

УДК 622.011.4

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РАЗВИТИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ НАГРУЖЕНИЯ ПРИ ПЛАСТИЧЕСКОМ УПРОЧНЕНИИ ГРУНТА

В. А. ИОСЕЛЕВИЧ, Л. Н. РАССКАЗОВ, Ю. М. СЫСОЕВ

(Москва)

Построение уравнений, связывающих деформации грунта с действующими в них напряжениями, является одной из актуальных проблем современной механики грунтов. Результаты многочисленных экспериментальных исследований свидетельствуют о том, что на развитие остаточных деформаций нескальных грунтов существенное влияние оказывает история нагружения, т. е. последовательность испытываемых грунтом напряжений [1-4]. Именно поэтому при описании деформируемости грунтов все большее внимание уделяется построению неголомомных связей между напряжениями и деформациями [5-7].

В последние годы в механике грунтов получает распространение теория пластического упрочнения, в основе которой лежат представления о поверхности нагружения и связанном с нею законе изменения пластических деформаций [8]. Экспериментальному доказательству существования поверхностей нагружения, анализу их эволюции, исследованию направления вектора приращения пластических деформаций в процессе нагружения посвящены работы [9-12].

Если при современном уровне экспериментальной техники можно с определенностью говорить о существовании замкнутых поверхностей нагружения, то вопрос о размерах и форме этих поверхностей (особенно вблизи точки нагружения) еще требует изучения. С решением этого вопроса в конечном счете связана структура уравнений состояния (в частности применимость ассоциированного закона в его традиционной формулировке).

Приведем краткий обзор известных к настоящему времени фактов.

Поверхности нагружения, формирующиеся при гидростатическом сжатии песчаного грунта, были изучены в [9, 10]. Обнаружено, что в пространстве главных напряжений — это поверхности каплевидной формы, ориентированные вдоль пространственной диагонали и располагающиеся внутри поверхности предельных состояний (внутри конуса Мизеса — Шлейхера). В опытах анализировались сечения таких поверхностей плоскостью $v_0 = -1$ (v_0 — параметр Лоде). Для каждой поверхности получено несколько точек на прямолинейных траекториях, вдоль которых в стабильнометрических опытах уменьшалось всестороннее давление и увеличивалась интенсивность касательных напряжений. Критерием достижения поверхности было выполнение условия $\Delta \varepsilon_1^p = 10^{-4}$ (ε_1^p — пластическая составляющая осевой деформации образца). При таком сравнительно высоком допуске для ε_1^p построенные по опытным данным поверхности нагружения занимают значительную часть области предельного деформирования.

Исследованные точки каждой из таких поверхностей располагались далеко от точки первоначального гидростатического нагружения. Это не позволило сделать однозначного вывода о том, является ли поверхность в точке нагружения гладкой. Отсутствие сведений об объемной деформации образца не позволило построить векторы приращений пластических деформаций.

Более широкий класс поверхностей нагружения (в частности поверхности, образующиеся при нагружении образца по схеме обычного трехосного сжатия) был получен в экспериментах [12] с песчаным и суглинистым грунтами. В этих опытах измерялись осевая и объемная деформации образца, однако последняя определялась с меньшей точностью. Поэтому достижение поверхности нагружения фиксировалось по допуску для ε_1^p , который и в этом случае был достаточно грубым. По приращениям ε_1^p производилась и косвенная проверка справедливости ассоциированного закона.

Анализ эволюции поверхностей нагружения и исследование направления вектора $d\varepsilon_{ij}^p$ ($i, j=1, 2, 3$) в [13, 14] производились с привлечением всех измеряемых в опыте компонент тензора деформации. Оказалось, что направления вектора приращения пластических деформаций и нормали к поверхности нагружения близки. Было обнаружено, что в процессе пластического деформирования кривизна поверхности в точке нагружения растет. Можно думать, что сделанное в [14] заключение о гладкости поверхности в точке нагружения является следствием принятого допуска для ε_1^p , тогда как в действительности эта точка является угловой [15]. Объяснить в связи с этим совпадение вектора $d\varepsilon_{ij}$ с «нормалью» к поверхности нагружения в опытах [14] можно только тем, что траектория предшествующего нагружения образца располагалась в одной из плоскостей симметрии поверхности нагружения (в плоскостях $v_0 = \pm 1$).

Опыты показали, что при пластическом деформировании поверхность нагружения не только изменяет свою форму, но и смещается. Так, в опытах [13] уже после весьма умеренного нагружения образца всесторонним давлением последующее снятие этого давления оказалось разгрузкой только для определенного предела, дальнейшее уменьшение давления сопровождалось пластическим разуплотнением грунта. Аналогичная ситуация отмечалась и при более сложных нагружениях.

Развитие пластических деформаций приводит к тому, что исходное ненагруженное состояние (начало координат в пространстве напряжений) оказывается вне поверхности нагружения и может быть достигнуто только в результате изменения пластических деформаций, накопленных при предшествующем нагружении. На движение поверхности нагружения в пространстве напряжений указывают и результаты опытов [16].

Итак, пластическое деформирование грунта сопровождается деформациями и перемещениями поверхности нагружения в пространстве напряжений. Имеющиеся сведения об обследованных поверхностях получены при достаточно высоких допусках для ϵ_{ij}^p и дают лишь приближенные представления об их действительных размерах и форме. Этих сведений недостаточно для того, чтобы ответить на вопрос, является ли точка нагружения угловой точкой поверхности. Для ответа на этот вопрос и для более детального изучения эволюции поверхностей нагружения необходимо проведение специальных экспериментов с уменьшенной величиной допускаемых изменений пластических деформаций, т.е. с более высокой точностью замеров деформаций грунтового образца. Ниже приводится описание методики таких опытов и обсуждаются их результаты.

Опыты проводились в обычных приборах трехосного сжатия (стабилометрах) с цилиндрическими образцами высотой 12 см и диаметром 6 см. Напряженное состояние образца характеризовалось двумя независимо регулируемым в процессе испытания главными напряжениями σ_1 и $\sigma_2 = \sigma_3$ ($\sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma_3$). В опытах измерялись осевая деформация образца ϵ_1 и его объемная деформация $\theta^p = (\epsilon_1^p + 2\epsilon_2^p)$. Точность измерений ϵ_1 составляла 10^{-5} . Для обеспечения такой же точности при измерении объемной деформации использовалась волюмометрическая трубка малого диаметра с ценой деления 0.01 см³.

Испытаниям подвергались образцы Рогунской супеси нарушенной структуры, характеризовавшейся объемным весом скелета $\gamma_c = 20.8 \pm 0.1$ кН/м³ и влажностью $W = 10.3 \pm 0.3\%$. Показатели физико-механических свойств грунта: предел текучести $W_T = 21.6\%$, предел раскатывания $W_P = 16.6\%$, число пластичности $W_{П} = 5.0$, удельный вес $\gamma_d = 27.3$ кН/м³, угол внутреннего трения $\varphi = 30^\circ$, удельное сцепление $c \approx 0.1$ МПа. Опыты проводились по «открытой» (дренированной) схеме.

Возможность регулирования σ_1 и $\sigma_2 = \sigma_3$ позволила реализовать в экспериментах различные траектории нагружения, которые в пространстве главных напряжений располагаются в плоскости $\nu_c = -1$. Нагружение образца производилось ступенями, каждая ступень выдерживалась до условной стабилизации деформаций. В качестве критерия стабилизации при обследовании формы поверхности нагружения принималось условие $\dot{\epsilon}_1 \leq 10^{-8}$ с⁻¹.

Первым этапом экспериментальной программы было исследование вида и эволюции поверхностей нагружения, формирующихся при гидростатическом сжатии грунта. После того, как образец грунта нагружался всесторонним давлением до заданной величины p_0 , производилось уменьшение давления, а затем при этом уменьшенном давлении — его девиаторное догружение, при котором $p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_3) = \text{const}$, а интенсивность касательных напряжений $T = (1/\sqrt{3})(\sigma_1 - \sigma_3)$ увеличивалась.

На девиаторном участке траектории нагружения величина T увеличивалась малыми ступенями, каждая из которых не превосходила $2.5 \cdot 10^{-2} p_0$. Достижение поверхности нагружения фиксировалось по появлению остаточных осевой и объемной деформаций $\Delta \epsilon^p = 2 \cdot 10^{-5}$. После этого образец вновь разгружался от касательных напряжений т.е. T уменьшалось до нуля, затем уменьшалось и всестороннее давление. При новом значении p опять производилось девиаторное нагружение образца с целью определения очередной точки поверхности нагружения.

С уменьшением p точки поверхности, возникшей при гидростатическом сжатии образца давлением p_0 , располагаются таким образом, что соответствующие им значения T вначале растут, а затем убывают. В случае, когда $T = 0$, а p уменьшалось, т.е. при движении по траектории всестороннего сжатия в обратном направлении, пластические деформации появлялись при $p = 0.6 p_0$.

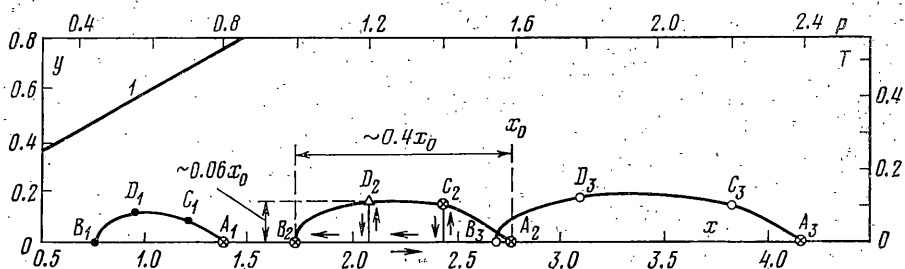
На фиг. 1 показаны следы полученных таким образом поверхностей нагружения, соответствующих значениям $p_0 = 0.8$ МПа, 1.6 МПа и 2.4 МПа, на плоскости x, y , где $x = \sqrt{3} p$, $y = \sqrt{2} T$ (цифрой 1 обозначен след предельной поверхности).

Увеличение точности замеров осевой и объемной деформации образца и снижение допуска на изменение пластических деформаций при определении точек поверхности нагружения привело к качественно новым результатам. Полученные поверхности в пространстве главных напряжений имеют сравнительно небольшие размеры.

Так, в случае $p_0=1.6$ МПа протяженность области обратимых деформаций, ограниченной поверхностью нагружения, вдоль оси x составляет $\sim 0.4x_0$, а максимальное значение y равно приблизительно $0.06x_0$ ($x_0=\sqrt{3}p_0$).

Вытянутая вдоль пространственной диагонали поверхность выпукла и имеет, как будет показано ниже, «заострение» у точки нагружения. В отличие от обсуждавшейся в [9, 10] каплевидной формы с «вершиной» в точке ($x=-\sqrt{3}b/k, y=0$), где k и b — параметры условия Мизеса — Шлейхера $T=kp+b$, полученные в описываемых опытах, поверхности имеют вершины в соответствующих точках нагружения. Этот вывод согласуется с данными [14, 17].

С увеличением p_0 поверхность нагружения смещается в сторону больших значений p , удаляясь от точки исходного состояния ($x=0, y=0$). Если в опытах [11, 14]



Фиг. 1

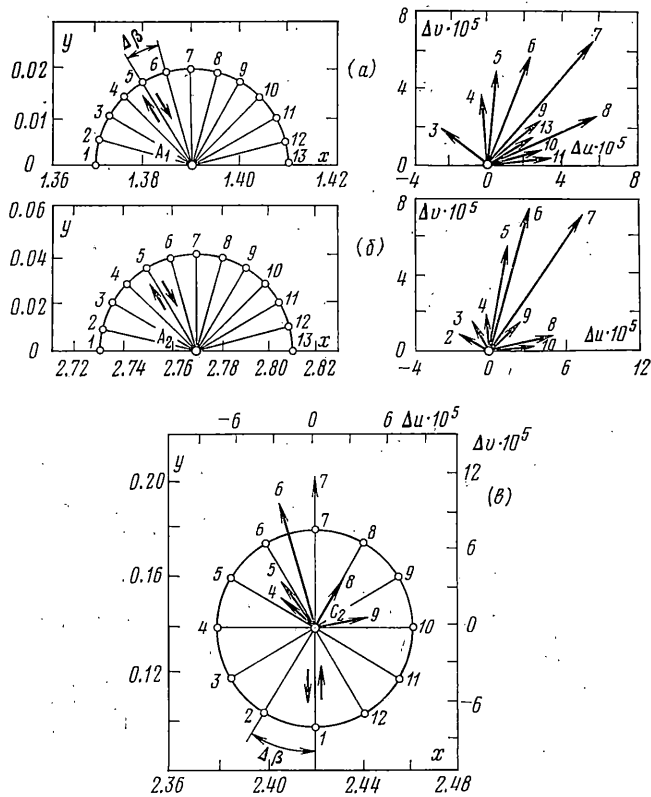
смещение поверхности соответствовало обычным представлениям об эффекте Баушингера, который отмечается во многих пластически деформирующихся материалах, то эксперименты [13] и приведенные здесь результаты говорят о том, что в нескальных грунтах этот эффект проявляется в гораздо более сильной форме. Действительно, с ростом необратимой объемной деформации грунта при всестороннем сжатии происходит смещение границы области обратимых деформаций (области разгрузки) в сторону больших значений давления. После пластического сжатия грунта до определенной величины полное снятие давления обязательно сопровождается его пластическим разуплотнением.

Детальному обследованию формы поверхности нагружения вблизи ее вершины и анализу направления вектора $d\epsilon_{ij}^p$ в точке нагружения был посвящен второй этап экспериментальной программы. После изотропного сжатия образца всесторонним гидростатическим давлением была проведена серия последовательных догрузений и разгрузок по методике, предложенной в [12]. Допрузки имели постоянную амплитуду $\Delta\sigma = [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{1/2} = 2.5 \cdot 10^{-2} p_0$ и производились из точки нагружения ($x=x_0, y=0$) с угловым интервалом $\Delta\beta = \pi/12$. При каждом из таких догрузений измерялись приращения $\Delta\epsilon_1^p$ и $\Delta\theta^p$. По этим величинам определялись компоненты вектора $\{\Delta u, \Delta v\}$, где $u = (1/\sqrt{3})\theta^p, v = (1/\sqrt{6})(\epsilon_1^p - \theta^p)$.

Как показано в [9], в случае, когда поверхность является гладкой и справедлив постулат Драккера, вектор $\{\Delta u, \Delta v\}$ направлен по нормали к следу поверхности нагружения на плоскости x, y при любом активном догрузении образца. Если же при различных догрузениях $\{\Delta x = \sqrt{3}\Delta p, \Delta y = \sqrt{2}\Delta T\}$ из точки $(x_0, 0)$ направления соответствующих векторов $\{\Delta u, \Delta v\}$ окажутся различными, то это укажет на наличие угловой точки на поверхности нагружения. Именно такой результат и был получен в опытах.

На фиг. 2, а показаны векторы малых догрузений $\{\Delta x, \Delta y\}$, производившихся после гидростатического сжатия образца давлением $p_0=0.8$ МПа. Всем этим векторам соответствует величина $\Delta\sigma=0.02$ МПа. Цифрами указаны порядковые номера циклов догрузки и разгрузки. Справа показаны соответствующие каждой догрузке векторы $\{\Delta u, \Delta v\}$. Видно, что все они имеют различные направления, т. е. заостренная вершина поверхности действительно является угловой точкой.

Нужно отметить, что проведение серии догрузений и разгрузок на одном образце несколько искажает представление о действительных приращениях пластических деформаций. После активной догрузки происходит смещение поверхности нагружения. Изображенные на фиг. 2 векторы $\{\Delta u, \Delta v\}$, строго говоря, относятся к различным поверхностям нагружения. Однако выбор весьма небольшой величины $\Delta\sigma$ позволяет считать, что возникающие при этом искажения невелики. Максимальная длина вектора $\{\Delta u, \Delta v\}$ соответствует чисто девиаторному нагружению, при котором $\Delta x=0$. Если бы в точке гидростатического нагружения A_1 поверхность была гладкой, то такое малое догрузение практически не должно было бы сопровождаться изменениями пластических деформаций грунта.



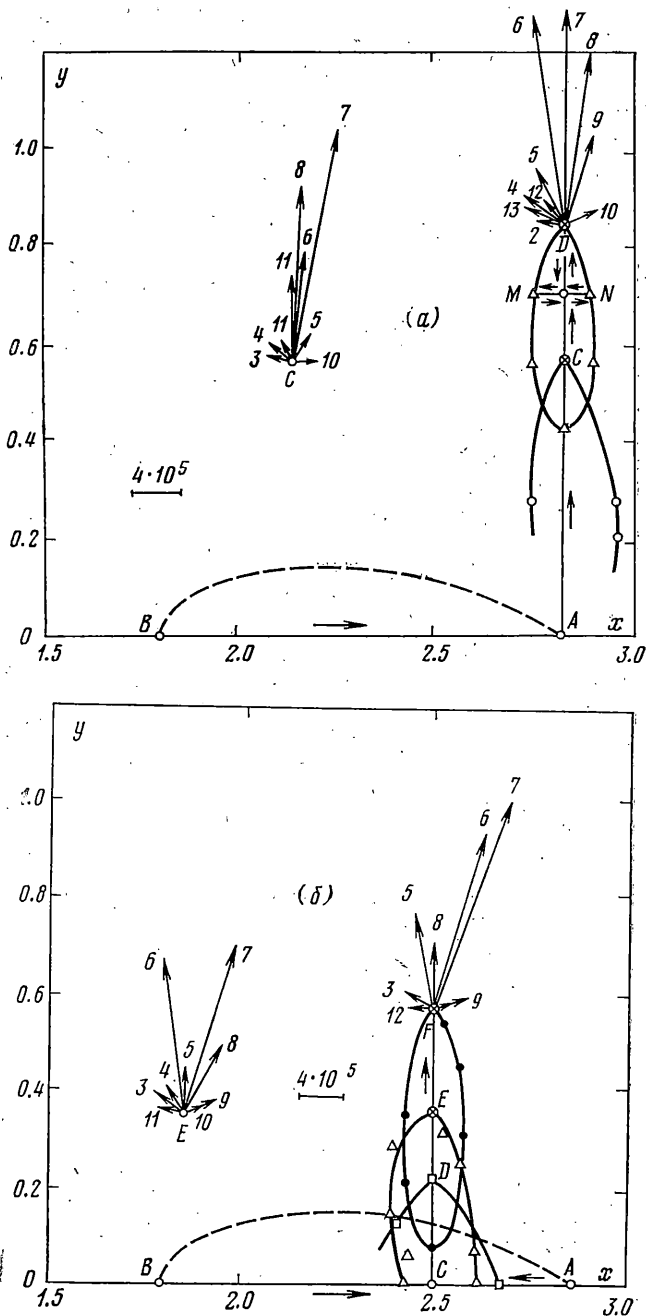
Фиг. 2

Совершенно аналогичный цикл догрузений и разгрузок был проведен и из точек A_2 и A_3 (см. фиг. 1) поверхностей нагружения, отвечающих значениям $p_0 = 1.6$ МПа и 2.4 МПа. Результаты обследования поверхности в точке A_2 показаны на фиг. 2, б. Кроме того, циклические догрузения были проведены также и в других точках поверхностей нагружения, показанных на фиг. 1 крестиками.

При обследовании точки C_2 было сделано 12 циклов последовательных догрузений и разгрузок с угловым интервалом $\Delta\beta = \pi/6$. Их последовательность указана цифрами на фиг. 2, в. При догрузках с номерами 1–3 и 10–12 изменений пластических деформаций не наблюдалось, т. е. векторы $\{\Delta x, \Delta y\}$ были направлены в область обратимого поведения грунта. Это свидетельствует о гладкости поверхности нагружения в точке C_2 . Отличия в направлениях векторов $\{\Delta u, \Delta v\}$ для догрузений, которые сопровождалось дополнительными пластическими деформациями, по-видимому, связаны с тем, что каждое активное догружение приводило к возникновению угловой точки на соответствующей новой поверхности.

Из приведенных результатов следует, что точка нагружения является угловой точкой поверхности. Других угловых точек на поверхности, по-видимому, нет. При выходе в область активного нагружения через гладкую часть поверхности на возникающей затем новой поверхности нагружения сразу же появляется угловая точка.

Третьим этапом программы опытов было исследование деформаций и смещений поверхности нагружения при изменениях напряженного состояния грунтового образца по сложным траекториям. После гидростатического сжатия давлением $p_0 = 1.6$ МПа образец нагружался до девiatorной траектории ACD (см. фиг. 3, а; масштаб для $\Delta u, \Delta v$ принят равным $4 \cdot 10^5$) при фиксированном значении $p = 1.6$ МПа. Определение точек сформировавшихся при этом поверхностей нагружения проводилось при разгрузке вдоль пути девiatorного нагружения. Точки, располагающиеся справа и слева от этой траектории, определялись путем увеличения или уменьшения величины x при фиксированных значениях y (например точки M и N на фиг. 3, а).

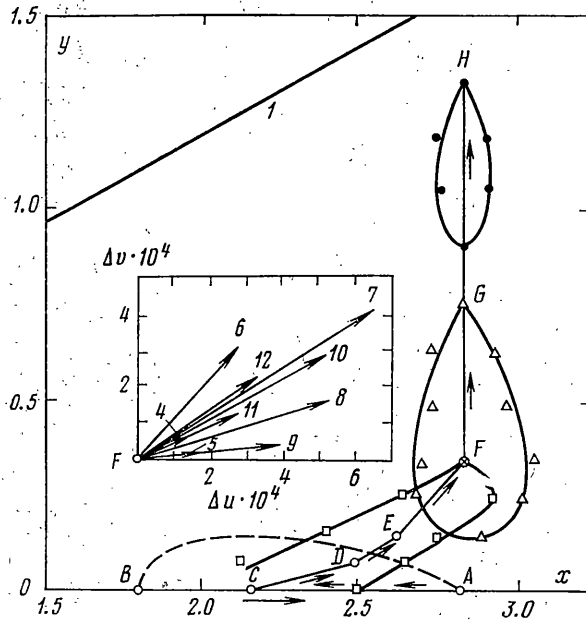


Фиг. 3

Критерий достижения поверхности принимался таким же, как и при исследовании поверхностей нагружения, формирующихся при гидростатическом сжатии. Следы полученных таким образом поверхностей нагружения показаны на фиг. 3, а. В точках C и D проводились циклические догружения по описанной выше методике. Порядок догружений соответствовал показанному на фиг. 2, в. Развитие поверхностей нагружения при изменении напряжений по пути OACDEF показано на фиг. 3, б. Результаты циклических догружений в точках E и F иллюстрируются соответствующими векторами $\{\Delta u, \Delta v\}$.

Аналогичным образом получены данные и о поверхностях нагружения, отвечающих изменению напряжений по ломаной траектории $OACDEFGH$ (см. фиг. 4, прямая I — след предельной поверхности).

Видно, что точка нагружения является угловой точкой поверхности и при сложных нагружениях, об этом свидетельствует различие в ориентации векторов $\{\Delta u, \Delta v\}$ при циклических догружениях из точек нагружения. Активное нагружение вдоль ломаного пути вызывает изменение положения поверхности. Обнаруживается тенденция к преимущественной ориентации поверхности вдоль пути нагружения. На



Фиг. 4

фиг. 3 и 4 четко прослеживается постепенное уменьшение угла заострения в точке нагружения.

Опыты с малым допуском для изменений пластических деформаций позволили при отыскании точек поверхности нагружения обнаружить важную особенность их эволюции. На девиаторных путях нагружения при достижении определенной величины касательных напряжений поверхность нагружения уходит от пространственной диагонали в системе координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Это означает, что уменьшение касательных напряжений при постоянной величине p уже не является разгрузкой в строгом смысле этого термина. Разгрузка продолжается только до некоторого уровня T , а затем вновь начинают изменяться пластические деформации.

Подводя итог обсуждению экспериментальных результатов, можно сказать, что с повышением точности замеров осевой и объемной деформаций при трехосных испытаниях образцов грунта получены новые данные о поверхностях нагружения. В пространстве напряжений каждая такая поверхность ограничивает сравнительно небольшую область. На каждой поверхности нагружения имеется только одна угловая точка. Это точка активного нагружения, в результате которого сформировалась рассматриваемая поверхность. В остальных точках поверхность является гладкой.

Развитие пластических деформаций сопровождается заострением поверхности в точке нагружения и постепенной ее ориентацией вдоль траектории нагружения. При этом в пространстве напряжения поверхность может покинуть как точку, отвечающую исходному ненагруженному состоянию, так и «гидростатическую ось». Это обстоятельство говорит о весьма резком проявлении у нескальных грунтов эффекта Баушингера. Наличие угла в точке нагружения не позволяет при описании пластических деформаций пользоваться ассоциированным законом в его обычной формулировке: Возможность же использования известного обобщения этого закона, предложенного Койтером [8, 18], требует специальной экспериментальной проверки.

Авторы признательны Л. И. Седову, С. С. Григоряну, по инициативе которых выполнена эта работа.

Поступила 1 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ahlvin R. G., Brown D. N.* Duplication of prototipe stress-strain relation in soil masses by laboratory test. Proc. Amer. Soc. Test. Mater., 1960, [1961], vol. 60, p. 1137-1148.
2. *Roscol K. H., Poorooshasb H. B.* A theoretical and experimental study of strain in triaxial compression tests on normally consolidated clays. Geotechnique, 1963, vol. 13, No. 1.
3. *Lambe T. W.* Methods of estimating settlement. T. Soil Mech. and Found. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Engng, 1964, vol. 90, No. 5.
4. *Иващенко И. Н.* Влияние траектории нагружения на деформируемость глинистых грунтов. В сб.: Вопросы прочности и деформируемости грунтов. Баку, Азернешр, 1966.
5. *Широков В. Н.* Модель неупругой сыпучей среды на основе теории пластического течения. Сб. научн. тр. Челябинск. политехн. ин-та, 1973, № 113.
6. *Рассказов Л. Н.* Грунт как материал тела плотины. Гидротехническое строительство, 1973, № 8.
7. *Николаевский В. Н., Сырников Н. М., Шефтер Г. М.* Динамика упругопластических дилатирующих сред. В сб.: Успехи механики деформируемых сред. М., «Наука», 1975, стр. 397-413.
8. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 2. М., «Наука», 1973.
9. *Иоселевич В. А., Дидуз В. И.* О применении теории пластического упрочнения к описанию деформируемости грунта. В сб.: Вопросы механики грунтов и строительства на лессовых основаниях. Грозный, Чечено-Ингушское книжн. изд-во, 1970, стр. 125-133.
10. *Дидуз В. И., Иоселевич В. А.* О построении теории пластического упрочнения грунта. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 2.
11. *Захаров М. Н., Иващенко И. Н.* Экспериментальное исследование пластических деформаций глинистого грунта при трехосном сжатии. ПМТФ, 1971, № 2.
12. *Иоселевич В. А., Зуев В. В., Чахгаури Г. А.* Об эффектах пластического упрочнения нескальных грунтов. Научн. тр. ин-та механики МГУ, 1975, № 42.
13. *Старов А. В.* О применении теории пластического упрочнения к описанию допредельного поведения глинистого грунта. Гидротехническое строительство, 1977, № 6.
14. *Ivashchenko I. N., Zakharov M. N.* On application of flow theories for soil. Tr. VIII Междунар. конгр. по механике грунтов и фундаментостроению, т. 4, ч. 3, М., Стройиздат, 1973.
15. *Линь Т. Г.* Физическая теория пластичности. В сб.: Проблемы теории пластичности. М., «Мир», 1976, стр. 7-68.
16. *Ничипорович А. А.* Сопротивление связных грунтов сдвигу при расчете гидротехнических сооружений на устойчивость. М., Стройиздат, 1948.
17. *Feda J.* Constitutive relations for soil. Tr. VIII Междунар. конгр. по механике грунтов и фундаментостроению, т. 4, ч. 3, М., Стройиздат, 1973.
18. *Koiter W. T.* Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface. Quart. Appl. Math., 1953, vol. 11, No. 3, p. 350-354.

УДК 539.3:534.1

**ФОРМУЛА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ**

Г. Р. ГУЛГАЗАРЯН

(Ереван)

Определяются собственные частоты тонкой упругой цилиндрической оболочки, защемленной по двум образующим и удовлетворяющей условиям Навье на торцах. Предполагается, что число полуволн k по образующей фиксировано ($k \leq k_0$).

При указанных граничных условиях система уравнений с частными производными допускает, как известно, разделение переменных и приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\mu^4 n f + l f = \lambda f, \quad \mu^4 = h^2 / 12, \quad f(\beta) = (u, v, w) \quad (1)$$

Здесь μ^4 — малый параметр; h — толщина оболочки; $f(\beta)$ — вектор перемещений; $n = (n_{ij})$ и $l = (l_{ij})$ ($i, j = 1, 2, 3$) — дифференциальные операторы, явный вид которых