МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1979

УДК 533.6.013.42

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ГЛАВНЫХ КООРДИНАТ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ТЕЛ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Г. Б. КРЫЖЕВИЧ

(Ленинград)

Рассматриваются вопросы обоснования метода главных координат при исследовании линейных колебаний упругих тел, имеющих конечные размеры и соприкасающихся с идеальной жидкостью, занимающей как ограниченный, так и безграничный объем. Показано существование дискретного спектра собственных частот колебаний с соответствующими ортогональными формами и указаны некоторые общие методы их определения. Показано, что собственные формы гидроупругих колебаний оболочки с равномерным распределением массы ортогональны с весом, равным единице.

Метод главных координат обычно позволяет упростить решение задачи о вынужденных линейных колебаниях упругого тела сведением ее к решению независимых обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Хотя этот метод в ряде случаев используется на практике и в некоторых частных случаях дается доказательство ортогональности собственных форм гидроупругих колебаний (см., например, [1, 2]), такой путь решения задачи гидроупругости, согласно широко распространенному среди специалистов мнению, является сугубо приближенным [2, 3]. Данное утверждение обосновывается следующим образом.

Реакцию идеальной жидкости при свободных гидроупругих колебаниях можно представить в виде произведения присоединенной массы жидкости на ускорение упругого тела. При этом каждому тону свободных колебаний тела соответствует своя присоединенная масса. Так как трудно предположить, что форма первого тона главных свободных колебаний тела с одним распределением масс будет ортогональна форме второго тона колебаний тела с другим распределением масс, то делается вывод о том, что колебания любого тона вызовут колебания остальных тонов и, следовательно, само понятие собственной формы колебаний в данном случае неприменимо, а говорить о методе главных координат можно лишь условно.

Можно, однако, показать, что при колебаниях тела, соприкасающегося с несжимаемой, невязкой жидкостью, использование метода главных координат позволяет строго решить задачу гидроупругости. В рассматриваемом случае можно также выписать условия обобщенной ортогональности форм свободных колебаний, хотя эти условия и значительно отличаются от подобных условий для тела, находящегося в среде, не влияющей на его колебания.

1. Рассмотрим, например, колебания произвольной упругой оболочки конечных размеров, соприкасающейся частью своей внешней поверхности с идеальной жидкостью. Обозначая через t время, а через s радиус-вектор точки, принадлежащей ограниченной поверхности оболочки Ω, запишем уравнение колебаний

$$L[w(s,t)]+m(s)\frac{\partial^2 w(s,t)}{\partial t^2}=-p(s,t)+R(t) \qquad (1.1)$$

где L — некоторый линейный дифференциальный самосопряженный оператор упругих сил; w — перемещения точек оболочки, направленные по внешней нормали к оболочке и измеряемые от поверхности, соответствующей недеформированному положению этой оболочки; m — произведение плотности материала оболочки на ее толщину; p — давление жидкости на оболочку; R — интенсивность внешней силы.

Предполагая движение жидкости безвихревым, функцию определим при помощи линеаризованного интеграла Коши — Лагранжа

$$p(s,\ t)=-\rho\partial\Phi(s,\ t)/\partial t \tag{1.2}$$

где ρ — плотность жидкости; Φ — потенциал скоростей частиц жидкости, удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0 \tag{1.3}$$

и соответствующим граничным условиям: на свободной поверхности $\Phi=0$; на смоченной поверхности оболочки $\partial\Phi/\partial n=\partial w/\partial t$; на остальных твердых границах $\partial\Phi/\partial\nu=0$; на бесконечности (в случае неограниченного объема жидкости) $\partial\Phi/\partial x=0$, $\partial\Phi/\partial y=0$, $\partial\Phi/\partial z=0$ (n и ν — внешние нормали к поверхности оболочки и твердой границе соответственно).

Ограничиваясь рассмотрением малых колебаний, с целью линеаризации, условию непротекания на смоченной поверхности оболочки будем удовлетворять на поверхности, соответствующей положению недеформированной оболочки.

Решение линейной краевой задачи для потенциала Φ может быть записано в форме интеграла по смоченной поверхности оболочки F ($F\subset\Omega$) [4]:

$$\Phi(s)=\int\limits_F G_1(s,\xi)\,\frac{\partial\Phi(\xi)}{\partial n}\,dA(\xi)\qquad(s,\xi\in F) \tag{1.4}$$

где $G_1(s,\ \xi)$ — функция Грина; dA — элемент поверхности оболочки.

Тогда уравнение (1.1) можно записать в виде

$$L[w(s,t)]+m(s)\,\frac{\partial^2 w(s,t)}{\partial t^2}-\rho\int\limits_F G_1(s,\ \xi)\,\frac{\partial^2 w(\xi,t)}{\partial t^2}\,dA(\xi)=R \tag{1.5}$$

Найдем решение однородного уравнения, следующего из (1.5) и описывающего свободные гидроупругие колебания системы.

Для этого, в соответствии с методом Фурье, положим $w(s,\ t)=q(t)f(s)$. Подставив данное выражение в однородное уравнение, получим

$$\frac{L[f(s)]}{m(s)f(s)+h(s)}=\frac{1}{q}\,\frac{\partial^2 q}{\partial t^2},\qquad h(s)=-\rho\int\limits_F G_1(s,\ \xi)f(\xi)dA(\xi) \tag{1.6}$$

Для тождественного выполнения равенства (1.6) необходимо, чтобы каждая из частей равенства была постоянной. Обозначая эту постоянную через λ^2, получим два уравнения

$$\partial^2 q/\partial t^2+\lambda^2 q=0 \tag{1.7}$$

$$L[f(s)]-\lambda^2\left[m(s)f(s)-\rho\int\limits_F G_1(s,\xi)f(\xi)dA(\xi)\right]=0 \tag{1.8}$$

Как известно, уравнение (1.7) имеет решение $q=a\sin(\lambda t+\gamma)$, указывающее на колебательный характер движения.

Уравнение (1.8) позволяет определить дискретный спектр вещественных положительных собственных значений λ_i^2 с соответствующими собственными формами f_i гидроупругих колебаний. Для обоснования этого утверждения достаточно показать, что рассматриваемая задача является самосопряженной и вполне определенной [5].

2. Доказательство самосопряженности рассматриваемой задачи, вследствие наличия этого свойства у оператора L, сводится к проверке равенства

$$\int\limits_{\Omega}\left[m(s)f_k(s)-\rho\int\limits_F G_1(s,\xi)f_k(\xi)\,dA(\xi)\right]f_l(s)\,dA(s)=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\left[m(s)f_l(s)-\rho\int\limits_F G_1(s,\xi)f_l(\xi)\,dA(\xi)\right]f_k(s)\,dA(s)\tag{2.1}$$

Здесь функции f_k и f_l играют роль «функций сравнения» [5].

Функция Грина $G_1(s,\ \xi)$ краевой задачи, описываемой уравнением Лапласа, является симметричной [4]. Поэтому левая и правая части равенства (2.1) одновременно равны выражению

$$\int\limits_{\Omega} m(s)f_k(s)f_l(s)\,dA(s)-\rho\int\limits_F\int\limits_F f_k(s)G_1(s,\xi)f_l(\xi)\,dA(s)\,dA(\xi)$$

и, следовательно, рассматриваемая задача является самосопряженной.

Докажем, что рассматриваемая задача является и вполне определенной. Для этого достаточно показать, что

$$\int\limits_{\Omega} L[f_k(s)]f_k(s)\,dA(s)>0\tag{2.2}$$

$$\int\limits_{\Omega} m(s)f_k^2(s)\,dA(s)-\rho\int\limits_F f_k(s)\,dA(s)\int\limits_F G_1(s,\xi)f_k(\xi)\,dA(\xi)>0\tag{2.3}$$

Справедливость неравенства (2.2) очевидна, так как интеграл в его левой части равен удвоенному значению потенциальной энергии, появляющейся в результате деформирования оболочки по форме $f_k(s)$.

Чтобы показать справедливость неравенства (2.3), рассмотрим гармонические колебания оболочки

$$w(s,\ t)=f_k(s)\sin(\omega t+\beta)\tag{2.4}$$

Здесь ω — частота колебаний, β — фазовый угол.

Максимальное значение кинетической энергии жидкости при таких колебаниях можно определить при помощи известного выражения

$$T=-\frac{\rho}{2}\int\limits_F \Phi_*(s)\,\frac{\partial\Phi_*(s)}{\partial n}\,dA(s)\tag{2.5}$$

где $\Phi_*(s)$ — потенциал скоростей частей жидкости в момент времени, соответствующий максимуму кинетической энергии жидкости.

Зависимость (2.5) с учетом выражений (1.4) и (2.4) запишем в виде

$$T=-\frac{\omega^2}{2}\rho\int\limits_F f_k(s)\,dA(s)\int\limits_F G_1(s,\xi)f_k(\xi)\,dA(\xi)\tag{2.6}$$

Сравнивая выражение (2.6) со вторым интегралом в левой части неравенства (2.3) и анализируя первый интеграл, приходим к выводу, что левая часть этого неравенства с точностью до постоянного положительного множителя $2/\omega^2$ представляет собой сумму максимальных значений кинетических энергий оболочки и жидкости при колебаниях оболочки по закону (2.4). Таким образом рассматриваемая задача является и вполне определенной.

3. Спектр собственных частот и формы колебаний можно определить как непосредственным применением к уравнению (1.8) прямых вариационных методов, так и сведением этого уравнения к задаче о стационарных значениях следующего выражения (частного Релея [4]):

$$\int_\Omega f(s)L[f(s)]dA(s) \Big/ \int_\Omega [m(s)f(s)+h(s)]f(s)dA(s) \tag{3.1}$$

Задача отыскания собственных форм колебаний заключается в определении функций, удовлетворяющих краевым условиям оболочки и обращающих вариацию функционала (3.1) в нуль.

Нахождение собственных частот и форм рассматриваемой задачи можно свести также к задаче на собственные значения для интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Линейная краевая задача, заданная уравнением (1.8) с соответствующими граничными условиями, эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$f(s)=\lambda^2\left[\int_\Omega G_2(s,\eta)m(\eta)f(\eta)dA(\eta)-\right.$$

$$\left.-\rho\int_\Omega G_2(s,\eta)dA(\eta)\int_F G_1(\eta,\xi)f(\xi)dA(\xi)\right] \tag{3.2}$$

где $G_2(s, \eta)$ — функция Грина краевой задачи, описываемой дифференциальным уравнением $L[f(s)]=0$ с соответствующими линейными краевыми условиями, зависящими от способа закрепления границ оболочки.

Путем изменения порядка интегрирования можно показать справедливость тождества

$$\rho\int_\Omega G_2(s,\eta)dA(\eta)\int_F G_1(\eta,\xi)f(\xi)dA(\xi)=\int_\Omega K_1(s,\xi)dA(\xi) \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} &K_1(s,\xi)=\rho\int_F G_1(\eta,\xi)G_2(s,\eta)dA(\eta), \quad \text{если} \quad s \text{ и } \xi\in F \\ &K_1(s,\xi)=0, \quad \text{если } s \text{ или } \xi\notin F \end{aligned} \tag{3.4}$$

Уравнение (3.2) с учетом выражения (3.3) можно привести к уравнению Фредгольма второго рода с невырожденным нормируемым эрмитовым ядром

$$f(s)-\lambda^2\int_\Omega K_2(s,\xi)f(\xi)dA(\xi)=0, \quad K_2(s,\xi)=G_2(s,\xi)m(\xi)-K_1(s,\xi) \tag{3.5}$$

Из анализа выражения (3.4) вытекает, что ядро $K_1(s, \xi)$ симметрично. Следовательно, при равномерном распределении массы по поверхности оболочки ядро $K_2(s, \xi)$ уравнения (3.5) также симметрично. В этом случае собственные формы колебаний, соответствующие различным собственным частотам, взаимно ортогональны с весом, равным единице [4]:

$$\int_\Omega f_k(s)f_l(s)dA(s)=0 \quad \text{при} \quad k\neq l$$

При неравномерном распределении масс условия ортогональности можно получить из двух уравнений, полученных подстановкой в выражение (1.8) в качестве формы деформирования оболочки функций $f_k(s)$ и $f_l(s)$ соответственно. Умножая полученные уравнения последовательно на $f_l(s)$ и $f_k(s)$ и интегрируя по поверхности Ω, а затем вычитая из первого уравнения второе и учитывая, что полученная зависимость должна быть справедливой при любых λ_k, получим

$$\int\limits_\Omega m(s)f_k(s)f_l(s)\,dA(s)-\rho\int\limits_F\int\limits_F f_k(s)G_1(s,\xi)f_l(\xi)\,dA(s)\,dA(\xi)=0 \text{ при } k\neq l$$

Зная собственные частоты и формы колебаний и приняв решение рассматриваемой задачи в виде

$$w(s,t)=\sum_{i=1}^\infty q_i(t)f_i(s)$$

исследование вынужденных колебаний можно свести при помощи известных приемов к решению независимых уравнений типа

$$\partial^2 q_i/\partial t^2+\lambda_i^2=r_i(t)$$

$$r_i(t)=\int\limits_\Omega R(s,t)f_i(s)\,dA(s)\left[\int\limits_\Omega m(s)f_i^2(s)\,dA(s)-\right.$$

$$\left.-\rho\int\limits_F\int\limits_F f_i(s)G_1(s,\xi)f_i(\xi)\,dA(s)\,dA(\xi)\right]^{-1}$$

Таким образом, выполненное исследование показывает, что рассмотренная задача имеет спектр собственных частот с соответствующими ортогональными формами, которые можно определить одним из рассмотренных выше общих методов, а метод главных координат является строгим инструментом исследования линейных колебаний упругих тел, соприкасающихся с идеальной жидкостью.

Поступила 19 II 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баничук Н. В., Миронов А. А.* Оптимизация частот колебаний упругой пластинки в идеальной жидкости. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
2. *Чувиковский В. С.* Численные методы расчета в строительной механике корабля. Л., «Судостроение», 1976.
3. *Курдюмов А. А.* Вибрация корабля. Л., Судпромгиз, 1961.
4. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1968.
5. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М., «Наука», 1968.