Тогда существует $\mu_0(\varepsilon, \varepsilon_1, k_0, \lambda_0)$, такое, что для всех $0<\mu\leqslant\mu_0$ для функции распределения $n_\mu(\lambda)$ собственных значений задачи (1), (2) справедлива формула

$$n_\mu(\lambda)=\left[-\frac{1}{2}+\frac{d-c}{\pi\mu}\sqrt[4]{\lambda}\right]+\rho_0(\Lambda)-\rho_1(\lambda,\Lambda) \tag{6}$$

Здесь Λ – произвольное число, удовлетворяющее неравенству $\Lambda>\max(\lambda, b)$; $\rho_0(\Lambda)$ – число β нулей функции $\alpha(\beta, \Lambda)$ на интервале (c, d), а $\rho_1(\lambda, \Lambda)$ – число точек спектра λ^* безмоментной задачи (4) на интервале (λ, Λ).

Разность двух последних членов справа в (6) называется дефектом осцилляции и обозначается через d_λ. Последний не зависит от Λ (сравн. [1]). Практически формула (6) пригодна при условии $\mu(k_0\pi/l)\ll 1$.

Доказательство теоремы проводится методом, близким к [1].

Ниже приводятся найденные на ЭВМ данные, подтверждающие эффективность формулы (6). Таблица составлена для оболочки с направляющей $x=2\cos t$, $y=\sin t$, $0\leqslant t\leqslant {}^1/_2\pi$, $h=0.01\,(\mu\cong0.54)$, $k=2$, $l=\pi$, $\sigma=0.3$.

В третьих графах таблицы приведены значения величины, стоящей в квадратных скобках в (6) при $\lambda=\lambda_s$ $(s=1, 2, \ldots, 38)$, и дефект осцилляции (значения в круглых скобках).

Данная таблица и другие численные результаты показывают, что практически радиус ε выбрасываемой окрестности безмоментного спектра равен 3μ. Погрешность, даваемая формулой (6) внутри выбрасываемых окрестностей, не превосходит единицы.

Приведенная таблица составлена на основании расчетов на ЭВМ методом прогонки. Машинное время для отыскания одного значения характеристического определителя в моментной задаче в 13 раз больше времени, затрачиваемого в безмоментной задаче. Укажем в заключение, что при малых h отыскание нижних частот цилиндрической оболочки на ЭВМ является трудной вычислительной задачей вследствие густоты спектра. Формула (6) при этом позволяет контролировать счет и предотвращает потерю или ошибочное определение лишних частот.

Автор благодарит В. Б. Лидского за постоянное внимание к работе.

Поступила 2 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асланян А. Г., Лидский В. Б.* Распределение собственных частот тонких упругих оболочек. М., «Наука», 1974.
2. *Асланян А. Г., Лидский В. Б.* Формула для числа частот осесимметрических колебаний оболочки вращения. Дифференциальные уравнения, 1977, т. 13, № 8.
3. *Асланян А. Г.* Формула для числа частот колебаний оболочки вращения с небольшим числом волн по параллели. Функциональный анализ и его приложения, 1976, т. 10, вып. 2.

УДК 539.3:534.1

ВЫПУЧИВАНИЕ РАСТЯНУТОЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНКИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

А. Н. ГУЗЬ, Г. Г. КУЛИЕВ, Н. К. ЗЕЙНАЛОВ

(Киев, Баку)

Решения задач об упругом равновесии неограниченной тонкой пластинки с отверстием под действием однородного силового поля на «бесконечности» показывают, что вокруг отверстия возникают области сжимающих напряжений, интенсивность которых зависит от видов внешних нагрузок и форм отверстий. Поэтому в случае достижения некоторых значений внешних нагрузок и при определенных соотношениях размеров отверстия (относительно толщины пластинки) может произойти локальная потеря устойчивости пластинки возле отверстия.

Исходя из этого условия, в [1, 2] рассмотрено выпучивание «мембран» возле трещин и кругового отверстия, а в [3, 4] рассмотрена местная потеря устойчивости тонких пластин возле кругового отверстия при одноосном растяжении.

В [5, 6, 7–11] изучались различные вопросы устойчивости тонких пластин с центральной сквозной трещиной [1].

Изменение форм отверстия существенно перераспределяет напряжения в пластинке. Поэтому представляет интерес исследовать локальную потерю устойчивости возле некруговых отверстий, что выполнено в данной работе.

1. Рассмотрим неограниченную тонкую пластинку с некруговым отверстием, край которого свободен от внешних нагрузок. На бесконечности действует однородное силовое поле. Принимается, что материал пластинки является упругим и изотропным. Функция

$$z=x+iy=\omega_1(\zeta),\quad \zeta=\rho e^{i\theta} \tag{1.1}$$

реализует комформное отображение рассматриваемой области на внешность круга единичного радиуса.

Предположим, что при достижении определенного значения уровня внешних усилий возле отверстия (1.1) пластинка выпучивается, причем возмущение определяется только нормальным прогибом W.

Исследование устойчивости выполним статическим методом в рамках теорий типа Кармана. Основное уравнение при этом, согласно [12], имеет следующий вид:

$$\Delta\Delta W=\frac{h}{D}\left(\frac{\partial^2F_1^\circ}{\partial y^2}\frac{\partial^2W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F_1^\circ}{\partial x^2}\frac{\partial^2W}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2F_1^\circ}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2W}{\partial x\,\partial y}\right),\quad D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{1.2}$$

Здесь F_1° – функция напряжений Эри, и для конкретных рассматриваемых задач ее выражение известно [13].

Так как контур отверстия от внешних нагрузок свободен, то имеем следующие граничные условия:

$$M_n|_s=0,\qquad (Q_n-\partial M_{nt}/\partial s)|_s=0 \tag{1.3}$$

Поскольку рассматривается локальная потеря устойчивости неограниченной пластинки, возмущение должно затухать при достаточном удалении от контура отверстия, т. е.

$$W\to 0\qquad \text{при } \sqrt{x^2+y^2}\to\infty \tag{1.4}$$

Переходя к криволинейным координатам, согласно (1.1), получим

$$\frac{1}{|\omega'|^6}\left\{16\left(|\omega'|^2\frac{\partial^4}{\partial\zeta^2\,\partial\bar\zeta^2}-\omega''\bar\omega'\frac{\partial^3}{\partial\zeta\,\partial\bar\zeta^2}-\bar\omega''\omega'\frac{\partial^3}{\partial\bar\zeta\,\partial\zeta^2}+|\omega''|\frac{\partial^2}{\partial\zeta\,\partial\bar\zeta}\right)-\right.$$
$$-\lambda\left[2|\omega'|\frac{\partial^2F^\circ}{\partial\zeta\,\partial\bar\zeta}\frac{\partial^2}{\partial\zeta\,\partial\bar\zeta}+\frac{\partial F^\circ}{\partial\zeta}\left(-|\omega''|^2\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}+\omega''\bar\omega'\frac{\partial^2}{\partial\bar\zeta^2}\right)+\right.$$
$$+\frac{\partial F^\circ}{\partial\bar\zeta}\left(-|\omega''|^2\frac{\partial}{\partial\zeta}+\bar\omega''\omega'\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)+\frac{\partial^2F^\circ}{\partial\zeta^2}\left(\bar\omega''\omega'\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}-|\omega'|^2\frac{\partial^2}{\partial\bar\zeta^2}\right)+$$
$$\left.\left.+\left(\omega''\bar\omega'\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}-|\omega'|^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)\frac{\partial^2F^\circ}{\partial\bar\zeta^2}\right]\right\}W=0 \tag{1.5}$$

$$\frac{1}{|\omega'|^4}\left\{(1-\nu)\left[-\left(\omega''\bar\omega'\zeta^2\frac{\partial}{\partial\zeta}+\bar\zeta^2\bar\omega''\omega'\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)+|\omega''|^2\left(\zeta^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+\bar\zeta^2\frac{\partial^2}{\partial\bar\zeta^2}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+2(1+\nu)|\omega'|^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta\,\partial\bar\zeta}\right\}W|_{\rho=1}=0 \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{|\omega'|^4}\left\{(1-\nu)\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{1}{i}\left[-\zeta^2\omega''\bar\omega'\frac{\partial}{\partial\zeta}+\bar\zeta^2\omega'\bar\omega''\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}+|\omega'|^2\left(\zeta^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}-\bar\zeta^2\frac{\partial^2}{\partial\bar\zeta^2}\right)\right]\right\}+\right.$$
$$\left.+4|\omega'|^2\left[\frac{1}{|\omega'|^2}(\zeta\omega''\bar\omega'+\bar\zeta\bar\omega''\omega')\frac{\partial^2}{\partial\zeta\,\partial\bar\zeta}-\zeta\frac{\partial^3}{\partial\zeta^2\,\partial\bar\zeta}-\bar\zeta\frac{\partial^3}{\partial\zeta\,\partial\bar\zeta^2}\right]\right\}W|_{\rho-1}=0 \tag{1.7}$$

---

[1] См. также *Гузь А. Н., Кулиев Г. Г., Цурпал И. А.* Концепции устойчивости в теории хрупкого разрушения. Аннот. докл. IV Всес. съезда по теорет. и прикл. механ. Киев, «Наукова думка», 1976.

$$W \to 0 \text{ при } \rho \to \infty \tag{1.8}$$

$$\lambda = 24pR^2(1-\nu^2)/(Eh^2), \quad \omega_1(\zeta) = R\omega(\zeta), \quad F_1^\circ = {}^1/_2 pR^2 F^\circ$$

где R – масштабный множитель.

Получить решение задачи на собственные значения (1.2) – (1.4) аналитическим методом не представляется возможным даже в случае круговых отверстий. Поэтому для решения целесообразно использовать вариационные методы.

2. Приращение полной энергии в возмущенном состоянии пластинки имеет вид [12]:

$$\Delta\Pi = \frac{h}{2}\iint\left[\frac{\partial^2 F_1^\circ}{\partial y^2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 F_1^\circ}{\partial x^2}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F_1^\circ}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y}\right]dx\,dy +$$
$$+\frac{D}{2}\iint\left\{\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]\right\}dx\,dy \tag{2.1}$$

Выражение (2.1) в криволинейной системе координат, согласно (1.1), будет иметь следующий вид:

$$\Delta\Pi = \frac{h}{2}\iint\frac{p\rho}{|\omega'|^4}\left\{\left(\omega'\overline{\omega}''\frac{\partial F^\circ}{\partial\overline{\zeta}} - |\omega'|^2\frac{\partial^2 F^\circ}{\partial\zeta^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^2 + 2|\omega'|^2\frac{\partial^2 F^\circ}{\partial\zeta\,\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta} +\right.$$
$$+\left(\overline{\omega}'\omega''\frac{\partial F^\circ}{\partial\zeta} - |\omega'|^2\frac{\partial^2 F^\circ}{\partial\zeta^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\right)^2 + 2D\left\{|\omega'|^2(1+\nu)\left(\frac{\partial^2}{\partial\zeta\,\partial\overline{\zeta}}\right)^2 +\right.$$
$$\left.\left.+(1-\nu)\left[|\omega'|^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\frac{\partial^2}{\partial\overline{\zeta}^2} + |\omega''|^2\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}} - \omega''\overline{\omega}'\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial^2}{\partial\overline{\zeta}^2} - \overline{\omega}''\omega'\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right]\right\}\right\}W\,d\rho\,d\theta \tag{2.2}$$

Вычисляя вариацию выражений (2.1) и (2.2), согласно [12], получим вариационные уравнения устойчивости в декартовых и криволинейных координатах

$$\iint\left[\Delta\Delta W - \frac{pR^2}{2D}\left(\frac{\partial^2 F^\circ}{\partial y^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F^\circ}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F^\circ}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)\right]\delta W\,dx\,dy +$$
$$+\int(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\cos^2\alpha + \frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\sin 2\alpha + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\sin^2\alpha + \nu\Delta W\right]\frac{\partial\delta W}{\partial n}ds +$$
$$+\int\left\{(1-\nu)\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\sin 2\alpha - \frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\cos 2\alpha\right] -\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x\,\partial y^2}\right)\cos\alpha - \left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x^2\,\partial y}\right)\sin\alpha\right\}\delta W\,ds = 0 \tag{2.3}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_1^\infty\frac{\rho}{|\omega'|^4}\left\{16\left(|\omega'|^2\frac{\partial^4}{\partial\zeta^2\,\partial\overline{\zeta}^2} - \omega''\overline{\omega}'\frac{\partial^3}{\partial\zeta\,\partial\overline{\zeta}^2} - \overline{\omega}''\omega'\frac{\partial^3}{\partial\overline{\zeta}\,\partial\zeta^2} + |\omega''|^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta\,\partial\overline{\zeta}}\right) -\right.$$
$$-\lambda\left[2|\omega'|^2\frac{\partial^2 F^\circ}{\partial\zeta\,\partial\overline{\zeta}}\frac{\partial^2}{\partial\zeta\,\partial\overline{\zeta}} + \frac{\partial F^\circ}{\partial\zeta}\left(-|\omega''|^2\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}} + \omega''\overline{\omega}'\frac{\partial^2}{\partial\overline{\zeta}^2}\right) +\right.$$
$$+\frac{\partial F^\circ}{\partial\overline{\zeta}}\left(-|\omega''|^2\frac{\partial}{\partial\zeta} + \overline{\omega}''\omega'\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right) + \frac{\partial^2 F^\circ}{\partial\zeta^2}\left(\overline{\omega}''\omega'\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}} - |\omega'|^2\frac{\partial^2}{\partial\overline{\zeta}^2}\right) +$$
$$\left.\left.+\left(\omega''\overline{\omega}'\frac{\partial}{\partial\zeta} - |\omega'|^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)\frac{\partial^2 F^\circ}{\partial\overline{\zeta}^2}\right]\right\}W\delta W\rho\,d\rho\,d\theta +$$

$$+\int\limits_{c}^{2\pi}\frac{1}{|\omega'|^4}\left\{(1-\nu)\left[-\left(\omega''\overline{\omega}'\zeta^2\frac{\partial}{\partial\zeta}+\overline{\zeta}^2\overline{\omega}''\omega'\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\right)+|\omega'|^2\left(\zeta^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+\overline{\zeta}^2\frac{\partial^2}{\partial\overline{\zeta}^2}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+2(1+\nu)|\omega'|^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta\,\partial\overline{\zeta}}\right\}W\frac{\partial\delta W}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=1}d\theta+$$

$$+\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{1}{|\omega'|^4}\left\{(1-\nu)\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{1}{i}\left[-\zeta^2\omega''\overline{\omega}'\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}+\overline{\zeta}^2\omega'\overline{\omega}''\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+|\omega'|^2\left(\zeta^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}-\overline{\zeta}^2\frac{\partial^2}{\partial\overline{\zeta}^2}\right)\right]\right\}+4|\omega'|^2\left[\frac{1}{|\omega'|^2}(\zeta\omega''\overline{\omega}'+\zeta\overline{\omega}''\omega')\frac{\partial^2}{\partial\zeta\,\partial\overline{\zeta}}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\zeta\frac{\partial^3}{\partial\zeta^2\,\partial\overline{\zeta}}-\overline{\zeta}\frac{\partial^3}{\partial\zeta\,\partial\overline{\zeta}^2}\right]\right\}W\delta W|_{\rho=1}\,d\theta=0 \tag{2.4}$$

В (2.3) α – угол между положительным направлением нормали и оси ox, n – вектор внешней нормали, s – элемент дуги контура.

Из уравнений (2.3) и (2.4) получаются основные уравнения (1.2), (1.6) и граничные условия (1.3), (1.7) и (1.8). Поэтому при выборе координатных функций руководствуемся следующими соображениями: возмущения должны удовлетворять условию (1.9), координатные функции должны образовывать полную систему и быть необходимое число раз дифференцируемыми, выражение для прогиба должно давать возможность совершить предельный переход к случаю трещины, учитывая результаты [5–7]. В данной работе поставим условие, чтобы при переходе к случаю трещины в ее вершине приращение полной энергии пластинки для возмущений имело бы конечное значение. Для такой постановки в [5] получены числовые результаты.

На основании изложенного выражения для прогиба выберем в виде

$$W=|\omega'|^4\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=1}^{N}\begin{matrix}A_{nm}\\B_{nm}\end{matrix}\left(\frac{1}{\rho}\right)^n\begin{matrix}\cos m\theta\\\sin m\theta\end{matrix} \tag{2.5}$$

Для определения постоянных коэффициентов $A_{nm}(B_{nm})$ нужно (2.5) подставить в уравнение (2.4), при этом получить следующую однородную систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=1}^{N}[a_{nm}(n_1,m_1,\nu)-\lambda b_{nm}(n_1,m_1,\nu)]A_{nm}=0 \tag{2.6}$$

где a_{nm}, b_{nm} – в каждом конкретном случае известные выражения.

При наличии отличных от нуля решений системы (2.6) спектр собственных чисел λ_{ql} определяется из характеристического уравнения системы (2.6)

$$\|a_{nm}-\lambda b_{nm}\|=0 \tag{2.7}$$

Из вида операторов, входящих в уравнение (2.4) и вида выражений a_{nm}, b_{nm}, следует, что собственные числа λ_{nm} будут зависеть только от коэффициента Пуассона и не будут зависеть от толщины пластинки h и размера отверстий R. Обозначив минимальное положительное собственное число через $\lambda_*(\nu)=\min\limits_{n,m}\{\lambda_{nm}(\nu)\}$, $\lambda_{nm}>0$ критическую нагрузку p_* определим из первого уравнения (1.5)

$$p_*=\frac{\lambda_*(\nu)E}{24(1-\nu^2)}\left(\frac{h}{R}\right)^2 \tag{2.8}$$

В этом случае происходит потеря устойчивости пластинки возле отверстия. Задаваясь конкретным видом отображающей функции (1.1), можно получить значения критической нагрузки (2.8) для отверстий различной формы.

3. Рассмотрим одноосное растяжение тонкой пластинки толщиной h, усилиями с интенсивностью p в направлении оси oy. Пластинка ослаблена эллиптическим отверстием, т. е.

$$z=\omega_1(\zeta)=R(\zeta+\varepsilon/\zeta),\quad \varepsilon=(a-b)/(a+b),\quad R=1/2(a+b)$$

Функция напряжения Эри F_1°, характеризующая докритическое напряженное состояние, имеет вид [13]:

$$F_1^\circ=\frac{pR^2}{4}\left[\rho^2-\frac{(2+\varepsilon)\varepsilon}{\rho^2}-2(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)\ln\rho+\left(-2+\rho^2+\frac{1}{\rho^2}\right)\cos 2\theta\right]$$

Значения минимальных собственных чисел, вычисленное при различных числах координатных функций для $\nu=0.3$, приведены в таблице. В первом столбце указан порядок (s) характеристического определителя (2.7). Для соблюдения условия симметрии в (2.5) число m принимает значения 0, 2, 4,... в случае косинусов или 0, 1, 3,... в случае синусов.

Сравнения результатов, приведенных в строках, показывают высокую эффективность вариационного метода при исследовании локальной потери устойчивости тонких пластин возле некруговых отверстий. Так, результаты полученные при $s=12$ и $s=24$, отличаются (за исключением случая трещины) в третьем знаке, в то время как результаты, полученные при $s=4$ и $s=12$, отличаются в 4-5 раз.

ε	—0.7	—0.5	—0.3	0	0.3	0.5	0.7	1
$s=4$	55.15	47.02	29.71	17.81	19.76	21.28	23.71	25
$s=12$	14.3122	10.6711	6.5935	4.0927	4.4824	4.9804	5.2784	5.9457
$s=24$	14.3001	10.6312	6.5790	4.0851	4.4618	4.9289	5.2260	5.5161

Сравнивая результаты при различных ε ($\varepsilon=0$ соответствует круговому отверстию; $\varepsilon=1$ соответствует трещине, перпендикулярной растягивающей нагрузке; $0<\varepsilon<1$ соответствует эллиптическому отверстию, большая полуось которого перпендикулярна растягивающей нагрузке; $-1<\varepsilon<0$ соответствует эллиптическому отверстию, большая полуось которого ориентирована вдоль линии действия растягивающей нагрузки), приходим к выводу, что в случае одноосного растяжения для кругового отверстия получаем меньшую критическую нагрузку по сравнению с криволинейным отверстием.

Результаты для кругового отверстия [3, 4], полученные при помощи одной координатной функции, отличаются от изложенной примерно на 10%.

Изменением ориентаций некруговых отверстий можно существенно увеличивать устойчивость пластинки при одних и тех же действующих внешних нагрузках.

Поступила 29 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черепанов Г. П.* О выпучивании мембран с отверстиями при растяжении. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
2. *Черепанов Г. П.* О местном выпучивании мембран. Инж. ж., МТТ, 1966, № 1.
3. *Pellet D. A., Costello R. G., Broc J. E.* Buckling of a tension panel containing a cirkular hole. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 10. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, вып. 10.)
4. *Седаева Е. М.* Устойчивость бесконечных пластин, ослабленных круговыми отверстиями. Тр. Воронежск. н.-и. ин-та математики. Изд-во Воронежск. ун-та, 1973, вып. 8.
5. *Гузь А. Н., Дышель М. Ш., Кулиев Г. Г., Милованова О. Б.* Устойчивость тонких пластин с трещинами. Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 5.
6. *Гузь А. Н., Кулиев Г. Г., Цурпал И. А.* К теории разрушения тонких тел с трещинами. Прикл. механ., 1975, т. 11, вып. 5.
7. *Guz A. N., Kuliev G. G., Tsurpal I. A.* On failure of brittle materials because of crippling near a crack. Theoret. and Appl. Mech., Abstracts lectures the 14th IUTAM Congr., Delft, 1976.

8. *Голцев В. Ю., Морозов Е. М., Недошивин П. Е.* Об устойчивости тонколистного образца с трещиной при растяжении. Заводск. лаборатория, 1969, т. 35, № 1.
9. *Дышель М. Ш., Милованова О. Б.* Методика экспериментального исследования потери устойчивости пластин с разрезом. Прикл. механ., 1977, т. 13, № 5.
10. *Dixon I. R., Stranningan I. S.* Stress distribution and buckling in thin sheets with central slits. Proc. 2nd Internat. Conf. Fract., Brighton, 1969. London, Chapman and Hall, 1969.
11. *Литвиненкова З. Н.* Об устойчивости растянутой пластины с внутренней трещиной. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 5.
12. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
13. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.