

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭХО-СИГНАЛА ОТ СПЛОШНОГО УПРУТОГО НЕКРУГОВОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ПОМОЩИ ИНТЕГРАЛА КИРХГОФА

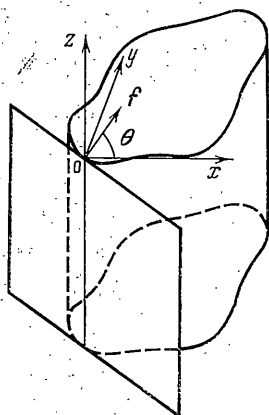
А. С. СТУЛОВ

(Таллин)

Рассматривается двумерная нестационарная задача дифракции плоского акустического импульса на сплошном упругом цилиндре. Для определения потенциалов смещений и их производных на поверхности цилиндра используются интегралы Кирхгофа. Такое интегральное представление позволяет понизить размерность задачи и рассматривать цилиндры с особенностями в виде точек возврата и углов. Интегральные уравнения и уравнения граничных условий решаются методом конечно-разностной аппроксимации. Определенные таким образом значения поля на поверхности цилиндра используются в интеграле Кирхгофа для вычисления эхо-сигнала в произвольной точке пространства.

В качестве примера вычислено распределение давления на поверхности упругого цилиндра, а также эхо-сигналы от различных упругих цилиндров. Приведено сравнение полученных результатов с решением задачи дифракции импульса на круговом жестком и упругом цилиндрах в рядах по собственным функциям с использованием преобразования Фурье по времени.

1. Пусть на сплошной упругий цилиндр произвольного поперечного сечения, находящийся в идеальной сжимаемой жидкости, падает плоский импульс давления с произвольным законом изменения давления по времени за фронтом. Задача о вычислении эхо-сигнала от такого цилиндра решается в декартовой системе координат x, y, z с осью z , параллельной образующей цилиндра (фиг. 1). Сечение цилиндра описывается произвольной кусочно-гладкой замкнутой кривой L , параметрическое представление которой имеет вид $x=x(\eta)$ и $y=y(\eta)$. Плоскость падающего импульса параллельна образующей цилиндра, и за ось z взята линия соприкосновения импульса и цилиндра в момент времени $t=0$; θ — угол между осью x и нормалью к фронту падающего импульса f .



Фиг. 1

Давление импульса p^i и соответствующий ему потенциал смещения F^i в падающей волне определяются уравнениями

$$p^i(x, y, t) = -\rho_0 \frac{\partial^2 F^i(x, y, t)}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

$F^i(x, y, t) = F^i(\xi)$, $\xi = t - c_0^{-1}x \cos \theta - c_0^{-1}y \sin \theta$ где ρ_0 и c_0 — плотность и скорость звука в жидкости.

Функция, определяющая закон изменения потенциала смещения в падающей волне, аргументом которой является расстояние от фронта падающего импульса, выбирается достаточно гладкой, с непрерывными пер-

вой и второй производными и удовлетворяющей условию

$$F^i(\xi) = dF^i(\xi)/d\xi = d^2F^i(\xi)/d\xi^2 = 0 \text{ при } \xi \leq 0 \quad (1.2)$$

2. Процесс деформации упругого цилиндра описывается по линейной теории упругости. При этом вводятся скалярный и векторный потенциалы смещения φ и ψ , удовлетворяющие волновым уравнениям

$$c_1^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad c_2^2 \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.1)$$

где c_1 и c_2 — скорости продольных и сдвиговых волн в материале цилиндра. Для рассматриваемой двумерной задачи, когда решение не зависит от координаты z , отлична от нуля только одна компонента векторного потенциала, а именно ψ_z , которая в дальнейшем обозначается просто ψ .

Во время взаимодействия на поверхности цилиндра выполняются обычные граничные условия, требующие равенства нормальных перемещений упругого тела и жидкости, отсутствия касательных напряжений и равенства нормального напряжения давлению в жидкости, взятому с обратным знаком. Эти условия в потенциалах смещений выглядят следующим образом [1]:

$$\rho \left[c_1^2 \Delta \varphi - 2c_2^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial s \partial n} \right) \right] = \rho_0 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial n} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial n}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial n^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}$$

где $\partial/\partial n$ и $\partial/\partial s$ — производные вдоль нормали и касательной к поверхности цилиндра, $F = F^s + F^i$ — сумма потенциалов смещений в отраженной и в падающей волнах, ρ — плотность материала цилиндра. Начальными условиями задачи является требование отсутствия возмущений в области $x \cos \theta + y \sin \theta$ при $t \leq 0$.

3. В задаче удобно рассматривать цилиндрическое препятствие произвольной длины и постоянного поперечного сечения, а не двумерное препятствие. При этом поле, соответствующее такой трехмерной задаче, не зависит от координаты вдоль оси цилиндра для времен, меньших чем время распространения волны от концов цилиндра до рассматриваемой точки. Для таких временных интервалов получаем двумерное решение трехмерной задачи вследствие гиперболического характера волнового уравнения, которому подчиняется поле.

Для решения поставленной задачи используется формула Кирхгофа, которая дает интегральное представление для суммы потенциалов падающей и отраженной волны через распределение запаздывающих значений этих потенциалов и их производных на замкнутой граничной поверхности препятствия [2]:

$$F(M, t) = F^i(M, t) - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} \left[\frac{1}{R} F_{n'}(Q', \tau_0) + \frac{1}{R^2} F(Q', \tau_0) \frac{\partial R}{\partial n'} + \frac{1}{c_0 R} F_t(Q', \tau_0) \frac{\partial R}{\partial n'} \right] dS_0 \quad (3.1)$$

Здесь $[]_{n'}$ — частная производная по направлению единичного вектора внешней нормали к цилиндрической поверхности в меняющейся поло-

жение точке Q' , $[\]_t$ — производная по времени; M — точка наблюдения; R — расстояние между точками M и Q' ; τ_0 — время запаздывания, определяемое соотношением $\tau_0 = t - c_0^{-1}R$.

Область интегрирования S_0 задается пересечением фронта рассеянной волны на поверхности цилиндра и «гиперконуса», определяемого уравнением $\tau_0 = t - c_0^{-1}R$.

Если точка наблюдения M приближается к поверхности препятствия и совпадает с точкой границы Q' ($R=0$), то интеграл (3.1) становится сингулярным и, следовательно, в обычном смысле не существует, но если ввести понятие главного значения сингулярного интеграла, этот интеграл можно рассматривать в смысле его предельного значения при условии, что в окрестности точки Q' выполняется условие Гельдера [3, 4]. Оценка интеграла с особенностью $(1/R) \partial R / \partial n$ (потенциал двойного слоя), когда точка наблюдения находится на поверхности цилиндра, дает выражение

$$F(Q, t) = F^i(Q, t) - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} \left[\frac{1}{R} F_{n'} + \frac{1}{R^2} F \frac{\partial R}{\partial n'} + \frac{1}{c_0 R} F_t \frac{\partial R}{\partial n'} \right] dS_0 + \frac{\alpha}{2\pi} F(Q, t) \quad (3.2)$$

где α — угол излома кривой L в точке Q (для гладкой кривой $\alpha = \pi$). Подынтегральные выражения с особенностью типа R^{-1} представляют собой потенциалы простого слоя, и их интегралы всюду непрерывны в области S_0 .

4. Покажем, каким образом интегральная формула Кирхгофа (3.2) может быть использована для решения задач дифракции.

Если препятствие является абсолютно жестким, то производная по нормали $F_{n'} = 0$ и (3.2) является интегральным уравнением для определения $F(Q, t)$. Такое интегральное уравнение решалось в [2, 5] и численные результаты были получены для цилиндрических препятствий квадратного [2] и кругового [5] сечений.

Если известно распределение $F_{n'}$ на поверхности упругого препятствия, то задача решается также достаточно просто с использованием интегрального уравнения (3.2), но обычно такое распределение заранее не известно. Чтобы его найти, воспользуемся интегралом Кирхгофа для получения интегральных представлений для производных от потенциалов смещений по направлениям касательной и нормали на поверхности цилиндра [2, 6]:

$$\begin{aligned} \varphi_l(Q, t) &= \frac{\alpha}{2\pi} \varphi_l(Q, t) + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left\{ \frac{1}{R} \varphi_{ln'}(Q', \tau_1) - \right. \\ &\quad \left. - \left[\varphi_l(Q', \tau_1) + \frac{R}{c_1} \varphi_{ll}(Q', \tau_1) \right] \left(\frac{1}{R} \right)_{n'} \right\} dS_1 \\ \psi_l(Q, t) &= \frac{\alpha}{2\pi} \psi_l(Q, t) + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_2} \left\{ \frac{1}{R} \psi_{ln'}(Q', \tau_2) - \right. \\ &\quad \left. - \left[\psi_l(Q', \tau_2) + \frac{R}{c_2} \psi_{ll}(Q', \tau_2) \right] \left(\frac{1}{R} \right)_{n'} \right\} dS_2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

В формулах (4.1) производные вычисляются в точке наблюдения Q по фиксированному направлению l , а интегралы, так же как и (3.2), берутся в смысле главного значения. Трехмерные области интегрирования S_1 и S_2 задаются положением фронта падающего импульса на поверхности цилиндра и фронтами, движущимися со скоростями c_1 и c_2 . Время запазды-

вания τ_1 и τ_2 определяется по формуле

$$\tau_i = t - c_i^{-1} R \quad (i=1, 2) \tag{4.2}$$

В уравнениях (4.1) за направление l сначала выбирается направление нормали n в точке Q , а затем направление касательной s .

Представим производные по этим фиксированным направлениям под знаком интегралов (4.1) через производные по направлениям n' и s' , зависящим от положения точки интегрирования Q' :

$$\Phi_n(Q', \tau) = -q_1 \Phi_{s'}(Q', \tau) + q_2 \Phi_{n'}(Q', \tau), \tag{4.3}$$

$$\Phi_s(Q', \tau) = q_2 \Phi_{s'}(Q', \tau) + q_1 \Phi_{n'}(Q', \tau)$$

$$\Phi_{nn'}(Q', \tau) = q_2 \Phi_{n'n'}(Q', \tau) - q_1 \Phi_{n's'}(Q', \tau) + q_3 \Phi_{n'}(Q', \tau) + q_4 \Phi_{s'}(Q', \tau)$$

$$\Phi_{sn'}(Q', \tau) = q_1 \Phi_{n'n'}(Q', \tau) + q_2 \Phi_{n's'}(Q', \tau) + q_3 \Phi_{s'}(Q', \tau) - q_4 \Phi_{n'}(Q', \tau)$$

Коэффициенты q_1, q_2, q_3, q_4 , входящие в формулы (4.3), являются функциями, зависящими как от положения точки наблюдения Q , так и от точки интегрирования Q' . Если кривая, определяющая контур цилиндра, задана параметрически $x=x(\eta), y=y(\eta)$, и точкам Q и Q' соответствуют параметры η_0 и η' , то эти коэффициенты вычисляются по формулам

$$q_1 = x_s(\eta_0) y_s(\eta') - x_s(\eta') y_s(\eta_0), \quad q_2 = y_s(\eta_0) y_s(\eta') + x_s(\eta_0) x_s(\eta')$$

$$q_3 = x_s(\eta_0) y_{ss}(\eta') - y_s(\eta_0) x_{ss}(\eta'), \quad q_4 = y_s(\eta_0) y_{ss}(\eta') + x_s(\eta_0) x_{ss}(\eta') \tag{4.4}$$

$$x_s = d^{-1/2} x_\eta, \quad y_s = d^{-1/2} y_\eta$$

$$x_{ss} = d^{-2} y_\eta (y_\eta x_{\eta\eta} - x_\eta y_{\eta\eta}), \quad y_{ss} = d^{-2} x_\eta (x_\eta y_{\eta\eta} - y_\eta x_{\eta\eta})$$

$$d = x_\eta^2 + y_\eta^2, \quad x_\eta = \frac{\partial x(\eta)}{\partial \eta}, \quad y_\eta = \frac{\partial y(\eta)}{\partial \eta}, \quad x_{\eta\eta} = \frac{\partial^2 x(\eta)}{\partial \eta^2}, \quad y_{\eta\eta} = \frac{\partial^2 y(\eta)}{\partial \eta^2}$$

В угловой точке, когда $x_\eta = y_\eta = 0$, коэффициенты q_1, q_2, q_3, q_4 определяются по их предельным значениям [7].

Благодаря представлению производных от потенциалов смещений ϕ и ψ в виде (4.3), формулы (4.1), а также уравнение (3.2) дают пять интегральных представлений для функций $\Phi_n, \Phi_s, \Phi_{n'}, \Phi_{s'}, F$. Для гладкой кривой L они выглядят так:

$$F(\eta_0, t) = 2F^i(\eta_0, t) - \frac{1}{\pi} \int_{\eta_{01}}^{\eta_{02}} d^{1/2} d\eta' \int_0^{z_0} \left\{ \frac{1}{R} F_{n'}(\eta', \tau_0) + \right. \tag{4.5}$$

$$\left. + \left[\frac{1}{R^2} F(\eta', \tau_0) + \frac{1}{c_0 R} F_i(\eta', \tau_0) \right] \frac{\partial R}{\partial n'} \right\} dz$$

$$\Phi_n(\eta_0, t) = \frac{1}{\pi} \int_{\eta_{11}}^{\eta_{12}} d^{1/2} d\eta' \int_0^{z_1} \left\{ \frac{1}{R} \Phi_{nn'}(\eta', \tau_1) + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{R^2} \Phi_n(\eta', \tau_1) + \frac{1}{c_1 R} \Phi_{ni}(\eta', \tau_1) \right] \frac{\partial R}{\partial n'} \right\} dz$$

$$\Phi_s(\eta_0, t) = \frac{1}{\pi} \int_{\eta_{11}}^{\eta_{12}} d^{1/2} d\eta' \int_0^{z_1} \left\{ \frac{1}{R} \Phi_{sn'}(\eta', \tau_1) + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{R^2} \Phi_s(\eta', \tau_1) + \frac{1}{c_1 R} \Phi_{si}(\eta', \tau_1) \right] \frac{\partial R}{\partial n'} \right\} dz$$

$$\psi_n(\eta_0, t) = \frac{1}{\pi} \int_{\eta_{21}}^{\eta_{22}} d^{1/2} d\eta' \int_0^{z_2} \left\{ \frac{1}{R} \psi_{nn'}(\eta', \tau_2) + \left[\frac{1}{R^2} \psi_n(\eta', \tau_2) + \frac{1}{c_2 R} \psi_{ni}(\eta', \tau_2) \right] \frac{\partial R}{\partial n'} \right\} dz$$

$$\psi_s(\eta_0, t) = \frac{1}{\pi} \int_{\eta_{21}}^{\eta_{22}} d^{1/2} d\eta' \int_0^{z_2} \left\{ \frac{1}{R} \psi_{sn'}(\eta', \tau_2) + \left[\frac{1}{R^2} \psi_s(\eta', \tau_2) + \frac{1}{c_2 R} \psi_{si}(\eta', \tau_2) \right] \frac{\partial R}{\partial n'} \right\} dz$$

$$R = (a^2 + z^2)^{1/2}, \quad a^2 = [x(\eta_0) - x(\eta')]^2 + [y(\eta_0) - y(\eta')]^2$$

$$z_i = [c_i^2 (t - t')^2 - a^2]^{1/2} \quad (i=0, 1, 2)$$

$$t' = \min \{ c_0^{-1} x(\eta') \cos \theta + c_0^{-1} y(\eta') \sin \theta, \quad c_1^{-1} [x(\eta')^2 + y(\eta')^2]^{1/2} \}$$

где η_{i1}, η_{i2} — корни уравнения $z_i = 0$.

Используя полученные интегральные представления, а также начальные и граничные условия, можно найти значение этих функций в любой момент времени.

5. Указанные выше уравнения решаются численно. Для этого контур $x(\eta), y(\eta)$, задающий поверхность цилиндра, разбивается на N_1 , а рассматриваемый временной интервал на N_2 частей, так что

$$c_i \Delta t < \Delta s_k, \quad \Delta t = t N_2^{-1}, \quad \Delta s_k = [(x_k - x_{k+1})^2 + (y_k - y_{k+1})^2]^{1/2} \quad (k=1, 2, \dots, N_1) \quad (5.1)$$

где $x_k = x(\eta_k), y_k = y(\eta_k)$ — координаты точек, аппроксимирующих контур цилиндра.

Предполагается, что неизвестные функции и их производные, стоящие под знаком интегралов (4.5), имеют постоянное среднее значение на фиксированных интегралах Δs_k и Δt , причем значение этих функций, например $F_n(k, j)$, вычисляется в точке, расположенной посередине интервала Δs_k в момент времени $t_j = \Delta t j$. Сделанное приближение позволяет аппроксимировать интегральные представления функций двойными суммами запаздывающих по времени значений этих функций, коэффициенты при которых являются интегралами от $R^{-1} \partial R / \partial n$ и $R^{-2} \partial R / \partial n$ по соответствующим областям. Для любой заданной поверхности препятствия такие коэффициенты могут быть легко вычислены. Заменяя производные по времени отношением левых разностей, а производные по касательной с средними разностями, получим выражения

$$F(k, h) = 2F^0(k, h) - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{N_1} \sum_{j=2}^h [A_{kmj}^{(0)} F_n(m, h-j+1) + B_{kmj}^{(0)} F(m, h-j+1) + C_{kmj}^{(0)} F(m, h-j)] \quad (5.2)$$

$$\varphi_n(k, h) = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{N_1} \sum_{j=2}^h [A_{kmj}^{(1)} V_{km}^{(1)}(m, h-j+1) + B_{kmj}^{(1)} V_{km}^{(2)}(m, h-j+1) + C_{kmj}^{(1)} V_{km}^{(2)}(m, h-j)]$$

$$\begin{aligned} \varphi_s(k, h) &= \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq h}}^{N_1} \sum_{j=2}^h [A_{kmj}^{(1)} V_{km}^{(3)}(m, h-j+1) + \\ &+ B_{kmj}^{(1)} V_{km}^{(4)}(m, h-j+1) + C_{kmj}^{(1)} V_{km}^{(4)}(m, h-j)] \\ \psi_n(k, h) &= \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq h}}^{N_1} \sum_{j=2}^h [A_{kmj}^{(2)} W_{km}^{(1)}(m, h-j+1) + \\ &+ B_{kmj}^{(2)} W_{km}^{(2)}(m, h-j+1) + C_{kmj}^{(2)} W_{km}^{(2)}(m, h-j)] \\ \psi_s(k, h) &= \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq h}}^{N_1} \sum_{j=2}^h [A_{kmj}^{(2)} W_{km}^{(3)}(m, h-j+1) + \\ &+ B_{kmj}^{(2)} W_{km}^{(4)}(m, h-j+1) + C_{kmj}^{(2)} W_{km}^{(4)}(m, h-j)] \end{aligned}$$

$$A_{kmj}^{(i)} = \frac{\Delta s_k}{\pi} \int_{z_{i1}}^{z_{i2}} \frac{dz}{R}, \quad C_{kmj}^{(i)} = -\frac{\Delta s_k D_{km}}{\pi \Delta t c_i} \int_{z_{i1}}^{z_{i2}} \frac{dz}{R^2}, \quad B_{kmj}^{(i)} = -C_{kmj}^{(i)} + \frac{\Delta s_k D_{km}}{\pi} \int_{z_{i1}}^{z_{i2}} \frac{dz}{R^3} \quad (i=0,1,2) \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} R &= (a_{km}^2 + z^2)^{1/2}, \quad a_{km}^2 = (x_m - x_k)^2 + (y_m - y_k)^2 \\ D_{km} &= (x_m - x_k)(y_s)_m - (y_m - y_k)(x_s)_m \\ z_{i1} &= [b_i^2(j-1) - a_{km}^2]^{1/2}, \quad z_{i2} = [b_i^2(j) - a_{km}^2]^{1/2} \\ b_0(j) &= \Delta t j, \quad b_1(j) = c_1 c_0^{-1} b_0(j), \quad b_2(j) = c_2 c_0^{-1} b_0(j) \end{aligned}$$

Функции $W_{km}^{(i)}(m, j)$ и $V_{km}^{(i)}(m, j)$, входящие в суммы (5.2), вычисляются при помощи формул (4.3) и (4.4)

$$V_{km}^{(1)}(m, j) = q_2 \varphi_{nn}(m, j) - 1/2 q_1 \Delta s_m^{-1} [\varphi_n(m+1, j) - \varphi_n(m-1, j)] + q_3 \varphi_n(m, j) + q_4 \varphi_s(m, j) \quad (5.4)$$

$$V_{km}^{(2)}(m, j) = q_2 \varphi_n(m, j) - q_1 \varphi_s(m, j)$$

$$V_{km}^{(3)}(m, j) = q_1 \varphi_{nn}(m, j) + 1/2 q_2 \Delta s_m^{-1} [\varphi_n(m+1, j) - \varphi_n(m-1, j)] + q_3 \varphi_s(m, j) - q_4 \varphi_n(m, j)$$

$$V_{km}^{(4)}(m, j) = q_1 \varphi_n(m, j) + q_2 \varphi_s(m, j), \quad q_i = q_i(k, m) \quad (i=1,2,3,4)$$

Здесь выписаны формулы только для $V_{km}^{(i)}(m, j)$, так как соотношения для $W_{km}^{(i)}(m, j)$ получаются из (5.4) заменой функции φ на ψ . При вычислении коэффициентов (5.3) необходимо учесть, что если волна не дошла до рассматриваемой точки ($z_{i1} < 0$), то эти коэффициенты нужно положить равными нулю. Выполнив интегрирование в формулах (5.3), получим

$$A_{kmj}^{(i)} = \frac{\Delta s_k}{\pi} \ln \frac{b_i(j) + z_{i2}}{b_i(j-1) + z_{i1}}$$

$$C_{kmj}^{(i)} = -\frac{\Delta s_k D_{km}}{\pi \Delta t c_i a_{km}} \left[\operatorname{arctg} \frac{z_{i2}}{a_{km}} - \operatorname{arctg} \frac{z_{i1}}{a_{km}} \right]$$

$$B_{kmj}^{(i)} = -C_{kmj}^{(i)} + \frac{\Delta s_k D_{km}}{\pi a_{km}^2} \left[\frac{z_{i2}}{b_i(j)} - \frac{z_{i1}}{b_i(j-1)} \right]$$

Таким образом, для рассматриваемых временных интервалов средние значения неизвестных функций не зависят от координаты z , а являются функциями только η и t . Воспользовавшись условиями (2.2), подставим в уравнения (5.2) (для $F(k, h)$), (5.4) (и в аналогичные для функций $W_{km}^{(i)}(m, j)$) следующие приближенные равенства, полученные из (2.2):

$$F_n(m, j) = \varphi_n(m, j) + \psi_s(m, j) \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{nn}(m, j) = & \frac{1}{2} \rho_0 \rho^{-1} c_1^{-2} \Delta t^{-2} [F(m, j) - 2F(m, j-1) + F(m, j-2)] + \\ & + \frac{1}{2} c_1^{-2} \Delta s_m^{-1} (2c_2^2 - c_1^2) [\varphi_s(m+1, j) - \varphi_s(m-1, j)] - \\ & - c_1^{-2} c_2^2 \Delta s_m^{-1} [\varphi_n(m+1, j) - \varphi_n(m-1, j)] \\ \psi_{nn}(m, j) = & \frac{1}{2} \Delta s_m^{-1} [2\varphi_n(m+1, j) - 2\varphi_n(m-1, j) + \\ & + \varphi_s(m+1, j) - \varphi_s(m-1, j)] \end{aligned}$$

Таким образом получаем систему из пяти уравнений, каждое из которых определяет функцию в некоторой точке k и в момент времени h , через значения функций в более ранние времена. Полученная система уравнений является последовательной, неодновременной, что позволяет, используя начальные условия, получить значение перемещений и напряжений на поверхности цилиндра в любой момент времени, а также давление в отраженной волне для произвольной точки пространства по формуле (3.1). Разностное уравнение для (3.1) аналогично первому уравнению (5.2).

Для первого шага по времени отличны от нуля только

$$F(k, 1) = 2F^i(k, 1), \quad \varphi_{nn}(k, 1) = -\rho^{-1} c_1^{-2} p^i(k, 1)$$

подстановка которых в суммы (5.2) позволяет продолжить процесс вычисления всех неизвестных функций до любого момента времени.

6. Полученный в п. 5 алгоритм был использован для вычисления эхосигнала от сплошного упругого цилиндра эллиптического поперечного сечения. Контур цилиндра (эллипс) в декартовой системе координат задавался в параметрическом виде

$$x = a_0 [\cos \eta_0 - \cos (\eta + \eta_0)], \quad y = \sin \eta_0 - \sin (\eta + \eta_0)$$

где a_0 — отношение горизонтальной оси эллипса к вертикальной, η_0 — параметр, выбранный таким образом, чтобы угол между нормалью к фронту падающего импульса и осью x был равен θ . Для этого должно выполняться соотношение $\operatorname{tg} \theta = a_0 \operatorname{tg} \eta_0$.

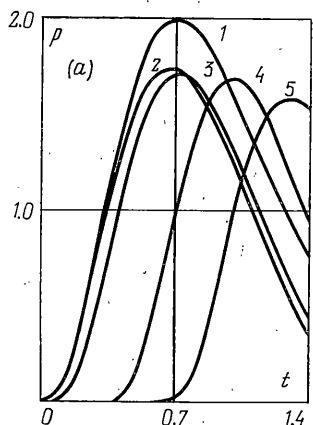
Область изменения параметра η $[0, 2\pi]$ разбивалась на N_1 частей. Координаты точек разбиения контура задавались по формулам

$$x_k = a_0 [\cos \eta_0 - \cos (\eta_k + \eta_0)], \quad y_k = \sin \eta_0 - \sin (\eta_k + \eta_0), \quad \eta_k = 2\pi k N_1^{-1}$$

где N_1 — число точек на контуре, k — номер точки. Таким образом расстояние между соседними точками различно. Точки расположены гуще на остром конце эллипса. Дуговое расстояние между точками с номерами k и $k+1$ вычислялось приближенно по формуле

$$\Delta s_k = 2\pi N_1^{-1} [1 + (a_0^2 - 1) \sin^2 (\eta_k + \eta_0)]^{1/2}$$

За единицу времени принималось время, за которое волна со скоростью c_0 проходит расстояние, равное малой (вертикальной) полуоси



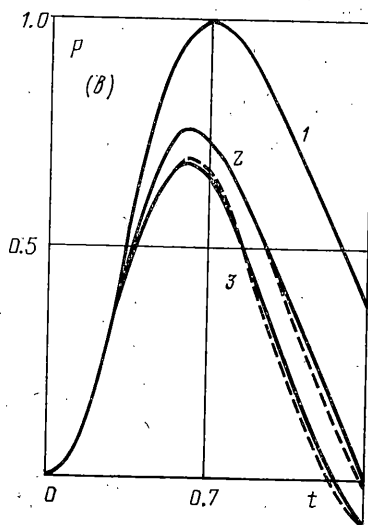
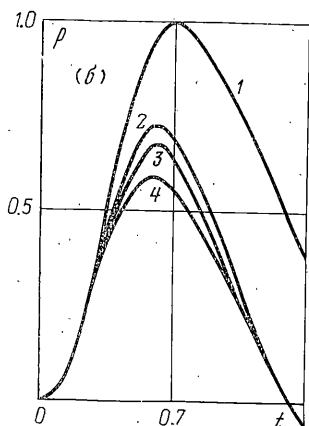
эллипса, а длина шага по времени определялась по формуле $\Delta t = 2\lambda \delta c_0 c_1^{-1} N_1^{-1}$, где δ — безразмерная постоянная, которая при счете выбиралась из интервала (0.5—1.0).

Приведенные ниже примеры получены для цилиндров, упругие постоянные которых следующие: $c_1/c_0=4.23$, $c_2/c_0=2.30$, $\rho/\rho_0=7.70$ (сталь) и $c_1/c_0=4.56$, $c_2/c_0=2.13$, $\rho/\rho_0=2.70$ (алюминий).

Число точек, аппроксимирующих контур поверхности цилиндра, $N_1=40$. Давление в падающем импульсе изменялось по закону

$$p^i(\xi) = (\xi/\xi_0)^3 \exp[3(1-\xi/\xi_0)]$$

где ξ — расстояние от фронта падающего импульса, ξ_0 — положение максимума (в примере $\xi_0=0.7$).



Фиг. 2

На фиг. 2, а представлены зависимости давления от времени на поверхности стального эллиптического ($a_0=1.2$) цилиндра, вычисленные в точках с номерами $k=40, 2, 5, 7$ — кривые 2-5 соответственно. Падающий импульс (кривая 1) $2p^i$ распространяется вдоль большой оси эллипса ($\theta=0^\circ$).

На фиг. 2, б показаны эхо-сигналы от различных алюминиевых эллиптических цилиндров, вычисленные в точке $(-10,0)$. Падающий импульс давления ($\theta=0^\circ$) — кривая 1; кривые 2-4 — эхо-сигналы от цилиндров с $a_0=1.0, 2.0, 3.0$ соответственно. Эхо-сигналы нормированы множителем $(2r-1)^{1/2}$, где r — расстояние от оси эллипса до точки наблюдения.

Для проверки предлагаемого здесь алгоритма результаты, полученные для кругового ($a_0=1.0$) цилиндра, сравнивались с результатами, полученными другим методом. Так как в литературе отсутствуют данные о нестационарной дифракции достаточно гладких импульсов на жестких и упругих цилиндрах, то была численно решена задача дифракции на круглом жестком и упругом цилиндрах в рядах по собственным функциям методом, описанным в [8], с использованием обратного преобразования Фурье по времени.

Результаты, полученные двумя различными методами, представлены на фиг. 2, в. Кривая 1 — падающий импульс давления, кривые 2 и 3 — давление в отраженной волне на поверхности жесткого и упругого цилиндров соответственно. Пунктиром показаны результаты, полученные с использованием формулы Кирхгофа. Совпадение результатов оказывается хорошим; отклонение не превышает 3%. Косвенной проверкой представленных результатов может считаться также устойчивость решения

к изменению некоторых параметров, таких, как число точек разбиения контура и соотношения между шагами по времени и угловой координате. Изменение числа точек разбиения контура с 40 до 60, а также изменение δ в пределах (0.5–1.0) слабо влияет на окончательный результат.

Для достаточно медленно изменяющихся зондирующих импульсов, представленных на фиг. 2, число точек $N_1=40$ вполне достаточно для описания поля в освещенной зоне. Для тени и полутени число точек следует, по-видимому, увеличить, но возможности используемой для вычислений ЭВМ ЕС-1022 не позволяют этого сделать ввиду недостаточно большой оперативной памяти машины и ее быстродействия. Используя более мощные машины, можно решать представленным выше способом задачи дифракции более коротких импульсов на более сложных цилиндрических упругих объектах.

Поступила 3 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Banaugh R. P., Goldsmith W.* Diffraction of steady elastic waves by surfaces of arbitrary shape. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, No. 4. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1963, № 4.)
2. *Friedman M. B., Shaw R. P.* Diffraction of pulses by cylindrical obstacles of arbitrary cross section. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, No. 1. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1962, № 1.)
3. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
4. *Мухомелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
5. *Shaw R. P.* Transient scattering by a circular cylinder. J. Sound and Vibration, 1975, vol. 42, No. 3, p. 295–304.
6. *Ko W. L.* Scattering of stress waves by a circular elastic cylinder embedded in an elastic medium. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1970, vol. 37, No. 2, p. 345–355. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1970, № 2.)
7. *Banaugh R. P., Goldsmith W.* Diffraction of steady acoustic waves by surfaces of arbitrary shape. J. Acoust. Soc. America, 1963, vol. 35, No. 10.
8. *Faran J. J. Jr.* Sound scattering by solid cylinders and spheres. J. Acoust. Soc. America, 1951, vol. 23, No. 4.