МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1979

УДК 539.3:534.1

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕКРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Р. М. БЕРГМАН, Л. А. ЛОБАЧИНСКИЙ

(Баку)

Методом асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений построены решения уравнений свободных колебаний некруговой цилиндрической оболочки, свободно опертой по криволинейным торцам, обладающие большой изменяемостью как в направлении образующей, так и направляющей. Проанализированы качественные особенности полученных решений. Рассмотрен случай наличия на отрезке интегрирования точки поворота.

1. Свободные колебания цилиндрической оболочки описываются следующей системой уравнений движения в перемещениях при отбрасывании второстепенных членов [1]:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+(1-\sigma^2)\lambda\right]\xi+\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\beta}-\frac{\sigma}{R}\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}=0$$

$$\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2\xi}{\partial\alpha\partial\beta}+\left[\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+(1-\sigma^2)\lambda\right]\eta-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\zeta}{R}\right)=0 \qquad (1.1)$$

$$\frac{\sigma}{R}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}+\frac{1}{R}\frac{\partial\eta}{\partial\beta}-\left[\frac{1}{R^2}-(1-\sigma^2)\lambda+\frac{h^2}{3}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)^2\right]\zeta=0$$

$$\lambda=m\omega^2r/2Eh,\quad \xi=2Ehu,\quad \eta=2Ehv,\quad \zeta=2Ehw$$

где α — безразмерная длина образующей оболочки; β — безразмерная длина периметра поперечного сечения; $R=R(\beta)$ — безразмерный радиус кривизны поперечного сечения; h — безразмерная полутолщина оболочки ($h\ll1$); m — масса, приходящаяся на единицу площади срединной поверхности; ω — частота колебаний; r — некоторое характерное для оболочки число, имеющее размерность длины (все безразмерные величины, фигурирующие в задаче, отнесены к r); u, v, w — соответственно продольное, крутильное и поперечное перемещения; E — модуль Юнга; σ — коэффициент Пуассона.

Для краткости будем в дальнейшем ξ, η, ζ называть перемещениями. При выводе уравнений (1.1) считаем, что оболочка совершает гармонические колебания и множитель $\sin\omega t$ при искомых величинах отброшен.

Из [2], например, следует, что переменность кривизны цилиндрической оболочки существенно сказывается на интегралах квазипоперечных колебаний. Учитывая это, остановимся на построении именно таких интегралов.

Приближенные уравнения для интегралов квазипоперечных колебаний в предположении, что изменяемость напряженно-деформированного состояния велика, получаются из динамического аналога уравнений для напряженных состояний с большим показателем изменяемости [1] и после отбрасывания множителя $\sin\omega t$ при искомых величинах имеют вид

$$\frac{1}{r^2R}\frac{\partial^2 C}{\partial\alpha^2}-\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}\Delta\Delta\zeta+\lambda\zeta=0$$
$$\frac{r^2}{R}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha^2}+\Delta\Delta C=0,\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} \tag{1.2}$$

Тангенциальные усилия T_1, T_2, S определяются через функции усилий C следующими формулами:

$$T_1=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 C}{\partial\beta^2},\quad T_2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 C}{\partial\alpha^2},\quad S=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 C}{\partial\alpha\partial\beta} \tag{1.3}$$

От системы разрешающих уравнений (1.2) легко перейти к одному дифференциальному уравнению относительно функции C:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^4 C}{\partial\alpha^4}+\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}\Delta\Delta R\Delta\Delta C-\lambda R\Delta\Delta C=0 \tag{1.4}$$

Если искать решение уравнения (1.4) в виде

$$C=C_*(\beta)\sin k\alpha\quad (k=\pi/l) \tag{1.5}$$

то, подставив (1.5) в (1.4), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции C_*:

$$\frac{k^4}{R^2}C_*+\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}\Delta_*\Delta_*R\Delta_*\Delta_*C_*-\lambda R\Delta_*\Delta_*C_*=0,\quad \Delta_*=\frac{d^2}{d\beta^2}-k^2 \tag{1.6}$$

Отметим, что решение вида (1.5) позволяет удовлетворить условиям свободного опирания по криволинейным краям $\alpha=0$ и $\alpha=l$:

$$\eta=\zeta=T_1=G_1=0 \tag{1.7}$$

Решения ξ, η, ζ системы уравнений (1.1), удовлетворяющие условиям (1.7), можно искать в виде

$$\xi=\xi_*(\beta)\cos k\alpha,\quad \eta=\eta_*(\beta)\sin k\alpha,\quad \zeta=\zeta_*(\beta)\sin k\alpha \tag{1.8}$$

Функция C_* связана с величинами ξ_*, η_*, ζ_* так:

$$\xi_*=-\frac{1}{kr}\frac{d^2C_*}{d\beta^2}-\frac{\sigma k}{r}C_*,\quad \eta_*=\frac{1}{rk^2}\frac{d^3C_*}{d\beta^3}+\frac{2+3\sigma}{r}\frac{dC_*}{d\beta}$$
$$\zeta_*=\frac{R}{rk^2}\left(\frac{d^2}{d\beta^2}-k^2\right)^2C_* \tag{1.9}$$

Будем искать решение уравнения (1.6) методом экспоненциального представления [1]:

$$C_*=(c_0+\varepsilon c_1+\varepsilon^2c_2+\ldots)\exp(f/\varepsilon),\quad \lambda=\varepsilon^4\lambda_0+\varepsilon^5\lambda_1+\ldots,\quad \varepsilon=h^a,\quad a>0 \tag{1.10}$$

где $f=f(\beta)$ — функция изменяемости, а $C_i=C_i(\beta)$ — коэффициенты интенсивности.

В аналогичной форме представим величины ξ_*, η_*, ζ_* из (1.1), (1.8). Подбирая порядки коэффициентов интенсивности и величину a из (1.10), на основании качественного анализа работы [3] можно убедиться, что в обоих случаях как функция изменяемости, так и первые коэффициенты совпадут с теми функциями, которые получаются из формул (1.9), (1.10). Таким образом, уравнение (1.6) позволяет правильно определить не только функцию изменяемости, но и первые коэффициенты интенсивности.

2. Проведем качественный анализ уравнения (1.6) в предположении

$$k \sim h^{-\theta}, \quad \frac{d}{d\beta} \sim h^{-q}, \quad C^* \sim h^{\circ}, \quad \lambda \sim h^{\varkappa}, \quad q \geqslant \theta > 0 \tag{2.1}$$

Отметим, что случай $\theta=0$ был подробно разобран в [2].

В зависимости от изменяемостей в направлениях образующей и направляющей приближенные уравнения для интегралов квазипоперечных колебаний из (1.6) упрощаются.

Рассмотрим случай $\theta<{}^1/_2$. При $q=\theta$ и $\varkappa=0$ в первом приближении интегралы квазипоперечных колебаний будут описываться уравнением

$$\lambda \left(\frac{d^2}{d\beta^2} - k^2\right)^2 C_* - \frac{k^4}{R^2} C_* = 0 \tag{2.2}$$

При $\theta<q<{}^1/_4+\theta/2$ и $\varkappa=4q-4\theta$ приближенные уравнения оказываются следующими:

$$\lambda \frac{d^4 C_*}{d\beta^4} - \frac{k^4}{R^2} C_* = 0 \tag{2.3}$$

Как уравнение (2.2), так и уравнение (2.3) позволяют определить основные интегралы квазипоперечных колебаний [3].

Значениям $q={}^1/_4+\theta/2$ и $\varkappa=1-2\theta$ соответствуют интегралы квазипоперечных колебаний с промежуточной изменяемостью [2], которые описываются следующим приближенным уравнением, позволяющим правильно определить как функцию изменяемости, так и первый коэффициент интенсивности:

$$\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)} \left[\frac{d^8}{d\beta^8} + 4 \frac{R'}{R} \frac{d^7}{d\beta^7}\right] C_* - \lambda \frac{d^4 C_*}{d\beta^4} + \frac{k^4}{R^2} C_* = 0$$

$$R' = dR/d\beta \tag{2.4}$$

Для значений $q>1/4+\theta/2$ и $\varkappa=2-4q$ имеют место интегралы квазипоперечных колебаний с большой изменяемостью, которые описываются уравнением

$$\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)} \left[\frac{d^8}{d\beta^8} + 4 \frac{R'}{R} \frac{d^7}{d\beta^7}\right] C_* - \lambda \frac{d^4 C_*}{d\beta^4} = 0 \tag{2.5}$$

Рассмотрим далее случай $\theta={}^1/_2$. При $q={}^1/_2$ и $\varkappa=0$ имеют место интегралы квазипоперечных колебаний с промежуточной изменяемостью, описываемые уравнением (1.6); значениям $q>{}^1/_2$ и $\varkappa=2-4q$ соответствуют интегралы квазипоперечных колебаний с большой изменяемостью, описываемые уравнением (2.5).

Наконец, в случае $\theta>{}^1/_2$ и $q=\theta$, $\varkappa=2-4q$ имеют место интегралы квазипоперечных колебаний с большой изменяемостью, описываемые уравнением

$$\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)} \left(\frac{d^2}{d\beta^2} - k^2\right)^2 R \left(\frac{d^2}{d\beta^2} - k^2\right)^2 C_* - \lambda R \left(\frac{d^2}{d\beta^2} - k^2\right)^2 C_* = 0 \tag{2.6}$$

а для $q>\theta$ и $\varkappa=2-4q$ имеют место интегралы квазипоперечных колебаний с большой изменяемостью, удовлетворяющие уравнению (2.5).

Уравнения (2.2), (2.3), (2.5) и (2.6) являются приближенными уравнениями, получающимися из уравнения (1.6) при приведенных выше условиях на q, θ и λ и позволяющими точно определить функцию изменяемости. Эти уравнения позволяют также определить точно и первый коэффициент интенсивности, если усилить соответствующие неравенства относительно q, θ. Так, неравенство для уравнения (2.2) примет вид $\theta=q<^2/_5$, для уравнения (2.3) неравенство примет вид $^4/_3\theta<q<^2/_5$. Для уравнений (2.5) и (2.6) имеет место соотношение $q>^2/_3$. При построении решений соответствующих уравнений будем считать, что приведенные выше усиленные неравенства выполнены.

3. Приступим к интегрированию уравнений (1.6), (2.2) и (2.6). Решение уравнения (2.2) будем искать в виде

$$C_*=(C_0+\varepsilon C_1+\ldots)\exp(f/\varepsilon),\qquad \lambda=\lambda_0+\varepsilon^2\lambda_1+\ldots$$
$$k=k_0\varepsilon^{-1},\quad \varepsilon=(h/\sqrt{3(1-\sigma^2)})^q,\quad q<{}^1/_2 \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в уравнение (2.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε нулю, получаем набор рекуррентных линейных алгебраических уравнений для C_i ($i=1, 2,\ldots$) и f. Уравнение для f имеет вид

$$\lambda(f'^2-k_0^2)^2-k_0^4/R^2=0 \tag{3.2}$$

Из (3.2) находим выражение для функции изменяемости

$$f_{1,2}=\pm k_0\int\limits_0^\beta\left(1+\frac{1}{R\sqrt{\lambda_0}}\right)^{1/2}d\beta,\quad f_{3,4}=\pm k_0\int\limits_0^\beta\left(1-\frac{1}{R\sqrt{\lambda_0}}\right)^{1/2}d\beta \tag{3.3}$$

Для C_i получаются линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение для C_0 является однородным и имеет вид

$$2f'(f'^2-k_0^2)C_0'+f''(3f'^2-k_0^2)C_0=0 \tag{3.4}$$

Из полученного уравнения следует

$$C_{0j}=A_{0j}(f_j')^{-1/2}(f_j'^2-k_0^2)^{-1/2}\quad (j=1,2,3,4) \tag{3.5}$$

Уравнения для C_i ($i\geqslant1$) — неоднородные, с теми же левыми частями, что и уравнение (3.4); в правые части входят λ_i линейным образом и уже известные при вычислении C_i функции β.

Из этих уравнений для C_i получаем

$$C_{ij}=A_{ij}(f_j')^{-1/2}(f'^2-k_0^2)^{-1/2}+\lambda_iF_i(\beta)+\Phi_i(\beta)\quad (j=1,2,3,4) \tag{3.6}$$

где функции $F_i(\beta)$ и $\Phi_i(\beta)$ уже известны. Для каждого из четырех значений f формулы (3.5) дают четыре линейно-независимых решения (3.1) уравнения (2.2), соответствующие основным интегралам.

Построим еще четыре решения, которые имеют тот же асимптотический порядок λ, что и основные интегралы, но большую изменяемость по β. Эти четыре решения называются дополнительными интегралами, соответствующими основным [3].

Дополнительные интегралы будем искать из уравнения (1.6) в виде

$$C_*=(c_0+\varepsilon^bc_1+\ldots)\exp(f/\varepsilon^b),\qquad \lambda=\lambda_0+\varepsilon^2\lambda_1+\varepsilon^3\lambda_2+\ldots$$
$$\varepsilon=(h/\sqrt{3(1-\sigma^2)})^q,\quad b={}^1/_2q,\quad k=k_0\varepsilon^{-1} \tag{3.7}$$

Тогда придем к следующему уравнению для f:

$$f_{1,2}=\pm\beta\lambda_0^{1/4},\qquad f_{3,4}=\pm i\beta\lambda_0^{1/4} \tag{3.9}$$

из которого следует

$$f_{1,2}=\pm\beta\lambda_0^{1/4},\qquad f_{3,44}\pm i\beta\lambda_0^{1/4} \tag{3.9}$$

Для C_0 получим

$$C_0'(8f'^7-4\lambda_0f'^3)+C_0\left(28f'^6f''+4\frac{R'}{R}f'^7-6\lambda_0f'^2f''\right)=0 \tag{3.10}$$

Из (3.10) находим

$$C_{0j}=A_{0j}(f_j')^{-1/2}R^{-1} \qquad (j=5,6,7,8) \tag{3.11}$$

Воспользуемся гипотезой: оболочка может колебаться лишь тогда, когда среди интегралов уравнений колебаний, из которых составляются формы собственных колебаний, имеются осциллирующие [1].

Если интегралы уравнений колебаний строятся методом экспоненциального представления, то указанная гипотеза эквивалентна тому, что среди восьми значений функции изменяемости f, соответствующих восьми линейно-независимым решениям уравнения (1.6), должны иметься чисто мнимые значения хотя бы на части отрезка изменения параметра β (для того, чтобы из этих линейно-независимых решений могли быть составлены колебания). Упомянутая гипотеза подтверждена аналитически и численно, например, в [2].

Из формул (3.3) и (3.9) следует, что в зависимости от значения подынтегрального выражения функция изменяемости имеет два или четыре мнимых значения, остальные значения являются действительными.

Пусть $\lambda_0<1/R^2$ на $[0, \beta_0]$. В этом случае имеется пара мнимых и пара действительных корней уравнения для функции изменяемости для основных интегралов и два мнимых корня f для дополнительных интегралов.

При $\lambda_0>1/R^2$ на $[0, \beta_0]$ для основных интегралов не имеется мнимых значений функции изменяемости.

Пусть λ_0 такое, что существует точка $\beta_*\in[0, \beta_0]$, в которой $\lambda_0=1/R^2$, и положим для определенности, что $\lambda_0<1/R^2$ на $[0, \beta_*]$ и $\lambda_0>1/R^2$ на $[\beta_*, \beta_0]$. Точка β_* является простой точкой поворота [4]. В ней функция изменяемости имеет два нулевых значения, а коэффициенты интенсивности имеют особенность. Слева от точки поворота для основных и дополнительных интегралов имеется четыре мнимых значения функции изменяемости. Справа есть только два мнимых корня функции изменяемости для дополнительных интегралов.

Интегрирование уравнения (1.6) также будем проводить методом экспоненциального представления. Решение ищем в виде

$$C_*=(c_0+\varepsilon c_1+\ldots)\exp(f/\varepsilon), \qquad \lambda=\lambda_0+\varepsilon^2\lambda_1+\ldots$$
$$k=k_0\varepsilon^{-1}, \qquad \varepsilon=(h/\sqrt{3(1-\sigma^2)})^{1/2} \tag{3.12}$$

Подставив решение (3.12) в уравнение (1.6) и приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим набор уравнений для определения f и C_i $(i=1, 2, \ldots)$.

Уравнение для f' имеет вид

$$(f'^2-k_0^2)^4-\lambda_0(f'^2-k_0^2)^2+\frac{k_0^4}{R^2}=0 \tag{3.13}$$

из которого следует

$$f_{1,2}'=\pm(k_0^2+\sqrt{\lambda_0/2+\sqrt{D}})^{1/2}, \quad f_{3,4}'=\pm(k_0^2+\sqrt{\lambda_0/2-\sqrt{D}})^{1/2}, \quad \rho=k_0/\sqrt{R}$$
$$f_{5,6}'=\pm(k_0^2-\sqrt{\lambda_0/2+\sqrt{D}})^{1/2}, \quad f_{7,8}'=\pm(k_0^2-\sqrt{\lambda_0/2-\sqrt{D}})^{1/2}, \quad D=\lambda_0^2/4-\rho^4 \tag{3.14}$$

Функцию C_0 находим из уравнения

$$C_0'[8f'(f'^2-k_0^2)^3-4\lambda_0 f'(f'^2-k_0^2)]+\frac{1}{2}C_0\Big[8f''(7f'^6-15f'^4k_0^2+9f'^2k_0^4-k_0^6)-$$
$$-4\lambda_0 f''(3f'^2-k_0^2)+8\frac{R'}{R}f'(f'^2-k_0^2)^3\Big]=0 \tag{3.15}$$

В результате будем иметь

$$C_{0j}=A_{0j}(f_j'^2-k_0^2)^{-3/2}(f_j')^{-1/2}D^{-1/4}R^{-1} \qquad (j=1, 2, \ldots, 8) \tag{3.16}$$

---

[1] *Товстик П. Е.* Свободные колебания и устойчивость оболочек вращения. Докт. дисс., ЛГУ, 1968.

Исходя из приведенной выше гипотезы, можно считать, что свойства решений существенно зависят от знака подкоренных выражений формул (3.14).

Пусть $k_0^2>\rho$ на $[0, \beta_0]$. Рассмотрим различные промежутки изменения параметра λ_0 на $[0, \beta_0]$. При $\lambda_0<2\rho^2$ уравнение (3.13) имеет все полные комплексные корни. Таким образом, низшая частота собственных колебаний не достигнута.

При $2\rho^2<\lambda_0<k_0^4+1/R^2$ все восемь корней уравнения (3.13) – действительные, и низшая частота колебаний, как и в предыдущем случае, не достигнута.

При $\lambda_0>k_0^4+1/R^2$ уравнение (3.13) имеет шесть действительных и два мнимых корня; из гипотезы следует, что колебания на $[0, \beta_0]$ возможны.

Пусть имеется λ_0, для которого на $[0, \beta_0]$ существуют точки β_* и β_{**}, такие, что при $\beta=\beta_*$ параметр $\lambda_0=2\rho^2$, а при $\beta=\beta_{**}$ параметр $\lambda_0=k_0^4+1/R^2$. Положим для определенности, что $\lambda_0<2\rho^2$ на $[0, \beta_*]$, $2\rho^2<\lambda_0<k_0^4+1/R^2$ на $[\beta_*, \beta_{**}]$ и $\lambda_0>k_0^4+1/R^2$ на $[\beta_{**}, \beta_0]$. Точки $\beta=\beta_*$ и $\beta=\beta_{**}$ являются точками поворота, т. е. уравнение (3.13) в этих точках имеет кратные корни. Так, при $\beta=\beta_*$ получим

$$f_{1,3}'=\sqrt{k_0^2+\rho},\quad f_{2,4}'=-\sqrt{k_0^2+\rho},\quad f_{5,7}'=\sqrt{k_0^2-\rho},\quad f_{6,8}'=-\sqrt{k_0^2-\rho} \tag{3.17}$$

а при $\beta=\beta_{**}$ корни уравнения (3.13) такие:

$$f_{1,2}'=\pm k_0\sqrt{2},\quad f_{3,4}'=\pm\sqrt{k_0^2+1/R},\quad f_{5,6}'=0,\quad f_{7,8}'=\pm\sqrt{k_0^2-1/R} \tag{3.18}$$

Точка $\beta=\beta_{**}$ является кратной точкой поворота, а $\beta=\beta_*$ – простая точка поворота [4, 5]. Согласно гипотезе, на $[0, \beta_*]$ и $[\beta_*, \beta_{**}]$ оболочка не будет колебаться, а участок $[\beta_{**}, \beta_0]$ может быть охвачен колебаниями. Точка $\beta=\beta_*$ особого интереса не представляет, так как и справа и слева от этой точки оболочка не колеблется.

Пусть $k_0^2<\rho$ на $[0, \beta_0]$. При $\lambda_0<2\rho^r$ все корни уравнения (3.13) являются полными комплексными; колебаний на $[0, \beta_0]$ нет.

При $2\rho^2<\lambda_0<k_0^4+1/R^2$ уравнение (3.13) имеет четыре действительных и четыре мнимых корня. Значит, на $[0, \beta_0]$ могут реализоваться колебания.

При $\lambda_0>k_0^4+1/R^2$ имеется шесть действительных и два мнимых корня уравнения для f, т. е. колебания возможны.

Пусть имеется λ_0, для которого на $[0, \beta_0]$ существуют точки β_* и β_{**}, такие, что при $\beta=\beta_*$ параметр $\lambda_0=2\rho^2$, а при $\beta=\beta_{**}$ параметр $\lambda_0=k_0^4+1/R^2$. Положим для определенности, что на $[0, \beta_*]$ величина $\lambda_0<2\rho^2$, на $[\beta_*, \beta_{**}]$ имеет место неравенство $2\rho^2<\lambda_0<k_0^4+1/R^2$, а на $[\beta_{**}, \beta_0]$ параметр $\lambda_0>k_0^4+1/R^2$. При переходе через точку β_* полные комплексные корни f переходят в мнимые, т. е. слева колебаний нет, а справа оболочка может колебаться. При переходе через точку β_{**} четыре мнимых корня переходят в два мнимых и два действительных.

Предположим, что на $[0, \beta_0]$ существует точка $\beta=\beta_1$, в которой $k_0^2=\rho$. Будем для определенности считать, что $k_0^2>\rho$ на $[0, \beta_1]$ и $k_0^2<\rho$ на $[\beta_1, \beta_0]$.

Пусть $\lambda_0<2\rho^2$ на $[0, \beta_0]$. Тогда все восемь корней комплексные. Низшая частота собственных колебаний еще не достигнута. Допустим, что на $[0, \beta_1]$ существует точка $\beta=\beta_*$, в которой $\lambda_0=2\rho^2$. Тогда на $[0, \beta_*]$ имеет место неравенство $2\rho^2<\lambda_0<k_0^4+1/R^2$, а на $[\beta_*, \beta_0]$ параметр $\lambda_0<2\rho^2$. На участке $[0, \beta_*]$ восемь корней действительные, а на $[\beta_*, \beta_0]$ полные комплексные. Справа и слева от точки β_* колебаний нет. Точка $\beta=\beta_*$ является точкой поворота.

Пусть λ такое, что на $[0, \beta_*]$ имеется точка $\beta=\beta_{**}$, в которой $\lambda_0=k_0^4+1/R^2$. Тогда на $[0, \beta_{**}]$ параметр $\lambda_0>k_0^4+1/R^2$, на $[\beta_{**}, \beta_*]$ выполняется неравенство $2\rho^2<\lambda_0<k_0^4+1/R^2$, а на $(\beta_*, \beta_0]$ параметр $\lambda_0<2\rho^r$. Мнимые корни f на $[0, \beta_{**}]$ переходят в вещественные корни на $[\beta_{**}, \beta_*]$, а те – в полные комплексные на $[\beta_*, \beta_0]$. Точка β_{**} является простой точкой поворота.

В случае, когда $\beta_*=\beta_1$, $\beta_{**}=\beta_*=\beta_1$. Получаем, что $\lambda_0=2k_0^4$ при $\beta=\beta_1$, причем на участке $[0, \beta_1]\lambda_0>2k_0^4$ и этот участок может быть охвачен колебаниями, а участок $[\beta_1, \beta_0]$ является областью затухания колебаний. Точка $\beta=\beta_1$ будет точкой поворота. В ней четыре корня уравнения (3.13) обращаются в нуль.

Пусть λ_0 такое, что $\beta_*\in[\beta_1, \beta_0]$; тогда $\beta_{**}\in[\beta_1, \beta_*]$. В этом случае на $[0, \beta_{**}]$ параметр $\lambda_0>k_0^4+1/R^2$, на $[\beta_{**}, \beta_*]$ выполняется неравенство $2\rho^2<\lambda_0<k_0^4+1/R^2$, а на $[\beta_*, \beta_0]$ параметр $\lambda_0<2\rho^2$. На участке $[0, \beta_{**}]$ возможны колебания (имеется два мнимых корня), на $[\beta_{**}, \beta_*]$ также возможны колебания (есть четыре мнимых корня), на $[\beta_*, \beta_0]$ колебаний нет – все корни комплексные.

Пусть на $[\beta_1, \beta_0]$ существует точка β_{**}, такая, что на $[0, \beta_{**}]$ параметр $\lambda_0>k_0^4+1/R^2$, а на $[\beta_{**}, \beta_0]$ имеет место неравенство $2\rho^2<\lambda_0<k_0^4+1/R^2$. Вся оболочка может колебаться. На $[0, \beta_{**}]$ имеется два мнимых корня, а на $[\beta_{**}, \beta_0]$ – четыре мнимых корня.

При $\lambda_0>k_0^4+1/R^2$ на $[0, \beta_0]$ вся оболочка может быть охвачена колебаниями.

Решение уравнения (2.6) будем искать в виде

$$C_*=(C_0+\varepsilon C_1+\ldots)\exp(f/\varepsilon),\quad \lambda=\lambda_0\varepsilon^{2/q-4}+\lambda_1\varepsilon^{2/q-2}+\ldots$$
$$k=k_0\varepsilon^{-1},\quad \varepsilon(h/\sqrt{3(1-\sigma^2)})^q,\quad q>{}^1/_2\tag{3.19}$$

После подстановки решения (3.19) в уравнение (2.6) и приравнивая нулю коэффициентов при одинаковых степенях ε получим уравнения для определения функции изменяемости f и коэффициентов интенсивности C_i. Уравнение для f имеет вид

$$(f'^2-k_0^2)-\lambda_0=0\tag{3.20}$$

из которого следует

$$f'_{1,2}=\pm(k_0^2+\sqrt{\lambda})^{1/2},\quad f'_{3,4}=\pm(k_0^2-\sqrt{\lambda_0})^{1/2}\tag{3.21}$$

Уравнение для C_0 — совпадает с уравнением (3.15). Интегрируя его с учетом уравнения (3.20), получим

$$C_{0j}=A_{0j}(f_j')^{-1/2}R^{-1}\quad (j=1,2,3,4)\tag{3.22}$$

где A_{0j} — произвольные постоянные.

Интегрируя уравнения для C_i $(i\geqslant 1)$, будем иметь

$$C_{ij}=A_{ij}(f_j')^{-1/2}R^{-1}+\lambda_iF_i(\beta)+\Phi_i(\beta)\tag{3.23}$$

где $F_i(\beta)$ и $\Phi_i(\beta)$ — уже известные при вычислении C_ν $(\nu<j)$ функции β, а A_{ij} — произвольные постоянные.

Для каждого из четырех значений f из формулы (3.21) получаем четыре линейно-независимых решения (3.19) уравнения (2.6). Еще четыре решения для интегралов квазипоперечных колебаний с большой изменяемостью, следуя [3], находятся из системы неоднородных уравнений статической плоской теории упругости, в которых величину ζ необходимо рассматривать как известную и получаемую из уравнений (1.8), (1.9), (3.19) — (3.23). Интегралы уравнений (2.3), (2.5) можно легко получить из пар формул (3.2), (3.5), (3.13), (3.16) и (3.20), (3.22), сделав в них замену выражения $(f'^2-k_0^2)$ на f'^2.

4. Перейдем к построению решений в окрестности точки поворота. Для рассматриваемых типов колебаний имеют место как простая, так и кратная точка поворота [4, 5]. Простая точка поворота имеет место для решения уравнений (1.6) и (2.2). Кратная точка поворота имеет место для решения уравнений (1.6) и (2.4).

Построение решения с простой точкой поворота на отрезке интегрирования продемонстрируем на примере уравнения (1.6), если имеется точка, в которой $k_0^2>\rho$ и $\lambda_0=k^4+1/R^2$ и для которой верны уравнения (3.18). При этом применим разработанную в [4] методику для построения решений при наличии простой точки поворота. Для этого сведем уравнение (1.6) к системе нормального вида, сделав следующую замену искомых функций:

$$G_*=x_1,\quad \varepsilon\frac{dx_1}{d\beta}=x_2,\quad \varepsilon\frac{dx_2}{d\beta}=x_3,\ldots,\quad \varepsilon\frac{dx_7}{d\beta}=x_8,\quad \varepsilon=\left(\frac{h}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}\right)^{1/4(1+2\theta)}\tag{4.1}$$

Тогда уравнение (1.6) примет вид

$$\varepsilon\frac{dx_i}{d\beta}=x_{i+1}\qquad (i=1,2,\ldots 7) \tag{4.2}$$

$$\varepsilon\frac{dx_8}{d\beta}=x_1\left(\lambda_0k_0^4-\frac{k_0^4}{R^2}-1\right)+x_24\varepsilon\frac{R'}{R}k_0^6+x_3(4k_0^6-2\lambda_0k_0^2)-$$
$$-x_412\varepsilon\frac{R'}{R}k_0^4+x_5(\lambda_0-6k_0^4)+x_612\varepsilon\frac{R'}{R}k_0^2+x_74k_0^2-x_84\varepsilon\frac{R'}{R}$$

В правой части этой системы удержаны члены, содержащие ε в степени не выше первой, что соответствует точности, с какой было получено уравнение (1.6).

Задача состоит в сведении уравнений (4.2) при помощи линейного невырожденного преобразования к системе дифференциальных уравнений второго порядка, приводящейся к решению уравнения Эри и шести системам первого порядка. Такое преобразование дается матричной формулой

$$X=C(\beta,\varepsilon)Y,\quad Y=K(\beta,\varepsilon)Z,\quad C=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^iC^{(i)}(\beta),\quad K=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^iK^{(i)}(\beta) \tag{4.3}$$

$$X=\begin{Vmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_8\end{Vmatrix},\quad Y=\begin{Vmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_8\end{Vmatrix},\quad Z=\begin{Vmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_8\end{Vmatrix}\quad C^{(0)}(\beta)=\begin{Vmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ q_1 & q_2 & \ldots & q_8\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ q_1^7 & q_2^7 & \ldots & q_8^7\end{Vmatrix},$$

$$K^{(0)}(\beta)=\begin{Vmatrix}1/2 & 1/2\,q_1 & & & \\ 1/2 & -1/2\,q_1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & 1\end{Vmatrix}$$

После преобразования, определяемого матрицей $C(\beta,\varepsilon)$, система уравнений (4.2) сводится к следующей:

$$\varepsilon\frac{dY_k}{d\beta}=b_k(\beta,\varepsilon)Y_k,\quad b_k=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^ib_k^i,\quad b_k^{(0)}=f_k'(\beta)\equiv q_k\qquad (k=1,2,\ldots 8) \tag{4.4}$$

Для нахождения b_k' сравниваем решения (4.4), (4.5)

$$y_k(\beta)=C_k\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\beta[q_k(t)+\varepsilon b_k^1(t)]dt\right\}(1+O(\varepsilon)) \tag{4.5}$$

с решениями, определяемыми по формулам (3.12), (3.16), (4.2) (C_k — произвольные постоянные). Тогда получим $b_k^{(1)}=[\ln(F_{q_k}{}^1)^{-1/2}]'$. Здесь через $F=F(q)$ обозначена левая часть уравнения (3.13). Нетрудно видеть, что главная часть преобразования $T(\beta)=C^{(0)}(\beta)\;K^{(0)}(\beta)$ является невырожденной. Считаем, что в точке поворота $\beta=\beta_*$ обращаются в нуль корни q_1 и q_2 уравнения (3.13), а также, что $[\rho^4(\beta_*)]'\neq0$. С точностью до величин порядка ε^2 искомая система второго порядка для функций z_1 и z_2 имеет вид

$$\varepsilon\frac{dz_1}{d\beta}=z_2,\quad \varepsilon\frac{dz_2}{d\beta}=q_1^2z_1+\varepsilon b(\beta)z_2,\quad b(\beta)=2b_1^{(1)}(\beta)-\frac{1}{q_1}\frac{dq_1}{d\beta} \tag{4.6}$$

От третьего уравнения (4.6) легко перейти к одному уравнению относительно z:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 z_1}{d\beta^2} - \varepsilon^2 b(\beta) \frac{dz_1}{d\beta} - q_1{}^2 z_1 = 0 \tag{4.7}$$

Решения уравнения (4.7) представим в форме

$$z_1{}^{(i)} = \alpha(\beta)\zeta^{(i)}[\eta(\beta)] + \varepsilon\gamma(\beta)\frac{d\zeta^{(i)}}{d\eta} \quad (i=1,2) \tag{4.8}$$

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{(i)}\alpha_i, \qquad \gamma = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \gamma_i$$

$$\eta(\beta) = \frac{3}{2\varepsilon}\int_{\beta_*}^{\beta} [(-q_1{}^2)^{-1/2} dt]^{2/3}, \quad \alpha_0 = \left[\frac{1}{q_1}\frac{d\eta}{d\beta}\frac{dF}{dq_1}(q_1{}^2 - k_0{}^2)^2\right]^{-1/2}$$

Здесь функции $\zeta^{(i)}(\eta)$ являются решениями уравнения Эри $d^2\zeta/d\eta^2 + \eta\zeta = 0$ и имеют вид $\zeta^{(1)}(\eta) = A_i(-\eta)$, $\zeta^{(2)}(\eta) = B_i(-\eta)$, где $A_i(z)$ и $B_i(z)$ — функции Эри. Учитывая асимптотические формулы для функции Эри при $|z| \to \infty$, из формул (4.3), (4.5), (4.8) получим асимптотические выражения для компонент $x_1^{(1)}$ и $x_1^{(2)}$ векторов решений системы уравнения (4.2) слева и справа от точки поворота

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{4\pi}}\, y_1 \leftarrow x_1{}^{(1)} \rightarrow \sqrt{\frac{\varepsilon}{4\pi}}\,(y_1 + y_2) \tag{4.9}$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}}\left(\frac{q_1+q_2}{4} y_1 + \frac{q_1-q_2}{2q_1} y_2\right) \leftarrow x_1{}^{(2)} \rightarrow \sqrt{\frac{\varepsilon}{4\pi}}\left[y_1\left(\frac{q_1+q_2}{2} + \frac{q_2-q_1}{2q_1}\right) + \right.$$

$$\left. + y_2\left(\frac{q_1+q_2}{2} + \frac{q_1-q_2}{2q_1}\right)\right]$$

Асимптотические формулы для $x_k{}^1$ и $x_k{}^2$ $(k=2, \ldots, 8)$ следуют из формул (4.2), (4.5) и (4.9). Так как оставшиеся шесть линейно-независимых решений определяются формулами (3.12), (3.16), (4.1), имеем полный набор интегралов для решения краевых задач в рассматриваемом случае.

Авторы благодарят П. Е. Товстика за обсуждение полученных результатов.

Поступила 20 II 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.
2. *Бергман Р. М.* Исследование свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек. ПММ, 1973, т. 37, вып. 6.
3. *Гольденвейзер А. Л.* Качественный анализ свободных колебаний упругой тонкой оболочки. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
4. *Товстик П. Е.* Интегралы системы уравнений неосесимметричных колебаний тонкой оболочки вращения. Исследования по упругости и пластичности. Изд-во ЛГУ, 1966, № 5.
5. *Товстик П. Е.* Интегралы уравнений колебаний оболочек вращения с большим числом волн по параллели при наличии кратной точки поворота. В сб.: Исследования по упругости и пластичности, вып. 10. Изд-во ЛГУ, 1973.