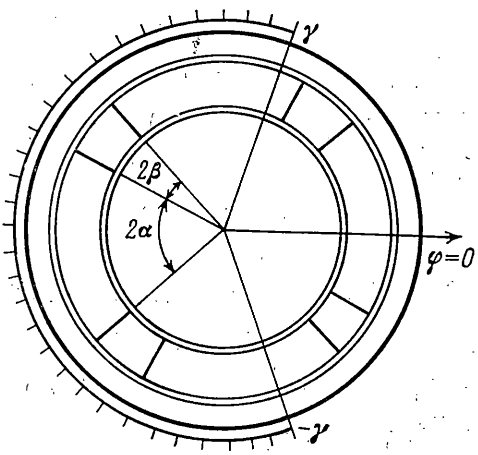
$$\chi(\omega)=\left|\frac{1}{\gamma}\int_0^\gamma u_0^{\cdot}d\varphi\right|=\left|i\omega\left(\frac{1}{2}U_0+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{L}\frac{\sin n\gamma}{n\gamma}U_n\right)\right|$$

При этом было принято: секторы с углами 2α и 2β — пьезокерамические элементы, а вставки — изоляторы.

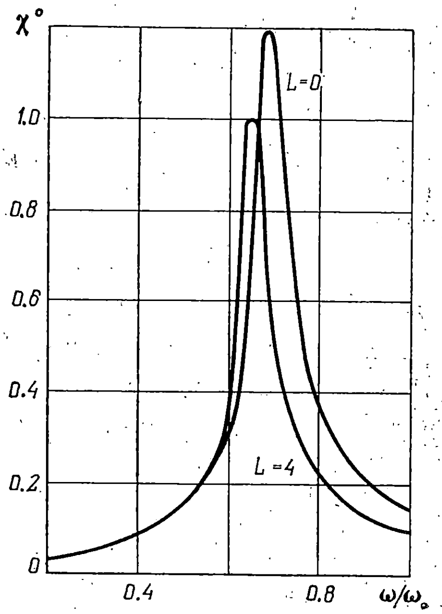
На фиг. 3 приведены графики функции $\chi(\omega)/\max_\omega \chi(\omega)$. Из сравнения кривых видно, что расчет по одной пульсационной форме, когда

$$\chi(\omega)=Rq_{00}|\omega|/|1-m_{00}{}^{*}b_{00}R^2\omega^2|=\chi^\circ(\omega)$$

дает достаточно точную оценку не только резонансной частоты (4—5%), но и высоты резонансного пика (10—15%). Вид частотной характеристики



Фиг. 2



Фиг. 3

$\chi^\circ(\omega)/\max_\omega \chi(\omega)$ показывает, что все изгибные формы колебаний практически не возбуждаются. Это обстоятельство оправдывает прямой расчет вынужденных колебаний без разложения их в ряд по формам свободных колебаний.

Автор благодарит В. А. Пальмова за ценные замечания и А. Н. Златина за проделанные расчеты.

Поступила 19 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tonti E.* Variational principles in elastostatics. Meccanica, 1967, vol. 2, No. 2. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1969, № 5.)
2. *Бушер М. К.* Свободные колебания упругого кольца периодической структуры. Акуст. ж., 1976, т. 22, вып. 4.
3. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
4. *Болотин В. В.* Колебания многослойных криволинейных стержней. Инж. ж., 1964, т. 4, вып. 4.
5. *Ржевкин С. Н.* Курс лекций по теории звука. Изд-во ЛГУ, 1960.