МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1979

УДК 539.3

КРИТЕРИЙ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А. И. ЛУРЬЕ

(Ленинград)

В нелинейной теории упругости задача об устойчивости материала связана с понятием эллиптичности и сильной эллиптичности уравнений равновесия [1]. Установление этих свойств сводится к исследованию структуры матрицы некоторого тензора второго ранга.

Понятия эллиптичности и сильной эллиптичности разъяснены в книге [2]. В применении к материалу частного вида задача рассмотрена в [3], а для плоской задачи – в [4]. Здесь эти построения обобщены на случай любого задания удельной потенциальной энергии изотропного упругого материала.

1. Основные соотношения. Частица среды определяется ее материальными (лагранжевыми) координатами q^1, q^2, q^3; ее место в неискаженной отсчетной и актуальной конфигурациях задается вектор-радиусами $\mathbf{r}(q^1, q^2, q^3)$ и $\mathbf{R}(q^1, q^2, q^3)$. Векторные базисы и взаимные векторные базисы в этих конфигурациях представляются тройками векторов

$$\mathbf{r}_s=\partial r/\partial q^s,\quad \mathbf{r}^s=g^{sk}\mathbf{r}_k;\quad \mathbf{R}_s=\partial \mathbf{R}/\partial q^s,\quad \mathbf{R}^s=G^{sk}\mathbf{R}_s \tag{1.1}$$

Здесь g^{sk}, G^{sk} – контравариантные компоненты единичного (метрического) тензора $\mathbf{E}$ в отсчетной и актуальной конфигурациях; $g_{sk}=\mathbf{r}_s\cdot\mathbf{r}_k$, $G_{sk}=\mathbf{R}_s\cdot\mathbf{R}_k$ – его ковариантные компоненты. Смешанные компоненты $\mathbf{r}_s\cdot\mathbf{r}^k=\delta_s^k$, $\mathbf{R}^s\cdot\mathbf{R}_k=\delta_k^s$ – символы Кронекера. Дифференциальные операции в базисах $\mathbf{r}_s$, $\mathbf{R}_s$ проводятся с помощью набла-операторов $\nabla^\circ=\mathbf{r}^s\partial/\partial q^s$, $\nabla=\mathbf{R}^s\partial/\partial q^s$.

В рассмотрение вводятся градиенты места, транспонированные и обратные им тензоры

$$\nabla^\circ\mathbf{R}=\mathbf{r}^s\mathbf{R}_s,\ \nabla^\circ\mathbf{R}^T=\mathbf{R}_s\mathbf{r}^s,\ \nabla\mathbf{r}=\mathbf{R}^s\mathbf{r}_s=(\nabla^\circ\mathbf{R})^{-1},\ \nabla\mathbf{r}^T=\mathbf{r}_s\mathbf{R}^s \tag{1.2}$$

Применяются обозначения $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{ab}$ скалярного, векторного и диадного произведений векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Градиент вектора, следуя Кочину, обозначается $\nabla\mathbf{a}$; в зарубежной литературе это обозначение приписывается тензору $\nabla\mathbf{a}^T$ (этим обусловлены отличия в записях формул здесь и, например, в [5]).

Меры деформации Коши $\mathbf{G}$ и Фингера $\mathbf{F}$ определяются произведениями

$$\mathbf{G}=\nabla^\circ\mathbf{R}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}^T,\ \mathbf{F}=\nabla^\circ\mathbf{R}^T\cdot\nabla^\circ\mathbf{R} \tag{1.3}$$

где $\mathbf{G}$ и $\mathbf{F}$ задаются в базисе отсчетной и актуальной конфигураций соответственно.

Производные скалярной $\varphi(\mathbf{Q})$ и тензорной $\Phi(\mathbf{Q})$ функций по тензорному аргументу, обозначаемые $\varphi_\mathbf{Q}$, $\Phi_\mathbf{Q}$, определяются из инвариантных соотношений

$$\delta\varphi(\mathbf{Q})=\varphi_\mathbf{Q}\cdot\cdot\,\delta\mathbf{Q}^T,\ \delta\Phi=\Phi_\mathbf{Q}\cdot\cdot\,\delta\mathbf{Q}^T \tag{1.4}$$

причем двоеточие обозначает свертывание по двум индексам, например

$$\mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{P}=q^{st}\mathbf{r}_s\mathbf{r}_t\cdot\cdot p_{mn}\mathbf{r}^m\mathbf{r}^n=q^{st}p_{ts},\quad \mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{ab}=q^{st}a_sb_t$$

Компонентные представления тензоров $\varphi_\mathbf{Q}$, $\Phi_\mathbf{Q}$ (второго и четвертого рангов) имеют вид

$$\varphi_\mathbf{Q}=\frac{\partial\varphi}{\partial q^{st}}\mathbf{r}^s\mathbf{r}^t=\frac{\partial\varphi}{\partial q_{st}}\mathbf{r}_s\mathbf{r}_t,\qquad \Phi_\mathbf{Q}=\frac{\partial\Phi_{mn}}{\partial q^{st}}\mathbf{r}^m\mathbf{r}^n\mathbf{r}^s\mathbf{r}^t$$

и так далее.

Упругий (гиперупругий) материал характеризуется заданием удельной потенциальной энергии деформации $\Pi(\nabla^\circ\mathbf{R})$ как функции градиента места. Этим заданием определяются тензоры напряжений Пиола $\mathbf{P}$ и Коши $\mathbf{T}$:

$$\Pi_{\nabla^\circ\mathbf{R}}=\mathbf{P}=I_3^{1/2}\nabla\mathbf{r}^T\cdot\mathbf{T},\qquad I_3^{1/2}=\det\nabla^\circ\mathbf{R}=\sqrt{G/g}\tag{1.5}$$

В изотропном упругом материале Π — изотропный скаляр, зависящий от инвариантов $I_k(\mathbf{G})$ меры Коши или равных им инвариантов $I_k(\mathbf{F})$ меры Фингера

$$\Pi=\Pi(I_1,I_2,I_3),\ I_k=I_k(\mathbf{G})=I_k(\mathbf{F})\quad(k=1,2,3)$$

Производные инвариантов симметричного тензора $Q=Q^T$ определяются формулами

$$I_1(\mathbf{Q})_\mathbf{Q}=E,\ I_2(\mathbf{Q})_\mathbf{Q}=\mathbf{E}I_1(\mathbf{Q})-\mathbf{Q},\ I_3(\mathbf{Q})=I_3\mathbf{Q}^{-1}\tag{1.6}$$

Основываясь на этих формулах и соотношениях

$$\varphi(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^T)_\mathbf{Q}=2\varphi_{\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^T}\cdot\mathbf{Q},\ \mathbf{G}^{-1}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}=\nabla\mathbf{r}^T,\ \mathbf{G}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}=\nabla^\circ\mathbf{R}\cdot\mathbf{F}$$

из (1.5) получим

$$\mathbf{P}=2(\psi_0\nabla\mathbf{r}^T+\psi_1\nabla^\circ\mathbf{R}+\psi_2\nabla^\circ\mathbf{R}\cdot\mathbf{F}),\qquad \mathbf{T}=2I_3^{-1/2}(\psi_0\mathbf{E}+\psi_1\mathbf{F}+\psi_2\mathbf{F}^2)\tag{1.7}$$

Здесь ψ_Γ ($\Gamma=0,1,2$) — функции инвариантов I_k, определяемые формулами

$$\psi_0=I_3\frac{\partial\Pi}{\partial I_3},\quad \psi_1=\frac{\partial\Pi}{\partial I_1}+I_1\frac{\partial\Pi}{\partial I_2},\quad \psi_2=-\frac{\partial\Pi}{\partial I_2}\tag{1.8}$$

Находят применение изотропные тензоры четвертого ранга [6]:

$$\mathbf{C}_\mathrm{I}=\mathbf{EE},\ \mathbf{C}_\mathrm{II}=\mathbf{r}_s\mathbf{r}_t\mathbf{r}^s\mathbf{r}^t,\ \mathbf{C}_\mathrm{III}=\mathbf{r}_s\mathbf{E}\mathbf{r}^s=\mathbf{r}_s\mathbf{r}_t\mathbf{r}^t\mathbf{r}^s$$

и формулы свертывания их с тензорами второго ранга

$$\mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{C}_\mathrm{II}=\mathbf{C}_\mathrm{II}\cdot\cdot\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^T,\ \mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{C}_\mathrm{III}=\mathbf{C}_\mathrm{III}\cdot\cdot\mathbf{Q}=\mathbf{Q}$$

Используются формулы и правила дифференцирования

$$\mathbf{Q}_\mathbf{Q}=\mathbf{C}_\mathrm{II},\ \mathbf{Q}_{\mathbf{Q}^T}=\mathbf{C}_\mathrm{III},\ \mathbf{Q}_\mathbf{Q}^{-1}=-\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{r}_s\mathbf{r}_t\cdot\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{r}^s\mathbf{r}^t$$

$$[\varphi(\mathbf{Q})\Phi(\mathbf{Q})]_\mathbf{Q}=\Phi(\mathbf{Q})\varphi_\mathbf{Q}+\varphi(\mathbf{Q})\Phi_\mathbf{Q},\quad [\Phi(\mathbf{Q})\psi(\mathbf{Q})]_\mathbf{Q}=\Phi\psi_\mathbf{Q}+(\Phi_\mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{r}_s\mathbf{r}_t)\psi\mathbf{r}^s\mathbf{r}^t$$

$$\varphi(P(\mathbf{Q}))_\mathbf{Q}=\varphi_\mathbf{P}\cdot\cdot\mathbf{C}_\mathrm{II}\cdot\cdot\mathbf{P}_\mathbf{Q}$$

Например

$$\begin{gathered}(\nabla\mathbf{r}^T)_{\nabla^\circ\mathbf{R}}=\nabla\mathbf{r}^T_{\nabla^\circ\mathbf{R}^T}\cdot\cdot\mathbf{C}_\mathrm{II}\cdot\cdot\mathbf{C}_\mathrm{III}=-\nabla\mathbf{r}^T\cdot\mathbf{r}_s\mathbf{r}_t\cdot\nabla\mathbf{r}^T\mathbf{r}^s\mathbf{r}^t\cdot\cdot\mathbf{C}_\mathrm{II}=\\=-\mathbf{r}_m\mathbf{R}^q\mathbf{R}^m\cdot\mathbf{r}_s\mathbf{r}^s g_{tq}\mathbf{r}^t\cdot\cdot\mathbf{C}_\mathrm{II}=-\mathbf{r}_m\mathbf{R}^q\mathbf{r}_q\mathbf{R}^m\end{gathered}\tag{1.9}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{G}_{\nabla^\circ\mathbf{R}}=\nabla^\circ\mathbf{R}\cdot\mathbf{C}_\mathrm{III}+(\mathbf{C}_\mathrm{II}\cdot\cdot\mathbf{r}_t\mathbf{r}_s)\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}^T\mathbf{r}^s\mathbf{r}^t=\nabla^\circ\mathbf{R}\cdot\mathbf{C}_\mathrm{III}+\\+\mathbf{r}_s\mathbf{r}^m\mathbf{r}^s\mathbf{r}^t\mathbf{r}_t\cdot\mathbf{R}_m=\nabla^\circ\mathbf{R}\cdot\mathbf{C}_\mathrm{III}+\mathbf{C}_\mathrm{II}\nabla^\circ\mathbf{R}\end{gathered}\tag{1.10}$$

$$(\mathbf{G}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R})_{\nabla^\circ\mathbf{R}}=\mathbf{G}\cdot\mathbf{C}_{II}+\{[(\nabla^\circ\mathbf{R}\cdot\mathbf{C}_{III}+\mathbf{C}_{II}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R})\cdot\cdot\mathbf{r}_t\mathbf{r}_s]\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}\}\mathbf{r}^s\mathbf{r}^t=$$
$$=\mathbf{G}\cdot\mathbf{C}_{II}+\mathbf{r}^m\mathbf{R}_s\mathbf{r}^s\mathbf{R}_m+\mathbf{r}_s\mathbf{R}_m\mathbf{r}^s\mathbf{R}^m\cdot\mathbf{F} \quad (1.11)$$

Ориентированная площадка, задаваемая в отсчетной конфигурации вектором $\mathbf{n}do$, в актуальной конфигурации определяется вектором

$$\mathbf{N}dO=I_3^{1/2}\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{r}^T do, \quad \mathbf{n}=I_3^{-1/2}\frac{dO}{do}\mathbf{N}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}^T \quad (1.12)$$

Дифференцирование тензора $\mathbf{Q}(\nabla^\circ\mathbf{R})$ по материальным координатам связывается с действием дифференцирования по аргументу соотношением

$$\delta\mathbf{Q}=\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial q^k}\delta q^k=\mathbf{Q}_{\nabla^\circ\mathbf{R}}\cdot\cdot\delta\nabla^\circ\mathbf{R}^T=\mathbf{Q}_{\nabla^\circ\mathbf{R}}\cdot\cdot\frac{\partial\nabla^\circ\mathbf{R}^T}{\partial q^k}\delta q^k$$

так что

$$\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial q^k}=\mathbf{Q}_{\nabla^\circ\mathbf{R}}\cdot\cdot\frac{\partial\nabla^\circ\mathbf{R}^T}{\partial q^k}, \quad \nabla^\circ\cdot\mathbf{Q}=\mathbf{r}^k\cdot\mathbf{Q}_{\nabla^\circ\mathbf{R}}\cdot\cdot\frac{\partial\nabla^\circ\mathbf{R}^T}{\partial q^k} \quad (1.13)$$

Последним выражением определена дивергенция тензора.

Всюду, где возможно, далее избегаются компонентные представления тензоров, лишь затрудняющие восприятие существа дела. Исключение делается для вектора места $\mathbf{R}$, представляемого в базисе $\mathbf{r}_s$ контравариантными компонентами χ^s $(\mathbf{R}=\mathbf{r}_s\chi^s)$. Поэтому

$$\mathbf{R}_t=\mathbf{r}_s\nabla_t{}^\circ\chi^s, \quad \nabla^\circ\mathbf{R}=\mathbf{r}^t\mathbf{R}_t=\mathbf{r}^t\mathbf{r}_s\nabla_t{}^\circ\chi^s \quad (1.14)$$

Это соотношение и (1.13) позволяет записать уравнение статики в объеме сплошной среды

$$\nabla^\circ\cdot\mathbf{P}+\rho_0\mathbf{k}=0$$

в виде аналога «уравнений равновесия в перемещениях» упругого тела

$$\mathbf{r}^k\cdot\mathbf{P}_{\nabla^\circ\mathbf{R}}\cdot\cdot\mathbf{r}_s\mathbf{r}^t\nabla_k{}^\circ\nabla_t{}^\circ\chi^s+\rho_0\mathbf{k}=0 \quad \text{или} \quad \mathbf{r}^k\cdot\Pi_{\nabla^\circ\mathbf{R}\nabla^\circ\mathbf{R}}\cdot\cdot\mathbf{r}_s\mathbf{r}^t\nabla_k{}^\circ\nabla_t{}^\circ\chi^s+\rho_0\mathbf{k}=0 \quad (1.15)$$

Символом $\nabla_t{}^\circ\chi^s$ обозначается ковариантная производная контравариантных величин χ^s в базисе отсчетной конфигурации.

Вывод и разъяснения приведенных здесь соотношений см. в [7, 8].

2. Эллиптичность, сильная эллиптичность. Система дифференциальных уравнений (1.15), линейная относительно вторых производных искомых функций χ^s, эллиптична, если в области ее задания (в объеме тела) не существует поверхностей слабого разрыва этих величин. Это значит, что на любой достаточно гладкой поверхности S (с непрерывными кривизнами) остаются непрерывными не только χ^s и ее первые производные, но и вторые производные, в их числе вторая производная по нормали $\mathbf{n}$ к S.

Через $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}(u^1, u^2)$ обозначаются вектор места точки на S, u^α — гауссовы координаты, в рассмотрение вводится локальный базис, образуемый тройкой векторов

$$\boldsymbol{\rho}_\alpha=\frac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial u^\alpha}, \quad \mathbf{n}=\frac{\boldsymbol{\rho}_1\times\boldsymbol{\rho}_2}{|\boldsymbol{\rho}_1\times\boldsymbol{\rho}_2|}$$

ζ обозначает координату, отсчитываемую по $\mathbf{n}$. Рассматривается тензор градиент градиента дважды непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(q^1, q^2, q^3)$:

$$\nabla^\circ\nabla^\circ\varphi=\mathbf{r}^s\mathbf{r}^t\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^s\,\partial q^t}=\mathbf{r}^s\mathbf{r}^t\nabla_s{}^\circ\nabla_t{}^\circ\varphi$$

Значение этого тензора на S определяется равенством

$$(\nabla^\circ\nabla^\circ\varphi)_{\zeta=0}=\left[\boldsymbol{\rho}^\alpha\boldsymbol{\rho}^\beta\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^\alpha\partial u^\beta}-\left\{\begin{matrix}\gamma\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial u^\gamma}-b_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)+\right.$$

$$+(\rho^\alpha \mathbf{n}+\mathbf{n}\rho^\alpha)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^\alpha\,\partial\zeta}+b_\alpha{}^\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial u^\gamma}\right)+\mathbf{nn}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\Bigg]_{\zeta=0}$$

в котором $\rho^\alpha=a^{\alpha\beta}\rho_\beta$, $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ — коэффициенты первой и второй квадратичных форм на S, $\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\}$ — символы Кристофеля в метрике этой поверхности. По условию на S:

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u^\alpha}\right]=0,\quad \left[\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right]=0,\quad \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^\alpha\partial\zeta}\right]=0$$

и поэтому

$$\mathbf{nn}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right]=\mathbf{r}^s\mathbf{r}^t[\nabla_s{}^\circ\nabla_t{}^\circ\varphi]_{\zeta=0},\quad [\nabla_s{}^\circ\nabla_t{}^\circ\varphi]=n_s n_t\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right]$$

В применении к функциям χ^s в уравнениях равновесия (1.15) их эллиптичность приводит к требованию равенства нулю вектора

$$\mathbf{r}^k\cdot\Pi_{\nabla^\circ\mathbf{R}\nabla^\circ\mathbf{R}}\cdot\cdot\,\mathbf{r}_s\mathbf{r}^t n_k n_t\left[\frac{\partial^2\chi^s}{\partial\zeta^2}\right]=0\quad\text{или}\quad \mathbf{n}\cdot\Pi_{\nabla^\circ\mathbf{R}\nabla^\circ\mathbf{R}}\cdot\cdot\,\mathbf{r}_s\mathbf{n}\left[\frac{\partial^2\chi^s}{\partial\zeta^2}\right]=0 \tag{2.1}$$

В рассмотрение вводится тензор второго ранга

$$\mathbf{Q}_*=\mathbf{n}\cdot\Pi_{\nabla^\circ\mathbf{R}\nabla^\circ\mathbf{R}}\cdot\cdot\,\mathbf{C}_{II}\cdot\mathbf{n} \tag{2.2}$$

и это позволяет представить уравнение (2.1) в форме произведения справа этого тензора на «вектор разрыва» $\mathbf{q}=\mathbf{r}_s[\partial^2\chi^s/\partial\zeta^2]$. Действительно

$$\mathbf{n}\cdot\Pi_{\nabla^\circ\mathbf{R}\nabla^\circ\mathbf{R}}\cdot\cdot\,\mathbf{r}_s\mathbf{n}\left[\frac{\partial^2\chi^s}{\partial\zeta^2}\right]=\mathbf{n}\cdot\Pi_{\nabla^\circ\mathbf{R}\nabla^\circ\mathbf{R}}\cdot\cdot\,\mathbf{C}_{II}\cdot\mathbf{nq}=[\mathbf{n}\cdot\Pi_{\nabla^\circ\mathbf{R}\nabla^\circ\mathbf{R}}\cdot\cdot\,\mathbf{C}_{II}\cdot\mathbf{n}]\cdot\mathbf{q}$$

и условие (2.1) приводится к виду $\mathbf{Q}_*\cdot\mathbf{q}=0$; вектор $\mathbf{q}=0$ тогда только, когда тензор $\mathbf{Q}_*$ при всех $\mathbf{n}$ — неособенный: $\det\mathbf{Q}_*\neq0$. Это — критерий эллиптичности системы уравнений равновесия теории упругости. Она сильно эллиптична, когда тензор $\mathbf{Q}_*$ — положительно-определенный, иначе говоря, матрица его компонент удовлетворяет требованиям теоремы Сильвестра.

Эллиптичность и сильная эллиптичность, согласно (2.2), определяется заданием удельной потенциальной энергии деформации; поэтому наименование эллиптический (сильно эллиптический) можно приписать самому материалу.

В представлении (2.2) единичный вектор $\mathbf{n}$ может быть заменен по (1.2) единичным вектором $\mathbf{N}$ в актуальной конфигурации. Тогда получим

$$I_3\left(\frac{do}{dO}\right)^2\mathbf{Q}_*=\mathbf{Q}=\mathbf{N}\cdot(\nabla^\circ\mathbf{R}^T\cdot\Pi_{\nabla^\circ\mathbf{R}\nabla^\circ\mathbf{R}}\cdot\cdot\,\mathbf{C}_{II}\nabla^\circ\mathbf{R})\cdot\mathbf{N} \tag{2.3}$$

и поскольку имеет значение лишь знак тензора, можно заменить $\mathbf{Q}_*$ на $\mathbf{Q}$.

3. Критерий сильной эллиптичности изотропного материала. По (1.5), (1.7), (1.9) и (1.11) будем иметь

$$\begin{aligned}\Pi_{\nabla^\circ\mathbf{R}\nabla^\circ\mathbf{R}}&=2[\psi_0\nabla\mathbf{r}^T+\psi_1\nabla^\circ\mathbf{R}+\psi_2\mathbf{G}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}]_{\nabla^\circ\mathbf{R}}=\\&=2[-\psi_0\mathbf{r}_s\mathbf{R}^t\mathbf{r}_t\mathbf{R}^s+(\psi_1\mathbf{E}+\psi_2\mathbf{G})\cdot\mathbf{C}_{II}+\psi_2(\mathbf{r}^t\mathbf{R}_s\mathbf{r}^s\mathbf{R}_t+\mathbf{r}_s\mathbf{R}_t\mathbf{r}^s\mathbf{R}^t\cdot\mathbf{F}]+\\&\quad+2[\nabla\mathbf{r}^T(\psi_0)_{\nabla^\circ\mathbf{R}}+\nabla^\circ\mathbf{R}(\psi_1)_{\nabla^\circ\mathbf{R}}+\mathbf{G}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}(\psi_2)_{\nabla^\circ\mathbf{R}}]\end{aligned} \tag{3.1}$$

Но на основании (1.6)

$$\psi_\Gamma(I_1,I_2,I_3)_{\nabla^\circ\mathbf{R}}=2\psi_\Gamma(I_1,I_2,I_3)_{\mathbf{G}}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}=2[\vartheta_{\Gamma0}\nabla\mathbf{r}^T+\vartheta_{\Gamma1}\nabla^\circ\mathbf{R}+\vartheta_{\Gamma2}\mathbf{G}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}] \tag{3.2}$$

Здесь $\vartheta_{\Gamma N}$ выражаются через ψ_Γ по тем же формулам (1.8), что ψ_Γ — по П:

$$\vartheta_{\Gamma 0}=I_3\frac{\partial\psi_\Gamma}{\partial I_3},\quad \vartheta_{\Gamma 1}=\frac{\partial\psi_\Gamma}{\partial I_1}+I_1\frac{\partial\psi_\Gamma}{\partial I_2},\quad \vartheta_{\Gamma 2}=-\frac{\partial\psi_\Gamma}{\partial I_2}\quad (\Gamma=0,1,2) \tag{3.3}$$

и по (1.8) легко проверить, что $\vartheta_{\Gamma N}=\vartheta_{N\Gamma}$.

Входящий в представление (2.3) тензор четвертого ранга

$$\mathbf{L}=\nabla^\circ\mathbf{R}^T\cdot\Pi_{\nabla^\circ\mathbf{R}\nabla^\circ\mathbf{R}}\cdot\cdot\,\mathbf{C}_{II}\cdot\cdot\,\nabla^\circ\mathbf{R} \tag{3.4}$$

преобразуется с помощью соотношений

$$\nabla^\circ\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{r}_s\mathbf{R}^t\mathbf{r}_t\mathbf{R}^s\cdot\cdot\,\mathbf{C}_{II}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}=\mathbf{C}_{II}{}^*$$

$$\nabla^\circ\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{C}_{II}\cdot\cdot\,\mathbf{C}_{II}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}=\nabla^\circ\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{C}_{III}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}=\mathbf{R}_n\mathbf{E}g^{nq}\mathbf{R}_q=\overset{*}{\mathbf{C}}_{III}\cdot\mathbf{F}$$

$$\nabla^\circ\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{C}_{II}\cdot\cdot\,\mathbf{C}_{II}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}=\mathbf{F}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{C}_{III}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}=\mathbf{F}\cdot\overset{*}{\mathbf{C}}_{III}\cdot\mathbf{F}$$

$$\nabla^\circ\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{r}^t\mathbf{R}_s\mathbf{r}^s\mathbf{R}_t\cdot\cdot\,\mathbf{C}_{II}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}=g^{tq}\mathbf{R}_q\mathbf{R}_s\mathbf{R}_t g^{sp}\mathbf{R}_p=\mathbf{F}\cdot\mathbf{C}_{II}{}^*\cdot\mathbf{F}$$

$$\nabla^\circ\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{r}_s\mathbf{R}_t\mathbf{R}^t\cdot\mathbf{F}\cdot\cdot\,\mathbf{C}_{II}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}=\mathbf{R}_s\mathbf{F}\mathbf{F}\cdot\mathbf{R}^s$$

причем звездочкой указывается, что запись изотропных тензоров $\mathbf{C}_k$ осуществляется в базисах актуальной конфигурации.

Далее имеем

$$\vartheta_{00}\nabla^\circ\mathbf{R}^T\cdot\nabla\mathbf{r}^T\nabla\mathbf{r}^T\cdot\cdot\,\mathbf{C}_{II}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}=\vartheta_{00}\mathbf{E}\mathbf{E}$$

$$\vartheta_{11}\nabla^\circ\mathbf{R}^T\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}\nabla^\circ\mathbf{R}\cdot\cdot\,\mathbf{C}_{II}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}=\vartheta_{11}\mathbf{F}\mathbf{F}$$

$$\vartheta_{22}\nabla^\circ\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{G}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}\mathbf{G}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}\cdot\cdot\,\mathbf{C}_{II}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}=\vartheta_{22}\mathbf{F}^2\mathbf{F}^2$$

$$\vartheta_{01}\nabla^\circ\mathbf{R}^T\cdot(\nabla^\circ\mathbf{R}\nabla\mathbf{r}^T+\nabla\mathbf{r}^T\nabla^\circ\mathbf{R})\cdot\cdot\,\mathbf{C}_{II}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}=\vartheta_{01}(\mathbf{F}\mathbf{E}+\mathbf{E}\mathbf{F})$$

$$\vartheta_{02}\nabla^\circ\mathbf{R}^T\cdot(\mathbf{G}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}\nabla\mathbf{r}^T+\nabla\mathbf{r}^T\cdot\mathbf{G}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R})\cdot\cdot\,\mathbf{C}_{II}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}=\vartheta_{02}(\mathbf{F}^2\mathbf{E}+\mathbf{E}\mathbf{F}^2)$$

$$\vartheta_{12}\nabla^\circ\mathbf{R}^T\cdot(\mathbf{G}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}\nabla^\circ\mathbf{R}+\nabla^\circ\mathbf{R}\mathbf{G}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R})\cdot\cdot\,\mathbf{C}_{II}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}=\vartheta_{12}(\mathbf{F}^2\mathbf{F}+\mathbf{F}\mathbf{F}^2)$$

В результате получим

$$\begin{aligned}{}^1/_4\mathbf{L}&=\vartheta_{00}\mathbf{E}\mathbf{E}+\vartheta_{11}\mathbf{F}\mathbf{F}+\vartheta_{22}\mathbf{F}^2\mathbf{F}^2+\vartheta_{01}(\mathbf{F}\mathbf{E}+\mathbf{E}\mathbf{F})+\\&+\vartheta_{02}(\mathbf{F}^2\mathbf{E}+\mathbf{E}\mathbf{F}^2)+\vartheta_{12}(\mathbf{F}^2\mathbf{F}+\mathbf{F}\mathbf{F}^2)+{}^1/_2\{-\psi_0\mathbf{C}_{II}{}^*+\\&+\psi_1\overset{*}{\mathbf{C}}_{III}\cdot\mathbf{F}+\psi_2[\mathbf{F}\cdot(\mathbf{C}_{II}{}^*+\overset{*}{\mathbf{C}}_{III})\cdot\mathbf{F}+\mathbf{R}_s\mathbf{F}\mathbf{F}\cdot\mathbf{R}^s]\}\end{aligned} \tag{3.5}$$

и остается составить выражение тензора $\mathbf{Q}$:

$$\begin{aligned}{}^1/_4\mathbf{Q}&=(\vartheta_{00}-{}^1/_2\psi_0)\mathbf{N}\mathbf{N}+(\vartheta_{12}+{}^1/_2\psi_2)\mathbf{N}_0\cdot\mathbf{F}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}+\vartheta_{22}\mathbf{N}\cdot\mathbf{F}^2\mathbf{F}^2\cdot\mathbf{N}+\\&+\vartheta_{01}(\mathbf{N}\cdot\mathbf{F}\mathbf{N}+\mathbf{N}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N})+\vartheta_{02}(\mathbf{N}\cdot\mathbf{F}^2\mathbf{N}+\mathbf{N}\mathbf{F}^2\cdot\mathbf{N})+\\&+\vartheta_{12}(\mathbf{N}\cdot\mathbf{F}^2\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}+\mathbf{N}\cdot\mathbf{F}\mathbf{F}^2\cdot\mathbf{N})+{}^1/_2(\psi_1\mathbf{E}+\psi_2\mathbf{F})\mathbf{N}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}+{}^1/_2\psi_2\mathbf{E}\mathbf{N}\cdot\mathbf{F}^2\cdot\mathbf{N}\end{aligned} \tag{3.6}$$

Тензор симметричен ($\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^T$). В сильно эллиптическом материале его собственные значения положительны при любом $\mathbf{N}$. Ими определяются квадраты скоростей волн, распространяющихся в направлении $\mathbf{N}$. Это позволяет назвать $\mathbf{Q}$ акустическим тензором.

4. Частные виды материалов.

1. Блатц и Ко [9] представили результаты опытов над одним из сортов сильно деформируемого каучука трехпараметрическим заданием удельной потенциальной энергии

$$\begin{aligned}\Pi&=\frac{1}{2}\mu\beta\left[I_1+\frac{1}{\alpha}(I_3{}^{-\alpha}-1)-3\right]+\\&+\frac{1}{2}\mu(1-\beta)\left[I_3{}^{-1}I_2+\frac{1}{\alpha}(I_3{}^{\alpha}-1)-3\right]\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\alpha=\nu/(1-2\nu)={}^1/_2\lambda/\mu,\quad -{}^1/_3<\alpha<\infty,\quad -1<\nu<{}^1/_2$$

В [3] рассмотрен частный случай $\beta=0$, $\nu=0.25$, что согласуется в некотором интервале нагружений с данными Блатц и Ко. Выражение П представляется теперь однопараметрической зависимостью

$$\Pi={}^1/{}_2\mu(I_2I_3^{-1}+2\sqrt{I_3}-5) \tag{4.2}$$

Функции инвариантов ψ_Γ, $\vartheta_{N\Gamma}$, вычисляемые по (1.8) и (3.3), равны (отброшен множитель μ)

$$\psi_0=\frac{1}{2I_3}(-I_2+I_3^{3/2}),\qquad \psi_1=\frac{1}{2}\frac{I_2}{I_3},\qquad \psi_2=-\frac{1}{2I_3}$$

$$\vartheta_{00}=\frac{1}{2I_3}\left(I_2+\frac{1}{2}I_3^{3/2}\right),\quad \vartheta_{01}=-\frac{1}{2}\frac{I_1}{I_3},\quad \vartheta_{02}=\vartheta_{11}=\frac{1}{2I_3},\quad \vartheta_{22}=\vartheta_{12}=0$$

Подстановка в (3.6) приводит к выражению

$$\begin{gathered}I_3\mathbf{Q}=3I_2\mathbf{NN}-2I_1(\mathbf{N}\cdot\mathbf{FN}+\mathbf{NF}\cdot\mathbf{N})+2(\mathbf{N}\cdot\mathbf{F}^2\mathbf{N}+\mathbf{NF}^2\cdot\mathbf{N})+\\+\mathbf{N}\cdot\mathbf{FF}\cdot\mathbf{N}+(I_1\mathbf{E}-\mathbf{F})\mathbf{N}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}-\mathbf{EN}\cdot\mathbf{F}^2\cdot\mathbf{N}\end{gathered} \tag{4.3}$$

Мера Фингера и ее инварианты определяются формулами

$$\mathbf{F}=v_1^2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+v_2^2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2+v_3^2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$$

$$I_1=v_1^2+v_2^2+v_3^2,\quad I_2=v_1^2v_2^2+v_2^2v_3^2+v_3^2v_1^2,\quad I_3=v_1^2v_2^2v_3^2 \tag{4.4}$$

Здесь v_s — главные удлинения ($v_s>0$), $\mathbf{e}_s$ — главные направления $\mathbf{F}$. Выражению (4.3) придается вид

$$\begin{gathered}\mathbf{Q}=\sum_{s=1}^{3}v_s^{-2}(2N_s^2+N^2)\mathbf{e}_s\mathbf{e}_s+(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)(v_1^{-2}+v_2^{-2})N_1N_2+\\+(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2)(v_2^{-2}+v_3^{-2})N_2N_3+(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3)(v_3^{-2}+v_1^{-2})N_3N_1\end{gathered} \tag{4.5}$$

причем $N^2=N_1^2+N_2^2+N_3^2$. Результат совпадает с полученным в [3] при обозначении $\mathbf{e}_s'=v_s^{-1}\mathbf{e}_s$. В [3] доказывается, что матрица тензора $\mathbf{Q}$ — сильвестрова для деформирований в границах

$$2-\sqrt{3}<v_s/v_t<2+\sqrt{3}\qquad (s,\ t=1,\ 2,\ 3)$$

2. Рассматривается двухконстантный материал, определяемый по (4.1) при $\beta=1$:

$$\Pi={}^1/{}_2\mu[I_1+\alpha^{-1}(I_3^{-\alpha}-1)-3] \tag{4.6}$$

Линеаризация этого представления приводит к выражению П для линейно-упругого тела; это же выражение, но для $\nu=0.25$ дает линеаризация представления (4.2).

Вычисление очень упрощается, так как отличны от нуля лишь коэффициенты

$$\psi_0=-{}^1/{}_2\mu I_3^{-\alpha},\quad \psi_1={}^1/{}_2\mu,\quad \vartheta_{00}={}^1/{}_2\mu\alpha I_3^{-\alpha}$$

и по (3.6)

$$\mathbf{Q}=\mu[(2\alpha+1)I_3^{-\alpha}\mathbf{NN}+\mathbf{EN}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}] \tag{4.7}$$

Видно, что собственные направления этого тензора образуют триедр единичных векторов $\mathbf{N}$, $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$, причем $\mathbf{t}_1\cdot\mathbf{t}_2=0$, $\mathbf{t}_\alpha\cdot\mathbf{N}=0$ ($\alpha=1,\ 2$).

Собственные числа, равные

$$\lambda_1=\mu[(2\alpha+1)I_3^{-\alpha}+\mathbf{N}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}],\quad \lambda_2=\lambda_3=\mu\mathbf{N}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{N} \tag{4.8}$$

положительны, поскольку $2\alpha+1<0$. Сказанное — следствие соотношений

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{N}=\mu[(2\alpha+1)I_3^{-\alpha}+\mathbf{N}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}]\mathbf{N}$$

и определения собственных направлений тензора. Материал (4.6) — сильноэллиптический при любых деформациях.

3. Этот результат обобщается на более общий класс материалов, когда удельная потенциальная энергия деформации П задается выражением

$$\Pi=f_1(I_1)+f_3(\sqrt{I_3}) \tag{4.9}$$

Тогда

$$\Pi_{\nabla^\circ\mathbf{R}}=2f_1'\nabla^\circ\mathbf{R}+f_3'\sqrt{I_3}\nabla\mathbf{r}^T$$

$$\Pi_{\nabla^\circ\mathbf{R}\nabla^\circ\mathbf{R}}\cdot\cdot\mathbf{C}_{II}=4f_1''\nabla^\circ\mathbf{R}\nabla^\circ\mathbf{R}^T+2f_1'\mathbf{C}_{III}+f_3''I_3\nabla\mathbf{r}^T\nabla\mathbf{r}+$$
$$+f_3'\sqrt{I_3}(\nabla\mathbf{r}^T\nabla\mathbf{r}-\mathbf{r}_m\mathbf{R}^q\mathbf{R}^m\mathbf{r}_0)$$

и по (3.4)

$$\mathbf{L}=4f_1''\mathbf{F}\mathbf{F}+2f_1'g^{ms}\mathbf{R}_m\mathbf{E}\mathbf{R}_s+f_3''I_3\mathbf{E}\mathbf{E}+f_3'\sqrt{I_3}(\mathbf{E}\mathbf{E}-\mathbf{R}_m\mathbf{R}^q\mathbf{R}^m\mathbf{R}_q)$$

В результате на основе (2.5) будем иметь

$$\mathbf{Q}=\mathbf{N}\cdot\mathbf{L}\cdot\mathbf{N}=4f_1''\mathbf{N}\cdot\mathbf{F}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}+2f_1'\mathbf{E}\mathbf{N}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}+f_3''I_3\mathbf{N}\mathbf{N} \tag{4.10}$$

так как

$$\mathbf{N}\cdot(\mathbf{E}\mathbf{E}-\mathbf{R}_m\mathbf{R}^q\mathbf{R}^m\mathbf{R}_q)\cdot\mathbf{N}=\mathbf{N}\mathbf{N}-\mathbf{R}^q\mathbf{R}^mN_mN_q=\mathbf{N}\mathbf{N}-\mathbf{N}\mathbf{N}=0$$

Достаточными условиями сильной эллиптичности служат неравенства

$$f_1'(I_1)>0,\quad f_1''(I_1)>0,\quad f_3''(\sqrt{I_3})\geqslant 0 \tag{4.11}$$

5. Представление акустического тензора в базисе собственных направлений тензора Фингера. Вернувшись к (3.6), имеем

$$\frac{1}{4}\mathbf{Q}=\sum_{s=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\mathbf{e}_s\mathbf{e}_k\Big[\vartheta_{00}+\vartheta_{11}v_s^2v_k^2+\vartheta_{22}v_s^4v_k^4+$$
$$+\vartheta_{01}(v_s^2+v_k^2)+\vartheta_{02}(v_s^4+v_k^4)+\vartheta_{12}v_s^2v_k^2(v_s^4+v_k^4)-$$
$$-\frac{1}{2}\psi_0+\frac{1}{2}\psi_2v_s^2v_k^2\Big]N_sN_k+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3}(\psi_1+\psi_2v_s^2)\mathbf{e}_s\mathbf{e}_s\sum_{k=0}^{3}v_k^2N_k^2+$$
$$+\frac{1}{2}\psi_2\sum_{s=1}^{3}\mathbf{e}_s\mathbf{e}_s\sum_{k=1}^{3}v_k^4N_k^2,\qquad N_k=\mathbf{N}\cdot\mathbf{e}_k \tag{5.1}$$

Компоненты тензора теперь определяются по формулам

$$\frac{1}{4}Q^{11}=\Big[\sum_{N=0}^{2}\sum_{\Gamma=0}^{2}\vartheta_{N\Gamma}v_1^{2(N+\Gamma)}+\frac{1}{2}(-\psi_0+\psi_1v_1^2+3\psi_2v_1^4\Big]N_1^2+$$
$$+\frac{1}{2}v_2^2[\psi_1+\psi_2(v_1^2+v_2^2)]N_2^2+\frac{1}{2}v_3^2[\psi_1^2+\psi_2^2(v_1^2+v_3^2)]N_3^2 \tag{5.2}$$

$$\frac{1}{4}Q^{12}=\frac{1}{4}Q^{21}=\Big[\sum_{N=0}\sum_{\Gamma=0}\vartheta_{N\Gamma}v_1^{2N}v_2^{2\Gamma}-\frac{1}{2}\psi_0+\frac{1}{2}\psi_2v_1^2v_2^2\Big]N_1N_2 \tag{5.3}$$

Правые части оказывается возможным выразить через главные напряжения σ_s и их производные. Дифференцируя по v_1^2 и v_2^2 соотношение

$$v_1^2\partial\Pi/\partial v_1^2=\psi_0+\psi_1v_1^2+\psi_2v_1^4={}^1/_2\sqrt{I_3}\sigma_1 \tag{5.4}$$

будем иметь

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_1^2}+v_1^2\frac{\partial^2\Pi}{\partial v_1^2\partial v_1^2}=\psi_1+2\psi_2 v_1^2+\frac{1}{v_1^2}\sum_{N=0}^{2}\sum_{\Gamma=0}^{2}\vartheta_{N\Gamma}v_1^{2(N+\Gamma)}=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{I_3}}{v_1^2}\sigma_1+\frac{\sqrt{I_3}}{2}\frac{\partial\sigma_1}{2v_1^2}=\frac{1}{2v_1^2}(\psi_0+\psi_1 v_1^2+\psi_2 v_1^4)+\frac{1}{2}\sqrt{I_3}\frac{\partial\sigma_1}{\partial v_1^2}$$

$$v_1^2\frac{\partial^2\Pi}{\partial v_2^2\partial v_1^2}=\frac{1}{v_2^2}\sum_{N=0}^{2}\sum_{\Gamma=0}^{2}\vartheta_{N\Gamma}v_1^{2N}v_2^{2\Gamma}=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{I_3}}{v_2^2}\sigma_1+$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{I_3}\frac{\partial\sigma_1}{\partial v_2^2}=\frac{1}{2v_2^2}(\psi_0+\psi_1 v_1^2+\psi_2 v_1^4)+\frac{1}{2}\sqrt{I_3}\frac{\partial\sigma_1}{\partial v_2^2}$$

и это дает возможность исключить из (5.2), (5.3) двойные суммы. Приходим к искомым соотношениям [5]:

$$I_3^{-1/2}Q^{11}=v_1\frac{\partial\sigma_1}{\partial v_1}N_1^2+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{v_1^2-v_2^2}v_2^2N_2^2+\frac{\sigma_1-\sigma_3}{v_1^2-v_3^2}v_3^2N_3^2 \tag{5.5}$$

$$I_3^{-1/2}Q^{12}=\left(v_2\frac{\partial\sigma_1}{\partial v_2}+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{v_1^2-v_2^2}v_1^2\right)N_1N_2 \tag{5.6}$$

Остальные получаются после замены индексов; в частности

$$I_3^{-1/2}Q^{21}=\left(v_1\frac{\partial\sigma_2}{\partial v_1}+\frac{\sigma_2-\sigma_1}{v_2^2-v_1^2}v_2^2\right)N_1N_2$$

откуда следует тождество

$$v_2\partial\sigma_1/\partial v_2+\sigma_1=v_1\partial\sigma_2/\partial v_1+\sigma_2 \tag{5.7}$$

Необходимые условия сильной эллиптичности материала приводят к трем неравенствам

$$\partial\sigma_s/\partial v_s>0 \quad (s=1,2,3) \tag{5.8}$$

выражающим монотонность возрастания главных напряжений вместе с соответствующими им главными удлинениями, и к трем неравенствам Бейкера — Эриксена

$$(\sigma_s-\sigma_k)/(v_s-v_k)>0 \quad (s\neq k) \tag{5.9}$$

устанавливающим одинаковость знаков главных касательных напряжений и главных сдвигов. Неравенства (5.8), (5.9) выражают только положительность диагональных элементов $\det \mathbf{Q}$; остающиеся требования теоремы Сильвестра, по-видимому, не поддаются отчетливой интерпретации.

6. Определение тензора напряжений в изотропной среде по заданию удельной потенциальной энергии как функции инвариантов $I_k(G^{1/2})$. Инварианты $I_k(\mathbf{U})=I_k(\mathbf{F}^{1/2})$ обозначаются I_k'. По условию $\Pi=\Pi(I_1', I_2', I_3')$. Учитывая (1.5) и правила дифференцирования скаляра по тензорному аргументу, будем иметь

$$\Pi_{\nabla\circ\mathbf{R}}=\sum_{s=1}\frac{\partial\Pi}{\partial I_s'}(I_s')_{\nabla\circ\mathbf{R}},\qquad (I_s')_{\nabla\circ\mathbf{R}}=(I_s')_{\mathbf{G}}\cdot\cdot\mathbf{C}_{\mathrm{II}}\cdot\cdot\mathbf{G}_{\nabla\circ\mathbf{R}}=$$

$$=(I_s')_{\mathbf{G}}\cdot\cdot\mathbf{C}_{\mathrm{II}}\cdot\cdot(\mathbf{C}_{\mathrm{II}}+\mathbf{C}_{\mathrm{III}})\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}=2(I_s')_{\mathbf{G}}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}$$

$$\mathbf{T}=2I_3^{-1/2}\nabla^\circ\mathbf{R}^T\cdot\sum_{s=1}^{3}\frac{\partial\Pi}{\partial I_s'}(I_s')_{\mathbf{G}}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R} \tag{6.1}$$

так как

$$\nabla^\circ \mathbf{R}\cdot \mathbf{C}_{III}=\mathbf{C}_{III}\cdot \nabla^\circ \mathbf{R}, \quad (I_s')_{\mathbf{G}}\cdot\cdot \mathbf{C}_{II}\cdot\cdot (\mathbf{C}_{II}+\mathbf{C}_{III})=$$
$$=(I_s')_{\mathbf{G}}\cdot\cdot (\mathbf{C}_{II}+\mathbf{C}_{III})=2(I_s')_{\mathbf{G}}$$

Остается определить производные I_s' по аргументу $\mathbf{G}$. Имеем

$$\delta I_1'=\mathbf{E}\cdot\cdot \delta\mathbf{U}^T=(I_1')_{\mathbf{G}}\cdot\cdot (\delta\mathbf{U}^2)^T=(I_1')_{\mathbf{G}}\cdot\cdot [\mathbf{U}\cdot\delta\mathbf{U}^T+(\delta\mathbf{U}^T)\cdot\mathbf{U}]=$$
$$=[(I_1')_{\mathbf{G}}\cdot\mathbf{U}+\mathbf{U}\cdot(I_1')_{\mathbf{G}}]\cdot\cdot\delta\mathbf{U}^T$$

Таким образом, приходим к матричному уравнению

$$(I_1')_{\mathbf{G}}\cdot\mathbf{U}+\mathbf{U}\cdot(I_1')_{\mathbf{G}}=\mathbf{E}$$

решение которого очевидно $(I_1')_{\mathbf{G}}={}^1/_2\mathbf{U}^{-1}$.

Далее имеем

$$I_1'^2-2I_2'=I_1, \quad {}^1/_2 I_1'\mathbf{U}^{-1}-(I_2')_{\mathbf{G}}={}^1/_2\mathbf{E}, \quad (I_3^{1/2})_{\mathbf{G}}={}^1/_2 I_3'\mathbf{G}^{-1}={}^1/_2 I_3'\mathbf{U}^{-2}$$

Итак

$$(I_1')_{\mathbf{G}}={}^1/_2\mathbf{U}^{-1}, \qquad (I_2')_{\mathbf{G}}={}^1/_2(I_1'\mathbf{U}^{-1}-\mathbf{E}), \qquad (I_3')_{\mathbf{G}}={}^1/_2 I_3'\mathbf{U}^{-2} \tag{6.2}$$

Использовав полярное представление градиента места $\nabla^\circ\mathbf{R}=\mathbf{U}\cdot\mathbf{O}=\mathbf{O}\cdot\mathbf{V}$, $\mathbf{V}=\mathbf{O}^T\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{O}$, в котором $\mathbf{O}$ — сопровождающий деформацию ортогональный тензор, получаем

$$2\nabla^\circ\mathbf{R}^T\cdot(I_1')_{\mathbf{G}}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}=\mathbf{O}^T\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{U}^{-1}\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{O}=\mathbf{V}$$

$$2\nabla^\circ\mathbf{R}^T\cdot(I_2')_{\mathbf{G}}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}=I_1'\mathbf{V}-\mathbf{V}^2, \qquad 2\nabla^\circ\mathbf{R}^T\cdot(I_3')_{\mathbf{G}}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}=\mathbf{E}I_3' \tag{6.3}$$

Подстановка этих соотношений в (6.1) приводит к искомому представлению тензора напряжений Коши

$$\mathbf{T}=I_3^{-1/2}\left[I_3'\frac{\partial\Pi}{\partial I_3'}E+\left(\frac{\partial\Pi}{\partial I_1'}+I_1'\frac{\partial\Pi}{\partial I_2'}\right)\mathbf{V}-\frac{\partial\Pi}{\partial I_2'}\mathbf{V}^2\right] \tag{6.4}$$

Его структура аналогична (1.7), (1.8), но отсутствует множитель, равный двум.

7. Акустический тензор в полулинейном материале. Удельная потенциальная энергия задается выражением

$$\Pi={}^1/_2(\lambda+2\mu)I_1'^2-(3\lambda+2\mu)I_1'-2\mu I_2' \qquad (\mu>0) \tag{7.1}$$

и по (6.4) имеем

$$\mathbf{T}=I_3^{-1/2}\{[\lambda(I_1'-3)-2\mu]\mathbf{V}+2\mu\mathbf{V}^2\} \tag{7.2}$$

По формулам для главных напряжений

$$\sigma_1=I_3^{-1/2}v_1[(\lambda+2\mu)v_1+\lambda(v_2+v_3)-(3\lambda+2\mu)]$$

. . . .

получаем

$$v_1\frac{d\sigma_1}{\partial v_1}=I_3^{-1/2}(\lambda+2\mu)v_1^2, \qquad v_2\frac{\partial\sigma}{\partial v_2}=-I_3^{-1/2}v_1[(\lambda+2\mu)v_1+\lambda v_3-(3\lambda+2\mu)]$$

$$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{v_1-v_2}=I_3^{-1/2}[(\lambda+2\mu)(v_1+v_2)+\lambda v_3-(3\lambda+2\mu)]$$

. . . .

Неравенства (5.8) сводятся к условию $\lambda+2\mu>0$. Неравенства (5.9) приводятся к виду

$$(\lambda+2\mu)(v_1+v_2)+\lambda v_3>3\lambda+2\mu \tag{7.3}$$

. . . .

Ими определяется в положительном октанте значений v_1, v_2, v_3 область деформирований, в которой материал сильно эллиптичен [1]

$$\begin{gathered}\frac{1-\nu}{1+\nu}(v_1+v_2)+\frac{\nu}{1+\nu}v_3>1\\ \frac{1-\nu}{1+\nu}(v_2+v_3)+\frac{\nu}{1+\nu}v_1>1\\ \frac{1-\nu}{1+\nu}(v_3+v_1)+\frac{\nu}{1+\nu}v_2>1\end{gathered} \tag{7.4}$$

Эти три неравенства оказываются не только необходимыми, но и достаточными условиями сильной эллиптичности. Достаточно убедиться, что их выполнение гарантирует положительность матрицы акустического тензора. Вычисление по формулам (5.5), (5.6) при обозначениях

$$v_1N_1=x,\quad v_2N_2=y,\quad v_3N_3=z,\ r^2=x^2+y^2+z^2$$

$$\frac{\lambda v_1-3\lambda-2\mu}{v_2+v_3}=A_1,\quad \frac{\lambda v_2-3\lambda-2\mu}{v_3+v_1}=A_2,\quad \frac{\lambda v_3-3\lambda-2\mu}{v_1+v_2}=A_3$$

приводит к следующим представлениям компонент Q:

$$\begin{aligned}&Q^{11}=(\lambda+2\mu)r^2+A_3y^2+A_2z^2\\ &Q^{22}=(\lambda+2\mu)r^2+A_1z^2+A_3x^2\\ &Q^{33}=(\lambda+2\mu)r^2+A_2x^2+A_1y^2\\ &Q^{12}=-A_3xy,\quad Q^{23}=-A_1yz,\quad Q^{31}=-A_2zx\end{aligned}$$

и неравенства (7.4) могут быть записаны в виде

$$\lambda+2\mu+A_s=B_s>0\quad (s=1,2,3) \tag{7.5}$$

Сначала рассмотрим случай, когда одна из переменных, например, $z=0$, а $x\neq0$ и $y\neq0$. Тогда

$$Q^{33}=B_2x^2+B_1y^2,\quad Q^{11}=(\lambda+2\mu)x^2+B_3y^2,\quad Q^{22}=(\lambda+2\mu)y^2+B_3x^2$$

и тензор Q представим выражением

$$\begin{aligned}Q=&(\lambda+2\mu)(x^2+y^2)\mathbf{E}_2+B_3[y^2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+x^2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2-\\ &-xy(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)]+(B_2x^2+B_1y^2)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3=\\ =&(\lambda+2\mu)(x^2+y^2)\mathbf{E}_2+B_3(x^2+y^2)\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3+(B_2x^2+B_1y^2)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

причем $\mathbf{E}_2=\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2$ — единичный тензор на плоскости, и в рассмотрение вводятся единичные векторы

$$\mathbf{a}_3=\frac{\mathbf{e}_1y-\mathbf{e}_2x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \mathbf{b}_3=\frac{\mathbf{e}_1x+\mathbf{e}_2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad \mathbf{a}_3\cdot\mathbf{b}_3=0$$

Собственные числа тензора $\mathbf{Q}$ положительны и определяются равенствами

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a}_3=(\lambda+2\mu+B_3)(x^2+y^2)\mathbf{a}_3$$
$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}_3=(\lambda+2\mu)(x^2+y^2)\mathbf{b}_3,\quad \mathbf{Q}\cdot\mathbf{e}_3=(B_2x^2+B_1y^2)\mathbf{e}_3$$

---

[1] Эти неравенства сообщил автору Е. Л. Гурвич.

Аналогичны случаи $y=0$, $z\neq 0$, $x\neq 0$; $x=0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$.

Переходим к случаю, когда нормаль $\mathbf{N}$ не сонаправлена ни с одним из собственных направлений $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ тензора $\mathbf{F}$, иначе говоря, $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$. Тензор $\mathbf{Q}$ представляется выражением

$$\begin{gathered}\mathbf{Q}=(\lambda+2\mu)(x^2+y^2+z^2)\mathbf{E}+A_1(y^2+z^2)\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1+\\ +A_2(z^2+x^2)\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2+A_3(x^2+y^2)\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3\end{gathered}\qquad(7.6)$$

причем, как выше, a_s — единичные векторы

$$\mathbf{a}_1=\frac{z\mathbf{e}_2-y\mathbf{e}_3}{\sqrt{y^2+z^2}},\quad \mathbf{a}_2=\frac{x\mathbf{e}_3-z\mathbf{e}_1}{\sqrt{z^2+x^2}},\quad \mathbf{a}_3=\frac{y\mathbf{e}_1-x\mathbf{e}_2}{\sqrt{x^2+y^2}}\qquad(7.7)$$

в плоскости, перпендикулярной вектору

$$\mathbf{b}=(\mathbf{e}_1x+\mathbf{e}_2y+\mathbf{e}_3z)/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

который является одним из собственных направлений $\mathbf{Q}$ с соответствующим собственным значением $(\lambda+2\mu)(x^2+y^2+z^2)$. Остается рассмотреть тензор

$$\begin{gathered}\mathbf{Q}^*=\mathbf{Q}-(\lambda+2\mu)(x^2+y^2+z^2)\mathbf{bb}=Q-(\lambda+2\mu)(\mathbf{e}_1x+\mathbf{e}_2y+\mathbf{e}_3z)\times\\ \times(\mathbf{e}_1x+\mathbf{e}_2y+\mathbf{e}_3z)\end{gathered}$$

преобразуемый по (7.5) и (7.6) к виду

$$\mathbf{Q}^*=B_1(y^2+z^2)\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1+B_2(z^2+x^2)\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2+B_3(x^2+y^2)\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3\qquad(7.8)$$

Из (7.7) следует, что векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ связаны соотношением

$$x\sqrt{y^2+z^2}\mathbf{a}_1+y\sqrt{z^2+x^2}\mathbf{a}_2+z\sqrt{x^2+y^2}\mathbf{a}_3=0$$

позволяющим исключить $\mathbf{a}_3$, например, из выражения плоского тензора $\mathbf{Q}^*$. Получаем

$$\begin{gathered}\mathbf{Q}^*=(y^2+z^2)\left(B_1+B_3\frac{x^2}{r^2}\right)\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1+(z^2+x^2)\left(B_2+B_3\frac{y^2}{z^2}\right)\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2+\\ +B_3\frac{xy}{z^2}\sqrt{(y^2+z^2)(z^2+x^2)}(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_2\mathbf{a}_1)\end{gathered}$$

Диагональные элементы матрицы этого тензора и ее определитель

$$(x^2+z^2)(y^2+z^2)[B_1B_2z^2+B_3(B_1y^2+B_2x^2)]/z^2$$

положительны. Этим завершено доказательство положительности акустического тензора в полулинейном материале при условиях (7.4).

В предположении сильной эллиптичности материала, иначе говоря, положительности акустического тензора

$$\mathbf{Q}=\mathbf{N}\cdot\mathbf{L}\cdot\mathbf{N}=\mathbf{N}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}^T\cdot\Pi_{\nabla^\circ\mathbf{R}\nabla^\circ\mathbf{R}}\cdot\cdot\mathrm{C}_{\mathrm{II}}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}\cdot\mathbf{N}\qquad(7.9)$$

далее рассматривается материал с удельной потенциальной энергией $f(\Pi)$. Тогда

$$f(\Pi)_{\nabla^\circ\mathbf{R}}=f'\Pi_{\nabla^\circ\mathbf{R}},\qquad f(\Pi)_{\nabla^\circ\mathbf{R}\nabla^\circ\mathbf{R}}=f''\Pi_{\nabla^\circ\mathbf{R}}\Pi_{\nabla^\circ\mathbf{R}}+f'\Pi_{\nabla^\circ\mathbf{R}\nabla^\circ\mathbf{R}}$$

Вместе с тем по (1.5)

$$\begin{gathered}\Pi_{\nabla^\circ\mathbf{R}}\Pi_{\nabla^\circ\mathbf{R}}=\mathbf{PP}=I_3\nabla\mathbf{r}^T\cdot\mathbf{T}\nabla\mathbf{r}^T\cdot\mathbf{T}\\ \nabla^\circ\mathbf{R}^T\cdot\Pi_{\nabla^\circ\mathbf{R}}\Pi_{\nabla^\circ\mathbf{R}}\cdot\cdot\mathrm{C}_{\mathrm{II}}\nabla^\circ\mathbf{R}=I_3\nabla^\circ\mathbf{R}^T\cdot\nabla\mathbf{r}^T\cdot\mathbf{TT}\cdot\nabla\mathbf{r}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}=I_3\mathbf{TT}\end{gathered}$$

Таким образом, имеем

$$\mathbf{L}=f''(\Pi)I_3\mathbf{TT}+f'(\Pi)\nabla^\circ\mathbf{R}^T\cdot\Pi_{\nabla^\circ\mathbf{R}\nabla^\circ\mathbf{R}}\cdot\cdot\mathrm{C}_{\mathrm{II}}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}$$

и по (7.9)

$$\mathbf{Q}=I_3 f''(\Pi)\,\mathbf{N}\cdot\mathbf{TT}\cdot\mathbf{N}+f'(\Pi)\,\mathbf{Q}^*,\qquad Q^*=\mathbf{N}\cdot\nabla^\circ\mathbf{R}^T\cdot\Pi_{\nabla^\circ\mathbf{R}\nabla^\circ\mathbf{R}}\cdot\cdot\,\mathbf{C}_{II}\nabla^\circ\mathbf{R}\cdot\mathbf{N}$$

причем по условию $\mathbf{Q}^*$ — положительный тензор.

Достаточными условиями сильной эллиптичности материала с потенциальной энергией $f(\Pi)$ служат неравенства $f'(\Pi)>0$, $f''(\Pi)\geqslant 0$. Более общие признаки предложены в [10].

Поступила 5 X 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эриксен Дж. Л.* Некоторые проблемы устойчивости в нелинейной теории упругости. В сб.: Успехи механики деформируемых сред. М., «Наука», 1975.
2. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. 4, § 161. М.— Л., Гостехиздат, 1951.
3. *Knowles J. K., Sternberg E.* On the ellipticity of the equations of non-linear elastostatics for a special material. J. Elasticity, 1975, vol. 5, No. 3—4, p. 341—361.
4. *Knowles J. K., Sternberg E.* On the failure of ellipticity of the equations for finite elastostatics plane strain. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1977, vol. 63, No. 4, p. 321—336.
5. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М., «Мир», 1975.
6. *Jeffreys H.* Cartosian tensors. Cambridge, Univ. Press, 1931.
7. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
8. *Лурье А. И.* Дифференцирование по тензорному аргументу. В сб.: Вопросы математической физики. Л., «Наука», 1976.
9. *Blatz P. J., Ko W. L.* Application of finite elastic theory to the deformation of rubbery materials. Trans. Soc. Rheology, 1962, vol. 6, p. 223.
10. *Ball J. M.* Convexity conditions and existence theorems in non-linear elasticity. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1977, vol. 63, No. 4, p. 337—403.