МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1979

УДК 531.3

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ СОЧЕТАНИИ УСКОРЕНИЯ И ТОРМОЖЕНИЯ ТОЧКИ ПОДВЕСА ПРИ РАЗГОНЕ ВИСЯЩЕГО ГРУЗА

А. Т. ЗАРЕМБА, Б. Н. СОКОЛОВ

(Москва)

Рассмотрена задача оптимального по быстродействию разгона висящего груза (маятника) в предположении, что скорость точки подвеса ограничена. Предполагается, что в заданных ограничениях абсолютная величина скорости точки подвеса может либо возрастать с ограниченным ускорением, либо быть уменьшена мгновенно с сохранением знака скорости. Построено управление, сообщающее точке подвеса за минимальное время максимальную скорость в заданном направлении с гашением колебаний груза относительно точки подвеса. Решена также задача оптимального торможения груза.

Продолжено исследование оптимальных режимов работы мостовых кранов и подобных им перегружателей, начатое в [1–7]. Ранее задачи управления колебательными системами исследовались также в [8].

1. Рассмотрим маятник, точка подвеса которого может перемещаться с ограниченной скоростью вдоль горизонтальной направляющей. Предположим, что управление позволяет с ограниченным ускорением увеличивать абсолютную величину скорости точки подвеса либо мгновенно уменьшать ее с сохранением знака скорости. Движение маятника в безразмерных переменных описывается следующими уравнениями [2–4, 6] и ограничениями:

$$\varphi_1^{\boldsymbol{\cdot}}=\varphi_2,\ \varphi_2^{\boldsymbol{\cdot}}=-\varphi_1+w,\ v^{\boldsymbol{\cdot}}=w,\ |v|\leqslant a \tag{1.1}$$

$$w\in[1,\ -b] \text{ при } v>0;\ w\in[b,\ -1] \text{ при } v<0,\ w\in[1,\ -1] \text{ при } v=0,\ b\to\infty$$

Здесь φ_1 — безразмерный угол отклонения маятника от вертикали, φ_2 — угловая скорость, v — скорость точки подвеса, w — управляющее ускорение.

В начальный момент маятник покоится. Требуется выбором управления $w(t)$ перевести маятник за минимальное время в состояние поступательного движения с максимальной скоростью в заданном направлении. Граничные условия и функционал поставленной задачи имеют вид

$$\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=v(0)=\varphi_1(T)=\varphi_2(T)=0,\ v(T)=a,\ T\to\min \tag{1.2}$$

Ранее задачи разгона рассматривались в [4, 6, 7]. В [4] предполагалось, что скорость точки подвеса ограничена и в заданных пределах может меняться мгновенно. В [6] была рассмотрена задача разгона при ограниченных по модулю скорости и ускорении точки подвеса. В [7] исследован случай произвольных независимых ограничений на скорость и ускорение точки подвеса. Уравнения и ограничения (1.1) описывают движение крановых установок, привод которых обеспечивает плавный разгон точки подвеса, а тормозная система позволяет почти мгновенно уменьшать ее скорость.

Используя результаты [7], можно показать, что в поставленной задаче (1.1), (1.2) при $a \geqslant a^* = 1.8959$ ограничение $|v| \leqslant a$ нигде не нарушается, всегда $v(t) > 0$ и оптимальное управление имеет вид

$$w(t) = 1 - 2\frac{\sin {}^1/_2\tau}{k+1} \sum_{n=0}^{k} \delta\left(t - \frac{1}{2}\tau - 2n\pi\right) \tag{1.3}$$

где δ — дельта-функция Дирака, k и τ удовлетворяют уравнению $a = 2\pi k + \tau - 2\sin {}^1/_2\tau$, $k=0, 1, 2, \ldots, 0 \leqslant \tau < 2\pi$. Время быстродействия $T = 2\pi k + \tau$.

2. Рассмотрим случай $a < a^*$. Будем считать, что если на каком-то отрезке времени выполнено $|v(t)| \equiv a$, то скорость $v(t)$ на этом отрезке движется по фазовому ограничению. Обозначим через t_1 первый момент выхода на фазовое ограничение $v \leqslant a$, а через t_2 — первый момент схода с него, таким образом всюду на $[t_1, t_2]$ выполнено $v(t) \equiv a$.

Для решения оптимальной задачи воспользуемся принципом максимума [8, 9]. Вначале рассмотрим случай $b < \infty$ (1.1), а затем перейдем к пределу при $b \to \infty$. Выпишем функцию Гамильтона и сопряженные переменные, соответствующие уравнениям (1.1):

$$H = p_1\varphi_2 + p_2(-\varphi_2 + w) + p_3 w \tag{2.1}$$

$$\dot{p}_1 = p_2, \quad \dot{p}_2 = -p_1, \quad \dot{p}_3 = 0 \tag{2.2}$$

На оптимальной траектории при $|v(t)| < a$ функция Гамильтона достигает максимума, таким образом

$$\begin{aligned} &w = +1 \text{ при } p_2 + p_3 > 0,\ a > v > 0 \\ &w = -b \text{ при } p_2 + p_3 < 0,\ a > v > 0 \\ &w = -1 \text{ при } p_2 + p_3 < 0,\ -a < v < 0 \\ &w = b \text{ при } p_2 + p_3 > 0,\ -a < v < 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

На интервалах времени, которым соответствует $|v(t)| \equiv a$, выполнено $w \equiv 0$.

В момент t_2 сопряженные переменные $p_1(t)$, $p_2(t)$ непрерывны, а $p_3(t)$ терпит скачок $p_3(t_2 - 0) = p_3(t_2 + 0) + \nu_1$. Фазовые ограничения от времени не зависят, поэтому функция Гамильтона непрерывна вдоль траектории

$$\begin{aligned} H|_{t_2+0} - H|_{t_2-0} &= (p_1\varphi_2 + p_2(-\varphi_1 + w) + p_3 w)|_{t_2+0} - \\ &- (p_1\varphi_2 - p_2\varphi_1)|_{t_2-0} = w(p_2 + p_3)|_{t_2+0} = 0 \end{aligned}$$

В момент $t_2 + 0$ выполнено $w(t_2 + 0) = -b$, следовательно

$$p_2(t_2 + 0) = -p_3(t_2 + 0) \tag{2.4}$$

В момент t_1 — выхода скорости на ограничение выполнено аналогичное условие.

Обозначим через ζ_i ($\zeta_i \neq 0$) i-й момент, при котором $v(t) = 0$. Ограничения на w (1.1) зависят только от знака скорости, поэтому сопряженные переменные p_1, p_2 в момент ζ_i непрерывны, а p_3 терпит скачок $p_3(\zeta_i - 0) = p_3(\zeta_i + 0) + \mu_i$.

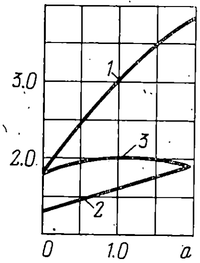
Рассмотрим отрезок времени $[t_2, t_3]$. Здесь t_3 — точка, в которой скорость $v(t)$ либо впервые выходит на нижнее ограничение, либо принимает наименьшее значение. Покажем, что на $[t_2, t_3]$ скорость $v(t)$ монотонно убывает. Предположим, что это не так и обозначим через ξ_1 и ξ_2 точки, где ускорение на отрезке $[t_2, t_3]$ меняет знак с минуса на плюс и с плюса на минус соответственно. Тогда в точках t_2, ξ_1, ξ_2, t_3 функция $p_2(t) + p_3(t)$ обращается, согласно (2.3), (2.4), в нуль. На интервалах времени, на которых скорость не выходит на ограничение и в нуль не обращается, выполнено $p_3(t)=\text{const}$. Поэтому

$$\operatorname{sign} p_2^{\bullet}(t_2)=-\operatorname{sign} p_2^{\bullet}(\xi_1)=\operatorname{sign} p_2^{\bullet}(\xi_2)=-\operatorname{sign} p_2^{\bullet}(t_3)$$

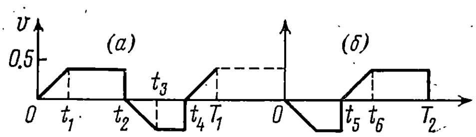
Отсюда следует, что на отрезках $[t_2, \xi_1]$, $[\xi_1, \xi_2]$ и $[\xi_2, t_3]$ функция $p_2(t)=A\sin(t+\theta)$ имеет экстремумы. Но расстояние между экстремальными точками этой функции не менее π. Следовательно, $t_3-t_2>2\pi$, что противоречит тому, что $a<a^*<\pi$.

Покажем, что на отрезке $[t_4, T]$ скорость монотонно возрастает. Здесь t_4 — момент схода скорости с нижнего ограничения. Если скорость нигде не выходит на нижнее ограничение, то t_4 совпадает с t_3.

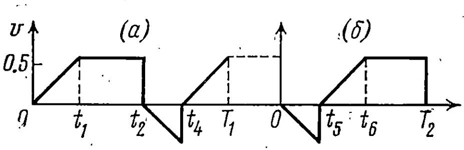
Предположим, что $v(t)$ на $[t_4, T]$ не монотонна. В этом случае, повторив предыдущие рассуждения, можно показать, что $T-t_4>\pi$. Так как ско-



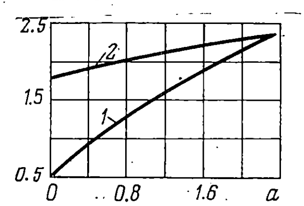
Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2



Фиг. 4

рость хотя бы раз выходит на фазовое ограничение, то для полного времени разгона получается оценка $T>a+T-t_4>a+\pi$. Расчеты показали, что $a+\pi>T_1$, где T_1 — время разгона при условии монотонного возрастания $v(t)$ на $[t_4, T]$ (см. фиг. 1). Следовательно, $T>T_1$ и если $v(t)$ на $[t_4, T]$ не монотонна, то время разгона T не является оптимальным. Аналогично доказывается монотонность $v(t)$ на отрезке $[0, t_1]$.

3. Устремим b к бесконечности. Как было показано в п. 1, при $a=1.8959$ оптимальная скорость впервые выходит на верхнее фазовое ограничение. Согласно условиям оптимальности, управление с одним выходом скорости на верхнее фазовое ограничение имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} w=-a\delta(t-t_2)+(t_4-t_2)\delta(t-t_4)+w' \\ w'=1 \text{ при } t\in(0, t_1)\cup(t_4, T_1) \\ w'=0 \text{ при } t\in(t_1, t_2),\ w=-1 \text{ при } t\in(t_2, t_4) \end{gathered} \tag{3.1}$$

Проинтегрируем уравнения (1.1) с $w(t)$ (3.1); учитывая граничные условия (1.2), а также равенства $t_1=a$, $T_1=t_4+a$, получаем систему трансцендентных уравнений относительно t_2 и t_4:

$$\begin{gathered} \cos t_4-\cos(t_4+a)-a\sin(t_4-t_2+a)+\cos(t_4-t_2+a)=2\cos a-(t_4-t_2)\sin a-1 \\ \sin t_4-\sin(t_4+a)+a\cos(t_4-t_2+a)+\sin(t_4-t_2+a)=2\sin a+(t_4-t_2)\cos a \end{gathered} \tag{3.2}$$

Результаты численного решения системы (3.2) в зависимости от параметра a при $0.5068 \leqslant a \leqslant 1.8959$ приведены на фиг. 1 (кривая *1* соответствует T_1, а кривые *2*, *3* характеризуют t_2 и t_4). График оптимальной скорости с одним выходом скорости на ограничение при $a=0.6$ изображен на фиг. 2, *а*.

При $a<a_0=0.5068$ скорость выходит также и на нижнее ограничение и оптимальным является управление

$$\begin{gathered}
w=-a\delta(t-t_2)+a\delta(t-t_4)+w' \\
w'=1 \text{ при } t\in(0,\,t_1)\cup(t_4,\,T_1) \\
w'=0 \text{ при } t\in(t_1,\,t_2)\cup(t_3,\,t_4) \\
w'=-1 \text{ при } t\in(t_2,\,t_3);\; t_1=a \\
T_1=t_4+a,\; t_3=t_2+a
\end{gathered} \tag{3.3}$$

Подставив управление (3.3) в уравнения движения (1.1), проинтегрировав их, а также удовлетворив граничным условиям (1.2), получаем трансцендентную систему относительно t_2, t_4:

$$\begin{gathered}
\cos t_4-\cos(t_4+a)-a\sin(t_4-t_2+a)-\cos(t_4-t_2)+ \\
+\cos(t_4-t_2+a)+a\sin a-\cos a+1=0 \\
-\sin t_4+\sin(t_4+a)-a\cos(t_4-t_2+a)+ \\
+\sin(t_4-t_2)-\sin(t_4-t_2+a)+\sin a+a\cos a=0
\end{gathered} \tag{3.4}$$

Результаты численного решения системы (3.4) при $0<a<a_0=0.5068$ приведены на фиг. 1. График оптимальной скорости с двумя выходами на фазовые ограничения изображен на фиг. 3, *а*.

4. Рассмотрим оптимальное торможение поступательно движущегося маятника. Необходимо за минимальное время T_2 перевести маятник из состояния поступательного движения в состояние покоя

$$v(0)=a,\; \varphi_1(0)=\varphi_1^{\boldsymbol{\cdot}}(0)=\varphi_1(T_2)=\varphi_1^{\boldsymbol{\cdot}}(T_2)=v(T_2)=0 \tag{4.1}$$

т. е. решать задачу (1.1) с граничными условиями (4.1). Легко видеть, что управление $w=-{}^1/_2a[\delta(t)+\delta(t-\pi)]$, где δ — дельта-функция, решает задачу торможения (1.1), (4.1) за время π для любого a. Следовательно, оптимальное время торможения $T_2\leqslant\pi$. Используя результаты п.2, находим, что для $a\geqslant a_1=2.3311,\ldots$ оптимальным является управление

$$w(t)=1-h[\delta(t)+\delta(t-T_2)]$$

где $h=\operatorname{tg}{}^1/_2T_2$, T_2 — полное время торможения, связанное с параметром a соотношением $2\operatorname{tg}{}^1/_2T_2-T_2=a$.

Ограничение на скорость при $a>a_1$ нигде не нарушается. При $a_2<a<a_1$, $a_1=2.3311$, $a_2=0.5125$ оптимальным является торможение с одним выходом скорости на верхнее ограничение (см. фиг. 2, *б*).

При $0<a<a_2$ оптимальным является торможение с выходами скорости на верхнее и нижнее ограничение (см. фиг. 3, *б*). Точки переключения t_6 и T_2 определялись численно как корни трансцендентных систем, аналогичных (3.2), (3.4). Результаты численного решения приведены на фиг. 4 (кривые *1* и *2* соответственно).

Поступила 27 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баничук Н. В., Черноусько Ф. Л.* Определение оптимальных и квазиоптимальных управлений в одной колебательной механической системе. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 2.
2. *Черноусько Ф. Л.* Оптимальное перемещение маятника. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
3. *Соколов Б. Н., Черноусько Ф. Л.* Об оптимальном перемещении висящего груза. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 4.
4. *Соколов Б. Н., Черноусько Ф. Л.* Оптимальный разгон маятника. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 2.
5. *Мамалыга В. М., Черноусько Ф. Л.* Управление перемещением груза в вертикальной плоскости. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 4.
6. *Соколов Б. Н.* Оптимальный разгон висящего груза при ограниченных скорости и ускорении точки подвеса. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 6.
7. *Мамалыга В. М.* Об оптимальном управлении одной колебательной системой. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 3.
8. *Троицкий В. А.* Оптимальные процессы колебаний механических систем. Л., «Машиностроение», 1976.
9. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.