

ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ШАГАЮЩЕГО АППАРАТА  
ПО ОКРУЖНОСТИ

Г. В. КАСАТКИН, Л. В. КЛЫЧНИКОВ

(Москва)

Рассматривается одна из задач управления ходьбой шагающих аппаратов [1-3]. При этом в качестве модели принята предложенная в [3] пространственная модель пятизвенного шагающего аппарата, состоящего из корпуса-балансира и пары разнесенных двузвенных ног, прикрепленных к нему в точке подвеса, совпадающей с центром масс балансира.

Изучается пространственное движение этого аппарата по окружности. Показано существование в задаче периодических решений. Предложен алгоритм поиска периодических решений, приведены результаты счета по этому алгоритму.

1. Рассмотрим тяжелое твердое тело веса  $P=Mg$  ( $M$  — масса тела,  $g$  — ускорение силы тяжести). В точке  $O$  тела, которую считаем совпадающей с центром масс тела, подвешена пара двузвенных ног, состоящих из невесомых звеньев и имеющих точечный контакт с поверхностью.

Введем (фиг. 1) неподвижную систему координат  $NXYZ$  с началом в точке  $N$  и вертикальной осью  $Z$ . Проведем из  $N$  радиус-векторы:  $r_0$  в точку подвеса  $O$ ;  $r_j$  — в точку опоры  $j$ -й ноги ( $j=1, 2$ );  $r_i^j$  — в  $i$ -й сустав  $j$ -й ноги ( $j=1, 2$ ;  $i=0$  отвечает суставу в точке  $O$  подвеса).

Введем обозначения:  $u_i^j$  — управляющий момент в  $i$ -м суставе  $j$ -й ноги ( $i=0, 1$ );  $v(\chi)$  — индекс опорной (переносной) ноги;  $\omega$  — вектор угловой скорости твердого тела;  $L$  — вектор кинетического момента твердого тела относительно точки  $O$  подвеса;  $R_j$  — вектор силы реакции опоры  $j$ -й ноги ( $j=1, 2$ ),  $R=R_1+R_2$ .

Рассмотрим одноопорное движение, при котором аппарат в каждый момент времени опирается только на одну ногу.

Тогда либо  $R_1 \neq 0$ , либо  $R_2 \neq 0$ ,  $R=R_v$ .

Согласно [3], имеем следующие уравнения движения для центра масс балансира, вектора кинетического момента, а также выражения для управляющих моментов в суставах:

$$\begin{aligned} R &= -P + Mr_0'', & L &= (r_0 - r_v) \times (P - Mr_0'') \\ u_v^i &= (r_v^i - r_v) \times (Mr_0'' - P), & u_z &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Пусть точка  $O$  подвеса движется по окружности радиуса  $r$  с постоянной угловой скоростью  $\omega_0 = r^{-1}V$  ( $V$  — соответствующая линейная скорость) на постоянной высоте  $Z=h$  от опорной горизонтальной плоскости (фиг. 2), в которой лежит следовая траектория. Введем подвижную систему координат  $Oxyz$  с началом в точке  $O$  подвеса. Ось  $z$  направлена вертикально вверх, ось  $x$  — по касательной к окружности в сторону движения, ось  $y$  — таким образом, чтобы система координат  $Oxyz$  была правой.

Для траектории  $r_0(X, Y, Z)$  точки подвеса будем иметь

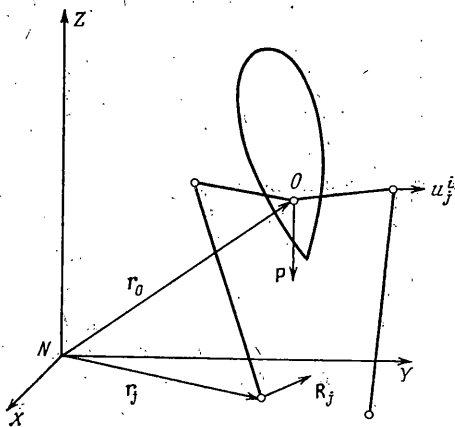
$$X = r \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad Y = r \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad Z = h \quad (1.2)$$

$T$ -периодическое движение ног зададим следующими формулами следовой дорожки:

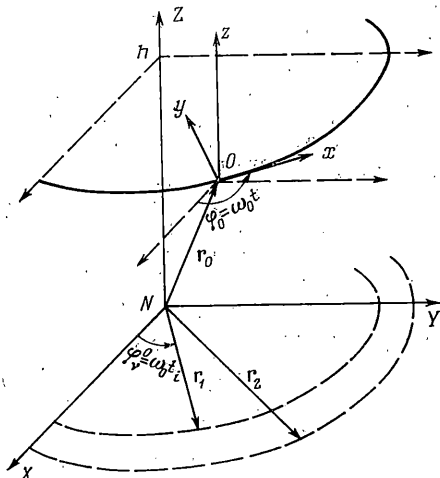
$$\begin{aligned} X_v &= (r + \delta_j) \cos(\omega_0 t_i + \varphi_v^\circ), & Y_v &= (r + \delta_j) \sin(\omega_0 t_i + \varphi_v^\circ) \\ Z_v &= 0 \text{ при } t_i \leq t \leq t_i + 1/2 T \end{aligned}$$

Здесь  $t_i = 1/2 i T$  ( $i=0, 1, 2$ ),  $\varphi_0, \varphi_v^\circ$  — начальные фазы, отсчитываемые от оси  $X$  и определяющие положение точки подвеса и точки опоры ноги в момент времени  $t_i$ ,  $|\delta_j|$  — расстояние по нормали к окружности радиуса  $r$  в опорной плоскости от точки опоры  $j$ -й ноги до окружности ( $|\mathbf{r}_j| = r + \delta_j$ , см. фиг. 2).

Соответствие индексов следующее:  $i \rightarrow (j=1), i+1 \rightarrow (j=2)$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

2. Запишем уравнения (1.1) в подвижной системе координат в скалярном виде

$$L_x^* - \omega_0 L_y = r(P + h\omega_0^2) - P(r + \delta_j) \cos[\omega_0(t - t_i) + \varphi_0 - \varphi_v^\circ] \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} L_y^* + \omega_0 L_x &= P(r + \delta_j) \sin[\omega_0(t - t_i) + \varphi_0 - \varphi_v^\circ] \\ L_z^* &= -M\omega_0^2 r(r + \delta_j) \sin[\omega_0(t - t_i) + \varphi_0 - \varphi_v^\circ] \end{aligned}$$

Следуя [3], построим непрерывные и периодические с периодом  $T$  компоненты  $L_x(t), L_y(t), L_z(t)$ , склеивая их в момент времени  $t = t_i + 1/2 T$  смежные опорной ноги. Условие непрерывности и периодичности  $L_z$  принимает вид

$$\varphi_0 - \varphi_v^\circ = -k, \quad k = \omega_0 T_0, \quad T_0 = 1/4 T \quad (2.2)$$

Это условие означает симметричность передвижения точки подвеса относительно опорной точки: в начальный и конечный моменты опорной фазы расстояния вдоль дуги окружности радиуса  $r$  между этими точками одинаковы.

Введем безразмерные величины

$$\tau = (t - t_i) T_0^{-1}, \quad l_x = (PrT_0)^{-1} L_x, \quad l_y = (PrT_0)^{-1} L_y, \quad l_z = (\omega_0 M)^{-1} r^{-2} L_z \quad (2.3)$$

Непрерывные и периодические с периодом  $\tau_0 = 4$  компоненты  $l_x(\tau), l_y(\tau)$  можно построить подходящим выбором начальных значений  $l_x^\circ, l_y^\circ$ , используя условие (2.2)

$$l_x^\circ = 1/2(\delta_1 - \delta_2)r^{-1} \cos^{-1} k, \quad l_y^\circ = [1 + 1/2(\delta_1 + \delta_2)r^{-1}] \sin^{-1} k - k^{-1}(1 + h\omega_0^2 g^{-1}) \quad (2.4)$$

Тогда для  $l_x(\tau)$ ,  $l_y(\tau)$ ,  $l_z(\tau)$  в силу (2.2), (2.3) получим следующие параметрические представления:

$$l_x = \delta_1 r^{-1} [\sin^{-1} 2k \sin k(\tau+1) - \tau \cos k(\tau-1)] + \delta_2 r^{-1} \sin^{-1} 2k \sin k(\tau-1) + \sin^{-1} k \sin k\tau - \tau \cos k(\tau-1) \quad (2.5)$$

$$l_y = \delta_1 r^{-1} [\sin^{-1} 2k \cos k(\tau+1) + \tau \sin k(\tau-1)] + \delta_2 r^{-1} \sin^{-1} 2k \cos k(\tau-1) + \sin^{-1} k \cos k\tau + \tau \sin k(\tau-1) - [k^{-1} + hV(rgT_0)^{-1}]$$

$$l_z = l_z^\circ + (1 + \delta_1 r^{-1}) [\cos k(\tau-1) - \cos k] \quad \text{при } 0 \leq \tau \leq 2$$

$$l_x = \delta_1 r^{-1} \sin^{-1} k \sin k(\tau-3) + \delta_2 r^{-1} [\sin^{-1} 2k \sin k(\tau-1) - (\tau-2) \cos k(\tau-3)] + \sin^{-1} k \sin k(\tau-2) - (\tau-2) \cos k(\tau-3)$$

$$l_y = \delta_1 r^{-1} \sin^{-1} 2k \cos k(\tau-3) + \delta_2 r^{-1} [\sin^{-1} 2k \cos k(\tau-1) + (\tau-2) \sin k(\tau-3)] + \sin^{-1} k \cos k(\tau-2) + (\tau-2) \sin k(\tau-3) - [k^{-1} + hV(rgT_0)^{-1}]$$

$$l_z = l_z^\circ + (1 + \delta_2 r^{-1}) [\cos k(\tau-3) - \cos k] \quad \text{при } 2 \leq \tau \leq 4$$

При этом имеем

$$l_x^\circ = l_x(0) = l_x(4), \quad l_y^\circ = l_y(0) = l_y(2) = l_y(4), \quad l_z^\circ = l_z(0) = l_z(2) = l_z(4) \quad (2.6)$$

Для средних значений  $l_x$ ,  $l_y$ ,  $l_z$  за период  $\tau_0 = 4$  получаем

$$\langle l_x \rangle = 0, \quad \langle l_y \rangle = k^{-1} \cos k [1/2 r^{-1} (\delta_1 + \delta_2)] + (k^{-1} \sin k - \cos k) [1/2 r^{-1} (\delta_1 - \delta_2) - 1] - [k^{-1} + hV(rgT_0)^{-1}], \quad \xi = \langle l_z \rangle = l_z^\circ + [1 + 1/2 r^{-1} (\delta_1 + \delta_2)] (k^{-1} \sin k - \cos k)$$

Заметим, что параметры  $\delta_j$  ( $j=1, 2$ ) можно выразить также через начальные значения  $l_x^\circ$ ,  $l_y^\circ$ :

$$\delta_{1,2} = r \{ [l_y^\circ + k^{-1} (1 + h\omega_0^2 g^{-1})] \sin k \pm l_x^\circ \cos k - 1 \} \quad (2.8)$$

Из (2.8) имеем

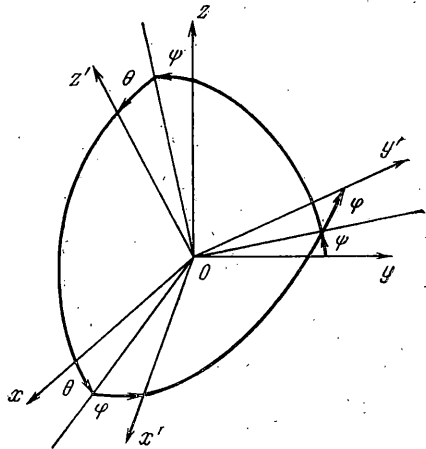
$$\delta_1 - \delta_2 = 2r l_x^\circ \cos k \quad (2.9)$$

т. е. существует определенная связь между шириной следовой дорожки, начальным значением  $l_x^\circ$  компоненты  $l_x$  вектора кинетического момента, соответствующим периодической походе, и параметром  $k = \omega_0 T_0$ , характеризующим длину шага.

Из (2.4), (2.8), (2.9) следует взаимный характер постановок задачи. Можно, например, задавать параметры следовой дорожки  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ , а также параметры темпа ходьбы  $\omega_0$ ,  $T_0$ , тогда из (2.4) находятся  $l_x^\circ$ ,  $l_y^\circ$ . Можно также задавать параметры  $\omega_0$ ,  $T_0$  и начальные значения  $l_x^\circ$ ,  $l_y^\circ$ , тогда из (2.8) определяются параметры  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  следовой дорожки. В данной работе будем считать заданными параметры  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ .

3. Введем систему координат  $Ox'y'z'$ , жестко связанную с корпусом — балансиrom, начало поместим в точку подвеса ног, оси направим по главным осям

эллипсоида инерции тела. Положение системы  $Ox'y'z'$  относительно подвижной системы  $Oxyz$  определим углами  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$  (фиг. 3). Эти углы типа самолетных:  $\theta$  (тангаж) описывает колебания «вдоль курса» аппарата (вдоль оси  $Ox$ ); отсчет угла  $\theta$  происходит от плоскости  $Oyz$  к оси  $Oz'$  так, что  $\theta > 0$  внутри области ( $x > 0$ ,  $z > 0$ ). Угол  $\psi$  (рысканье) отсчитывается от направления  $Oz$  в плоскости  $Ozy$  до проекции оси  $Oz'$  на эту плоскость;



Фиг. 3

этот угол описывает колебания оси  $Oz'$  поперек курса. Угол  $\varphi$  (крен) отсчитывается в плоскости  $Ox'y'$  от плоскости  $Oxz$  до оси  $Ox'$  так, что  $\varphi$  описывает колебания корпуса относительно своей оси  $Oz'$ .

Элементы матрицы направляющих косинусов следующие:

	$x'$	$y'$	$z'$	
$x$	$\alpha$	$\alpha'$	$\alpha''$	(3.1)
$y$	$\beta$	$\beta'$	$\beta''$	
$z$	$\gamma$	$\gamma'$	$\gamma''$	

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos \theta \cos \varphi, & \alpha' &= -\cos \theta \sin \varphi, & \alpha'' &= \sin \theta \\ \beta &= \sin \theta \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \\ \beta' &= -\sin \theta \sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi, & \beta'' &= -\cos \theta \sin \psi \\ \gamma &= -\sin \theta \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi \\ \gamma' &= \sin \theta \cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi, & \gamma'' &= \cos \theta \cos \psi \end{aligned} \quad (3.2)$$

Проекция абсолютной угловой скорости аппарата по осям  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  суть

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= A^{-1} Pr T_0 (l_x \alpha + l_y \beta + k_1 l_z \gamma) \\ \omega_{y'} &= A^{-1} Pr T_0 (l_x \alpha' + l_y \beta' + k_1 l_z \gamma') \\ \omega_{z'} &= C^{-1} Pr T_0 (l_x \alpha'' + l_y \beta'' + k_1 l_z \gamma''), \quad k_1 = kr (g T_0^2)^{-1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

(предполагается, что корпус аппарата обладает динамической симметрией:  $I_{x'x'} = I_{y'y'} = A$ ,  $I_{z'z'} = C$ ).

Рассмотрим компоненты относительной угловой скорости по осям  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ :

$$\begin{aligned} \omega_{x'}^* &= \psi^* \cos \theta \cos \varphi + \theta^* \sin \varphi \\ \omega_{y'}^* &= -\psi^* \cos \theta \sin \varphi + \theta^* \cos \varphi \\ \omega_{z'}^* &= \psi^* \sin \theta + \varphi^* \end{aligned} \quad (3.4)$$

Имеют место соотношения

$$\omega_{x'} = \omega_{x'}^* + \omega_0 \gamma, \quad \omega_{y'} = \omega_{y'}^* + \omega_0 \gamma', \quad \omega_{z'} = \omega_{z'}^* + \omega_0 \gamma'' \quad (3.5)$$

Из (3.4) ввиду (3.2) и (3.3) получаем следующие уравнения движения в углах:

$$\begin{aligned} \theta^* &= \lambda l_x \cos \psi + k (\mu l_z - 1) \sin \psi = R_1(l_y, l_z, \psi) \\ \psi^* &= \lambda l_x + \operatorname{tg} \theta [\lambda l_y \sin \psi - k (\mu l_z - 1) \cos \psi] = \lambda l_x + R_2(l_y, l_z, \psi) \operatorname{tg} \theta \\ \varphi^* &= \lambda (m-1) l_x \sin \theta - \cos^{-1} \theta (\sin^2 \theta + m \cos^2 \theta) (\lambda l_y \sin \psi - \mu k l_z \cos \psi) - \\ &\quad - k \cos^{-1} \theta \cos \psi = \mu k l_z R_4(\theta) \cos \psi - R_3(l_x, l_y, l_z, \theta, \psi) \\ R_4(\theta) &= \cos^{-1} \theta (\sin^2 \theta + m \cos^2 \theta) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь  $l_x(\tau)$ ,  $l_y(\tau)$ ,  $l_z(\tau)$  как функции времени определяются по (2.5) и периодически продолжаемы на  $\tau > 4$  и на  $\tau < 0$ .

Сначала рассмотрим малые колебания корпуса около нулевых значений углов  $\theta$ ,  $\psi$ , пренебрегая в уравнениях (3.6) членами второго и выше порядка малости:

$$\begin{aligned} \theta^* &= k (\mu l_z - 1) \psi + \lambda l_y, & \psi^* &= -k (\mu l_z - 1) \theta + \lambda l_x \\ \varphi^* &= \lambda [(m-1) l_x \theta - m l_y \psi] + k (m \mu l_z - 1) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Заметим, что первые два уравнения системы (3.6), а значит и системы (3.7), не содержат переменной  $\varphi$  и их можно исследовать независимо от третьего уравнения. Если известны  $\theta$ ,  $\psi$  как функции времени, то  $\varphi(\tau)$  может быть получена в виде квадратуры от правой части.

Непрерывное и периодическое с периодом  $\tau_0=4$  решение  $\theta(\tau)$ ,  $\psi(\tau)$  системы (3.7) на отрезке  $0 \leq \tau \leq 4$  записывается в виде

$$\begin{aligned}\theta(\tau) &= (\psi_0 + \lambda J_1(\tau)) \sin \sigma(\tau) + (\theta_0 + \lambda J_2(\tau)) \cos \sigma(\tau) \\ \psi(\tau) &= (\psi_0 + \lambda J_1(\tau)) \cos \sigma(\tau) - (\theta_0 + \lambda J_2(\tau)) \sin \sigma(\tau)\end{aligned}\quad (3.8)$$

$$\sigma(\tau) = k \int_0^\tau (\mu l_z(s) - 1) ds, \quad J_1(\tau) = \int_0^\tau (l_y(s) \sin \sigma(s) + l_x(s) \cos \sigma(s)) ds$$

$$J_2(\tau) = \int_0^\tau (l_y(s) \cos \sigma(s) - l_x(s) \sin \sigma(s)) ds$$

а начальные значения углов  $\theta_0 = \theta(\tau=0)$ ,  $\psi_0 = \psi(\tau=0)$  удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}\theta_0(1 - \cos a) - \psi_0 \sin a &= F_1 \sin a + F_2 \cos a \\ \theta_0 \sin a + \psi_0(1 - \cos a) &= F_1 \cos a - F_2 \sin a \\ a = \sigma(\tau=4), \quad F_1 &= J_1(\tau=4), \quad F_2 = J_2(\tau=4)\end{aligned}\quad (3.9)$$

Определитель этой системы  $\Delta = 2(1 - \cos a) \neq 0$ , если

$$\zeta \neq \mu^{-1}(1 + 1/2 k^{-1} \pi n) \quad (n=0, \pm 1 \dots)\quad (3.10)$$

поскольку  $a = 4k(\mu\zeta - 1)$ .

Таким образом, при условии (3.10) существует по крайней мере одно периодическое по углам  $\theta$ ,  $\psi$  движение, если только начальные значения  $\theta_0$ ,  $\psi_0$  определены из системы (3.9), а параметры аппарата подобраны так, чтобы  $\theta_0$ ,  $\psi_0$  не выходили из малой области возможного движения по  $\theta$ ,  $\psi$ .

Из (3.7) для непрерывной функции  $\varphi(\tau)$  имеем

$$\begin{aligned}\varphi(\tau) &= \varphi_0 + \lambda \int_0^\tau [(m-1)l_x(s)\theta(s) - ml_y(s)\psi(s)] ds + \\ &+ k \int_0^\tau (m\mu l_z(s) - 1) ds\end{aligned}\quad (3.11)$$

Условие периодичности  $\varphi(\tau)$  запишется в виде

$$\zeta = \mu^{-1} \left\{ m^{-1} - 1/4 \lambda k^{-1} \int_0^4 [(1 - m^{-1})l_x(\tau)\theta(\tau, \zeta) - l_y(\tau)\psi(\tau, \zeta)] d\tau \right\} \quad (3.12)$$

При этом условии (3.10) всегда можно выполнить подходящим выбором значений параметров. Если  $\zeta_0$  — корень уравнения (3.12), то по (2.7) можно найти  $l_z^\circ$ .

Решим вопрос об условной устойчивости движения (3.8), (3.11) по переменным  $\theta$ ,  $\psi$ .

Обозначим периодическое решение (3.8), (3.11) через  $\theta_p(\tau)$ ,  $\psi_p(\tau)$ ,  $\varphi_p(\tau)$ . Уравнения возмущенного движения по переменным  $\theta$ ,  $\psi$  запишутся в виде

$$\dot{\xi} = k(\mu l_z - 1)\eta, \quad \dot{\eta} = -k(\mu l_z - 1)\xi, \quad \dot{\xi} = \theta - \theta_p(\tau), \quad \dot{\eta} = \psi - \psi_p(\tau) \quad (3.13)$$

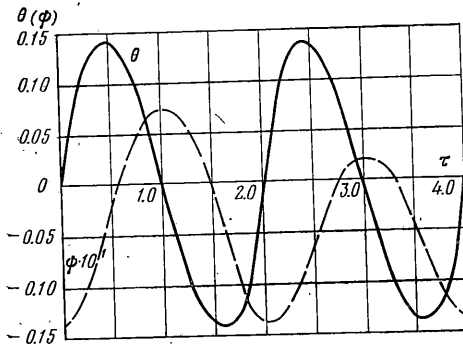
Уравнения (3.13) имеют первый интеграл  $\xi^2 + \eta^2 = \text{const}$ . В качестве функции Ляпунова возьмем  $\Phi(\xi, \eta) = \xi^2 + \eta^2$ . Функция  $\Phi(\xi, \eta)$  — положительно-определенная,  $\Phi' = 0$  в силу уравнений возмущенного движения. По теореме Ляпунова об устойчивости решение  $\theta_p(\tau)$ ,  $\psi_p(\tau)$  устойчиво.

Таким образом, всякое периодическое движение аппарата в рамках линейной постановки задачи условно устойчиво.

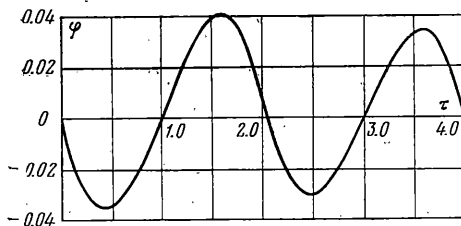
Рассмотрим теперь метод поиска периодического решения в нелинейном случае. Решение системы (3.6) на отрезке  $0 \leq \tau \leq 4$  с произвольными начальными значениями  $\theta_0$ ,  $\psi_0$ ,  $\varphi_0$  представим в виде

$$\theta(\tau) = \theta_0 + \theta_1(\tau), \quad \psi(\tau) = \psi_0 + \psi_1(\tau), \quad \varphi(\tau) = \varphi_0 + \varphi_1(\tau)$$

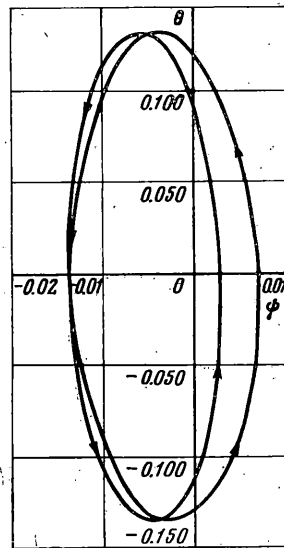
где  $\theta_1(\tau)$ ,  $\psi_1(\tau)$ ,  $\varphi_1(\tau)$  — квадратуры от правых частей соответствующих уравнений системы.



Фиг. 4



Фиг. 6



Фиг. 5

Записав условия периодичности с периодом  $\tau_0 = 4$  функций  $\theta(\tau)$ ,  $\psi(\tau)$ ,  $\varphi(\tau)$ , получаем следующие выражения для начальных значений  $\psi_0$ ,  $\theta_0$ ,  $l_z^0$ :

$$\begin{aligned} \text{tg } \psi_0 &= \int_0^4 R_1(l_y(\tau), l_z(\tau), \psi_1(\tau)) d\tau \left( \int_0^4 R_2(l_y(\tau), l_z(\tau), \psi_1(\tau)) d\tau \right)^{-1} \\ \text{tg } \theta_0 &= - \int_0^4 R_2(l_y(\tau), l_z(\tau), \psi(\tau)) \cos^{-1} \theta(\tau) \sin \theta_1(\tau) d\tau \times \\ &\quad \times \left( \int_0^4 R_2(l_y(\tau), l_z(\tau), \psi(\tau)) \cos^{-1} \theta(\tau) \cos \theta_1(\tau) d\tau \right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$l_z^0 = \int_0^4 R_3(l_x(\tau), l_y(\tau), l_z(\tau), \theta(\tau), \psi(\tau)) d\tau \left( \mu k \int_0^4 R_4(\theta(\tau)) \cos \psi(\tau) d\tau \right)^{-1}$$

Опишем метод численного поиска периодического решения с использованием ЭВМ.

Задаются нулевыми значения  $\theta_0$ ,  $\psi_0$ ,  $l_z^0$ , интегрируется система (3.6), находится решение ее  $\theta(\tau)$ ,  $\psi(\tau)$ ,  $\varphi(\tau)$ . Затем вычисляются правые части выражений (3.14) и проверяется справедливость равенств (3.14). Если они не выполняются одновременно, то по (3.14) находятся новые значения  $\theta_0$ ,  $\psi_0$ ,  $l_z^0$  и для них повторяется весь цикл вычислений и так далее.

Этот метод был реализован в случае, когда среднее значение  $l_y(\tau)$  близко к нулю на модели со следующими значениями параметров:  $M=60$  кг,  $A=7$  кг·м<sup>2</sup>,  $C=1$  кг·м<sup>2</sup>,  $\omega_0=0.3$  с<sup>-1</sup>,  $T=1$  с,  $h=1.5$  м,  $r=5$  м,  $\delta_1=7.32$  см,  $\delta_2=7.12$  см.

Периодическое решение с точностью 0.001 рад получается на третьем-четвертом цикле вычислений.

На фиг. 4 построены периодические кривые  $\theta(\tau)$ ,  $\psi(\tau)$ , на фиг. 5 —  $T$ -периодическая кривая  $\theta(\psi)$  в результате численного решения задачи.

Кривые имеют максимальную амплитуду по  $\psi$  ( $\max|\psi|=0.0135$ ) и по  $\theta$  ( $\max|\theta|=0.1314$ ). На фиг. 6 построена кривая колебаний по оси  $x'$ ,  $\varphi(\tau)$ .

Для  $\varphi$  максимальное отклонение —  $\max|\varphi|=0.0415$ . Для начальных значений  $\theta_0$ ,  $\psi_0$ ,  $l_z^0$  было получено:  $\theta_0=0.0004$ ,  $\psi_0=0.01348$ ,  $l_z^0=0.00142$ .

Особенностью найденного движения является отклонение в среднем корпуса-балансира внутрь окружности движения.

Если в (2.5), (2.6) сделать предельный переход  $r \rightarrow \infty$ , положив при этом  $\delta_1 = -\delta_2$ , то уравнения (3.6) «переходят» в соответствующие уравнения для прямолинейного движения.

Кривая в фазовой плоскости ( $\theta$ ,  $\psi$ ) переходит при этом в соответствующую симметричную относительно начала координат периодическую кривую, что следовало ожидать.

Авторы благодарят В. В. Белецкого, Э. К. Лавровского за постановку задачи и обсуждение результатов, а также Л. Д. Акуленко за внимание к работе и ценные замечания.

Поступила 14 VI 1978.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Охоцимский Д. Е., Плагонов А. К., Боровин Г. К., Карнов И. И. Моделирование на ЦВМ движения шагающего аппарата. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1972, вып. 3.
2. Vukobratović M., Frank A. A., Juričić D. On the stability of biped locomotion. IEEE Trans. Bio-Med. Engng, 1970, vol. 17, No. 1. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1972, № 1.)
3. Белецкий В. В. Динамика двуногой ходьбы, ч. I, II. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3, 4.
4. Белецкий В. В., Кирсанова Т. С. Плоские линейные модели двуногой ходьбы. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 4.
5. Белецкий В. В., Чудинов П. С. Параметрическая оптимизация в задаче двуногой ходьбы. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1.