ЛИТЕРАТУРА

1. *Ahlvin R. G., Brown D. N.* Duplication of prototipe stress-strain relation in soil masses by laboratory test. Proc. Amer. Soc. Test. Mater., 1960, [1961], vol. 60, p. 1137–1148.
2. *Roscol K. H., Poorooshasb H. B.* A theoretical and experimental study of strain in triaxial compression tests on normally consolidated clays. Geotechnique, 1963, vol. 13, No. 1.
3. *Lambe T. W.* Methods of estimating settlement. T. Soil Mech. and Found. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Engng, 1964, vol. 90, No. 5.
4. *Иващенко И. Н.* Влияние траектории нагружения на деформируемость глинистых грунтов. В сб.: Вопросы прочности и деформируемости грунтов. Баку, Азернешр, 1966.
5. *Широков В. Н.* Модель неупругой сыпучей среды на основе теории пластического течения. Сб. научн. тр. Челябинск. политехн. ин-та, 1973, № 113.
6. *Рассказов Л. Н.* Грунт как материал тела плотины. Гидротехническое строительство, 1973, № 8.
7. *Николаевский В. Н., Сырников Н. М., Шефтер Г. М.* Динамика упругопластических дилатирующих сред. В сб.: Успехи механики деформируемых сред. М., «Наука», 1975, стр. 397–413.
8. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 2. М., «Наука», 1973.
9. *Иоселевич В. А., Дидух Б. И.* О применении теории пластического упрочнения к описанию деформируемости грунта. В сб.: Вопросы механики грунтов и строительства на лессовых основаниях. Грозный, Чечено-Ингушское книжн. изд-во, 1970, стр. 125–133.
10. *Дидух Б. И., Иоселевич В. А.* О построении теории пластического упрочнения грунта. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 2.
11. *Захаров М. Н., Иващенко И. Н.* Экспериментальное исследование пластических деформаций глинистого грунта при трехосном сжатии. ПМТФ, 1971, № 2.
12. *Иоселевич В. А., Зуев В. В., Чахтаури Г. А.* Об эффектах пластического упрочнения нескальных грунтов. Научн. тр. ин-та механики МГУ, 1975, № 42.
13. *Старов А. В.* О применении теории пластического упрочнения к описанию допредельного поведения глинистого грунта. Гидротехническое строительство, 1977, № 6.
14. *Ivastchenco I. N., Zakharov M. N.* On application of flow theories for soil. Тр. VIII Междунар. конгр. по механике грунтов и фундаментостроению, т. 4, ч. 3, М., Строиздат, 1973.
15. *Линь Т. Г.* Физическая теория пластичности. В сб.: Проблемы теории пластичности. М., «Мир», 1976, стр. 7–68.
16. *Ничипорович А. А.* Сопротивление связных грунтов сдвигу при расчете гидротехнических сооружений на устойчивость. М., Строиздат, 1948.
17. *Feda J.* Constitutive relations for soil. Тр. VIII Междунар. конгр. по механике грунтов и фундаментостроению, т. 4, ч. 3, М., Стройиздат, 1973.
18. *Koiter W. T.* Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface. Quart. Appl. Math., 1953, vol. 11, No. 3, p. 350–354.

УДК 539.3:534.1

ФОРМУЛА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ

Г. Р. ГУЛГАЗАРЯН

(Ереван)

Определяются собственные частоты тонкой упругой цилиндрической оболочки, защемленной по двум образующим и удовлетворяющей условиям Навье на торцах. Предполагается, что число полуволн k по образующей фиксировано ($k\leqslant k_0$).

При указанных граничных условиях система уравнений с частными производными допускает, как известно, разделение переменных и приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\mu^4 nf+lf=\lambda f,\quad \mu^4=h^2/12,\qquad f(\beta)=(u,\ v,\ w) \tag{1}$$

Здесь μ^4 – малый параметр; h – толщина оболочки; $f(\beta)$ – вектор перемещений; $n=(n_{ij})$ и $l=(l_{ij})$ $(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$ – дифференциальные операторы, явный вид которых

λ_s	λ^*	$x_s+d\lambda_s$	λ_s	λ^*	$x_s+d\lambda_s$
0.0126		4.30+(−4)	4.0788		19.89+(1)
	0.0147			4.2015	
0.0147		4.49+(−3)	4.2824		20.14+(2)
0.0324		5.58+(−3)	5.0879		21.05+(2)
0.0387		5.86+(−3)	6.0295		21.98+(2)
	0.0388			6.2942	
0.0694		6.86+(−2)	6.3030		22.23+(3)
0.0854		7.25+(−2)	6.6137		22.51+(3)
	0.0989			6.6622	
0.1328		8.16+(−1)	7.2764		23.06+(4)
0.1941		9.02+(−1)	8.5642		24.04+(4)
0.2877		10.01+(−1)	10.0007		25.02+(4)
0.4045		10.94+(−1)	10.8513		25.54+(4)
0.5550		11.88+(−1)		10.8518	
0.6990		12.62+(−1)	11.1979		25.78+(5)
	0.8272			11.3262	
0.8521		13.29+(0)	11.7601		26.07+(6)
1.0810		14.13+(0)	13.5741		27.04+(6)
1.3949		15.09+(0)	15.6298		28.03+(6)
1.7744		16.06+(0)	16.4713		28.40+(6)
2.2382		17.05+(0)		16.4756	
2.7145		17.91+(0)	17.9058		29.01+(7)
	2.8499		18.9892		29.45+(7)
2.8983		18.22+(1)		19.0635	
3.4333		19.03+(1)	20.5513		30.05+(8)

можно найти, например в [1][1]; λ – спектральный параметр, константой отличающийся от квадрата круговой частоты ω^2. Коэффициенты операторов n и l зависят от длины образующей l, числа k и кривизны $R^{-1}(\beta)$ направляющей (β – длина дуги направляющей, $c\leqslant\beta\leqslant d$).

При условии жесткого защемления

$$u|_{c,\,d}=v|_{c,\,d}=w|_{c,\,d}=w_\beta'|_{c,\,d}=0 \tag{2}$$

Действуя по аналогии с [1–3], введем функцию

$$\alpha(\beta,\ \lambda)=u_1(\beta,\ \lambda)v_2(\beta,\ \lambda)-u_2(\beta,\ \lambda)v_1(\beta,\ \lambda) \tag{3}$$

где $u_s(\beta,\ \lambda)$, $v_s(\beta,\ \lambda)$, $w_s(\beta,\ \lambda)$ $(s=1,2)$ – линейно-независимые решения задачи Коши безмоментной системы (1) с $\mu=0$, которые соответствуют граничным условиям (2) при $\beta=c$.

Нули λ^* функции $\alpha(d,\ \lambda)$ вещественны и совпадают с собственными значениями безмоментной задачи

$$lf=\lambda f,\quad u|_{c,\,d}=v|_{c,\,d}=0 \tag{4}$$

Отметим, что спектр λ^* имеет точки сгущения при $\lambda=0$ и $\lambda=+\infty$.

Пусть $b=\sup R^{-2}(\beta)$, $\beta\in[c,\ d]$. Фиксируем некоторые $\lambda_0>0$ и $\varepsilon>0$ и обозначим через $D_{\varepsilon,\,\lambda_0}$ множество, полученное удалением из отрезка $[0,\ \lambda_0]$ всех интервалов длины 2ε с центрами в точках спектра λ^* задачи (4).

Ниже устанавливается формула, уточняющая асимптотику функции распределения, найденную ранее в [1] (см. также сноску).

Справедливо следующее утверждение, в котором через $[x]$ и $\{x\}$ обозначены целая и дробная части x.

Теорема. Пусть $\lambda\in D_{\varepsilon,\,\lambda_0}$ и пусть λ и μ выбраны так, что

$$0<\varepsilon_1\leqslant\left\{-\frac{1}{2}+\frac{d-c}{\pi\mu}\sqrt[4]{\lambda}\right\}\leqslant 1-\varepsilon_1 \tag{5}$$

[1] См. также: *Гулгазарян Г. Р.* Структура спектра системы дифференциальных уравнений, описывающей колебания тонкой упругой оболочки. Кан. дисс., Ереванский гос. ун-т, 1974.

Тогда существует $\mu_0(\varepsilon, \varepsilon_1, k_0, \lambda_0)$, такое, что для всех $0<\mu\leqslant\mu_0$ для функции распределения $n_\mu(\lambda)$ собственных значений задачи (1), (2) справедлива формула

$$n_\mu(\lambda)=\left[-\frac{1}{2}+\frac{d-c}{\pi\mu}\sqrt[4]{\lambda}\right]+\rho_0(\Lambda)-\rho_1(\lambda,\Lambda) \tag{6}$$

Здесь Λ – произвольное число, удовлетворяющее неравенству $\Lambda>\max(\lambda, b)$; $\rho_0(\Lambda)$ – число β нулей функции $\alpha(\beta, \Lambda)$ на интервале (c, d), а $\rho_1(\lambda, \Lambda)$ – число точек спектра λ^* безмоментной задачи (4) на интервале (λ, Λ).

Разность двух последних членов справа в (6) называется дефектом осцилляции и обозначается через d_λ. Последний не зависит от Λ(сравн. [1]). Практически формула (6) пригодна при условии $\mu(k_0\pi/l)\ll 1$.

Доказательство теоремы проводится методом, близким к [1].

Ниже приводятся найденные на ЭВМ данные, подтверждающие эффективность формулы (6). Таблица составлена для оболочки с направляющей $x=2\cos t$, $y=\sin t$, $0\leqslant t\leqslant {}^1/_2\pi$, $h=0.01\,(\mu\cong0.54)$, $k=2$, $l=\pi$, $\sigma=0.3$.

В третьих графах таблицы приведены значения величины, стоящей в квадратных скобках в (6) при $\lambda=\lambda_s$ $(s=1, 2, \ldots, 38)$, и дефект осцилляции (значения в круглых скобках).

Данная таблица и другие численные результаты показывают, что практически радиус ε выбрасываемой окрестности безмоментного спектра равен 3μ. Погрешность, даваемая формулой (6) внутри выбрасываемых окрестностей, не превосходит единицы.

Приведенная таблица составлена на основании расчетов на ЭВМ методом прогонки. Машинное время для отыскания одного значения характеристического определителя в моментной задаче в 13 раз больше времени, затрачиваемого в безмоментной задаче. Укажем в заключение, что при малых h отыскание нижних частот цилиндрической оболочки на ЭВМ является трудной вычислительной задачей вследствие густоты спектра. Формула (6) при этом позволяет контролировать счет и предотвращает потерю или ошибочное определение лишних частот.

Автор благодарит В. Б. Лидского за постоянное внимание к работе.

Поступила 2 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асланян А. Г., Лидский В. Б.* Распределение собственных частот тонких упругих оболочек. М., «Наука», 1974.
2. *Асланян А. Г., Лидский В. Б.* Формула для числа частот осесимметрических колебаний оболочки вращения. Дифференциальные уравнения, 1977, т. 13, № 8.
3. *Асланян А. Г.* Формула для числа частот колебаний оболочки вращения с небольшим числом волн по параллели. Функциональный анализ и его приложения, 1976, т. 10, вып. 2.

УДК 539.3:534.1

ВЫПУЧИВАНИЕ РАСТЯНУТОЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНКИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

А. Н. ГУЗЬ, Г. Г. КУЛИЕВ, Н. К. ЗЕЙНАЛОВ

(Киев, Баку)

Решения задач об упругом равновесии неограниченной тонкой пластинки с отверстием под действием однородного силового поля на «бесконечности» показывают, что вокруг отверстия возникают области сжимающих напряжений, интенсивность которых зависит от видов внешних нагрузок и форм отверстий. Поэтому в случае достижения некоторых значений внешних нагрузок и при определенных соотношениях размеров отверстия (относительно толщины пластинки) может произойти локальная потеря устойчивости пластинки возле отверстия.

Исходя из этого условия, в [1, 2] рассмотрено выпучивание «мембран» возле трещин и кругового отверстия, а в [3, 4] рассмотрена местная потеря устойчивости тонких пластин возле кругового отверстия при одноосном растяжении.