

**НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ
ОБОЛОЧЕК ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ,
НАГРУЖЕННЫХ РАВНОМЕРНЫМ ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ**

Л. В. АНДРЕЕВ, И. В. АНДРИАНОВ, В. М. КУЧЕРЕНКО,
А. Г. ЛЕБЕДЕВ, Н. И. ОБОДАН

(Днепропетровск)

Известные в литературе расчетные исследования по устойчивости цилиндрических оболочек эллиптического поперечного сечения под действием внешнего давления проводились, как правило, в предположении о линейности безмоментного [1] или моментного [2] докритического состояния. Полученные таким путем результаты пригодны лишь для поперечных сечений, слабо отличающихся от окружности. Поведение же сильно эллиптических оболочек, практически неизученное (авторам известны лишь единичные расчеты, приведенные в [3]), существенно нелинейно.

1. Нелинейное деформирование цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения может быть описано уравнениями состояния с преимущественной изменяемостью в кольцевом направлении [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} &= 12(1-\nu^2) \sqrt{\frac{h}{R_0}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \theta} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right) + \frac{12(1-\nu^2)}{R(\theta)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{12(1-\nu^2) R_0^{3/2} Q}{L \sqrt{h}} \\ \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \theta^4} &= \sqrt{\frac{h}{R_0}} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \theta} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] - \frac{1}{R(\theta)} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{R_0}{h}}, \quad \xi = \frac{x}{R_0}, \quad \theta = \beta \frac{y}{R_0}, \quad w = \frac{w_1}{h}, \quad \Phi = \frac{\Phi_1}{E h^2}$$

$$R(\theta) = R_0 \frac{A^2}{B} \left[1 - k^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{\beta} \right) \right]^{3/2},$$

$$k^2 = 1 - \left(\frac{B}{A} \right)^2, \quad R_0 = \frac{AE(\pi/2, k)}{2\pi}, \quad Q = \frac{q R_0^{3/2} L}{E h^{5/2}}$$

где w_1 — нормальное перемещение; Φ_1 — функция напряжений; E , ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона; A , B — полуоси эллипса ($A \geq B$); $E(\pi/2, k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода; q — интенсивность внешнего давления; h — толщина оболочки; x , y — продольная и кольцевая координаты.

Для системы (1.1) должны быть заданы четыре граничных условия на краях $\xi = \text{const}$. В данной работе исследуется случай шарнирного

опирания (L — длина оболочки):

$$w=0, \quad \Phi=0 \quad \text{при} \quad \xi=0, \quad \xi=l=L/R_0$$

Поскольку рассматриваемое напряженно-деформированное состояние плавно изменяется по координате ξ , искомые функции w и Φ можно аппроксимировать следующим образом:

$$w=W(\theta)\sin(\pi\xi/l), \quad \Phi=\Psi(\theta)\sin(\pi\xi/l) \quad (1.2)$$

Применяя к системе (1.1) процедуру метода Канторовича [5], получаем систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^4 W}{d\theta^4} = & -\frac{96\pi}{3l^2} (1-\nu^2) \sqrt{\frac{h}{R_0}} \left[W \frac{d^2 \Psi}{d\theta^2} + \frac{dW}{d\theta} \frac{d\Psi}{d\theta} + \Psi \frac{d^2 W}{d\theta^2} \right] - \\ & - \frac{12\pi^2 (1-\nu^2)}{l^2 R(\theta)} \Psi + \frac{48}{\pi l} (1-\nu^2) \sqrt{\frac{R_0}{h}} Q \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\frac{d^4 \Psi}{d\theta^4} = \frac{4\pi}{3l^2} \sqrt{\frac{h}{R_0}} \left[2W \frac{d^2 W}{d\theta^2} + \left(\frac{dW}{d\theta} \right)^2 \right] + \frac{\pi^2 W}{l^2 R(\theta)}$$

Граничными условиями для функций W, Ψ служат условия периодичности по θ :

$$F_1 = W(0) - W(2\pi\beta) = 0, \dots, \quad F_8 = \frac{d^3 \Psi(0)}{d\theta^3} - \frac{d^3 \Psi(2\pi\beta)}{d\theta^3} = 0$$

либо, при наличии плоскости симметрии деформирования, условия симметрии

$$\begin{aligned} F_{1,2} = \frac{dW(\pm\pi\beta/2)}{d\theta} = 0, \quad F_{3,4} = \frac{d^3 W(\pm\pi\beta/2)}{d\theta^3} = 0, \\ F_{5,6} = \frac{d\Psi(\pm\pi\beta/2)}{d\theta} = 0, \quad F_{7,8} = \frac{d^3 \Psi(\pm\pi\beta/2)}{d\theta^3} = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Система уравнений (1.3) в совокупности с граничными условиями (1.4) образует нелинейную одномерную краевую задачу, которая решается численно путем перехода к задаче Коши. Начальный вектор

$$S = \{s_1, \dots, s_8\} = \left\{ W(\theta_0), \dots, \frac{d^3 \Psi(\theta_0)}{d\theta^3} \right\} \quad (1.5)$$

для которого решение системы (1.3) удовлетворяет граничным условиям (1.4), отыскивается по методу Ньютона. Положение особых точек и их характер (предельная точка, точка бифуркации) определяются по обращению в нуль миноров восьмого порядка расширенной матрицы Якоби для невязок F_i граничных условий (1.4) [6]:

$$J = \|\partial F_i / \partial s_j, \partial F_i / \partial Q\| \quad (1.6)$$

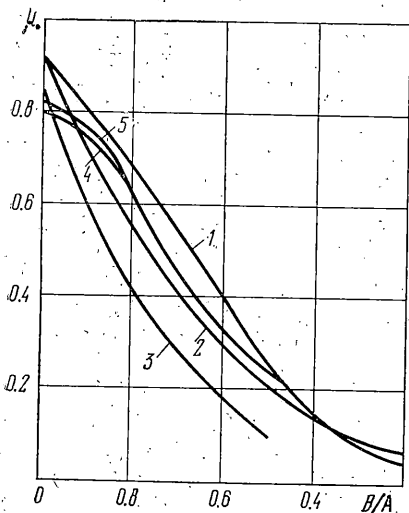
Решение краевой задачи и его исследование проводится для ряда последовательно возрастающих значений нагрузки (характерного перемещения); таким образом, строится полная картина деформирования оболочки.

2. Проведенные расчеты позволили выявить ряд важных особенностей поведения конструкций рассматриваемого типа. Оказалось, что при определении критических нагрузок идеальных оболочек можно ориентироваться на предельную точку на диаграмме нагрузка — максимальный прогиб.

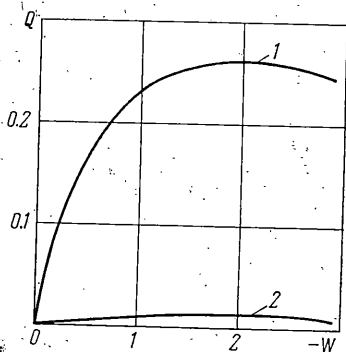
В то же время в результате расчетов установлено существование точек бифуркации, лежащих вблизи предельной точки, причем положение этих точек меняется в зависимости от геометрических параметров оболочки. Для некоторых оболочек установлены точки сгущения спектра, которые не обнаруживаются при линеаризации докритического состояния. Ниже приведены результаты расчета оболочек со следующими параметрами: $R_0/h=300$, $l=2.5$, $\nu=0.3$.

B/A	Q_1	Q_2
0.7	0.5208	0.5205
0.5	0.370	0.368 (0.365)
0.3	0.0729	0.0710 (0.0664)

В первом столбце даны значения Q_1 , при которых достигается предельная точка на диаграмме нагрузка — максимальный прогиб, во втором — значения Q_2 , при которых происходят бифуркации указанной кривой де-



Фиг. 1



Фиг. 2

формирования. Отметим, что точки бифуркации лежат после предельной (на нисходящей ветви). Близость особых точек (в весьма малой окрестности предельной точки лежат точки бифуркации) указывает на высокую чувствительность рассматриваемой конструкции к начальным несовершенствам [7].

Значение параметра предельной нагрузки Q_* слабо зависит от R_0/h , l , так что Q_* может быть с высокой степенью точности представлена в виде функции от B/A и ν . На фиг. 1 приведен график зависимости Q_* от B/A (кривая 1, $\nu=0.3$). Отметим, что диапазон $B/A < 0.1$ не исследовался, так как соответствующие результаты, требуя больших затрат машинного времени, представляют малый практический интерес.

Кривой 2 на фиг. 1 отмечены результаты расчета по формуле Папковича для круговых цилиндрических оболочек с радиусом, равным максимальному радиусу кривизны поперечного сечения ($R_{max}=A^2/B$):

$$Q_* = \frac{4}{3\sqrt{3}\pi(1-\nu^2)^{3/4}} \left[\frac{BE(\pi/2, k)}{A} \right]^{1/2} \quad (2.1)$$

Видно, что формула (2.1) (предложенная для некруговых цилиндрических оболочек, нагруженных равномерным внешним давлением, в [8])

дает вполне приемлемые результаты. Погрешность в «запас устойчивости» не превышает 10–15%. Таким образом, расчет несущей способности идеальных оболочек по формуле Папковича с радиусом, равным максимальному радиусу кривизны поперечного сечения, является вполне обоснованным (вопреки выводам авторов [1], к которым они пришли на основе линейного решения при безмоментном докритическом состоянии) и может быть рекомендован для практических расчетов.

Типичные кривые нагрузка Q — максимальный прогиб W для $B/A=0.5$ (кривая 1) и $B/A=0.1$ (кривая 2) приведены на фиг. 2. При уменьшении B/A кривая $Q-W$, как и следовало ожидать, становится пологой, и предельная точка достигается при относительно больших максимальных прогибах.

На фиг. 3 приведены формы прогибов оболочки с $B/A=0.5$ при различных значениях Q (кривые 1, 2, 3 соответствуют $Q=0.1, 0.2, 0.25$). Видно, что деформирование происходит с образованием вмятины в окрестности образующей максимального радиуса кривизны, причем вмятина принимает все более резкие очертания с ростом нагрузки.

Это подтверждает исходные предпосылки [8].

Для контроля правильности вычисленных критических нагрузок были повторены некоторые расчеты из [1–3]. Результаты сравнения приведены ниже, где Q_*^1 — результаты нелинейных расчетов [3], Q_*^2 — линейное безмоментное [1], а Q_*^3 — линейное моментное [2] решения

R_0/h	l	Q_*	Q_*^1	Q_*^2	Q_*^3
100	3.22	0.273	0.276	0.310	0.269
100	1.97	0.276	0.280	0.310	0.276
100	1.33	0.278	0.274	0.310	0.275

Совпадение Q_* с расчетами из [2, 3] достаточно хорошее, а линейный безмоментный расчет [1] дает сильно завышенные результаты. Отметим, что принятый в [3] несколько неопределенный критерий «расходимости вычислительного процесса» не позволяет выявить характер получаемой особой точки. Линейное же моментное решение [2] не дает возможности правильно судить о спектре исходной задачи и, следовательно, оценить влияние начальных неправильностей на несущую способность.

3. Известно, что системы, описываемые уравнениями, спектр которых содержит точки сгущения, наиболее чувствительны к начальным неправильностям [7]. Поэтому необходимо исследовать влияние начальной погиби на несущую способность цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения под действием внешнего давления. Здесь проявляется качественное отличие цилиндрических оболочек эллиптического поперечного сечения от круговых, которые, как известно, малочувствительны к начальной погиби при аналогичном нагружении.

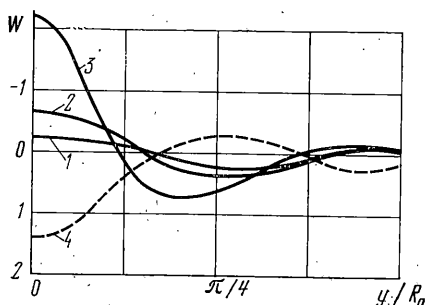
Ограничимся оболочками с большой эллиптичностью. Основной интерес представляет исследование начальной погиби w_0 , в кольцевом направлении имеющей формы

$$W_0 = \alpha \cos(4\theta/\beta) \quad (3.1)$$

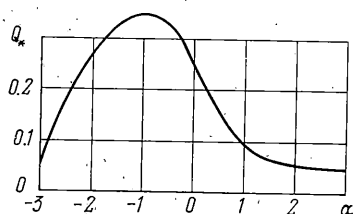
Это связано с тем, что погиб рассматриваемого вида является «резонансной» при $\alpha > 0$ (т. е. в разложении прогиба исходной идеальной конструкции в ряд Фурье по окружной координате гармоника $W_0 \cos(4\theta/\beta)$ является основной).

Соответствующие разрешающие уравнения получаются из (1.1) путем замены функций w на $w + w_0$ в нелинейных членах.

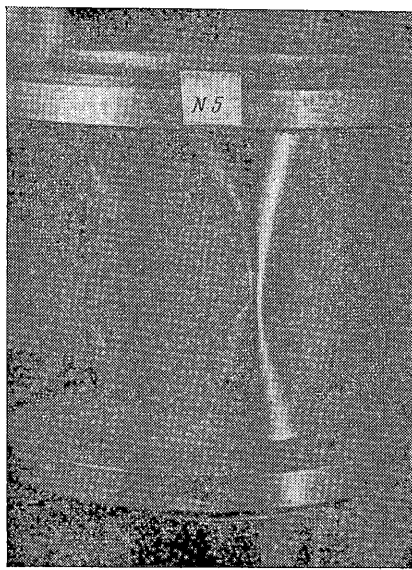
Зависимость критической нагрузки от амплитуды начальной погиби α для оболочки с $B/A=0.5$ и геометрико-жесткостными параметрами из п. 2 приведена на фиг. 4. Видно, что начальная погибь с $\alpha > 0$ приводит к существенному снижению Q_* (на 44%, т. е. почти в два раза, при амплитуде погиби, равной трем толщинам оболочки). Кроме того, существенно увеличиваются и максимальные прогибы — от двух толщин при $\alpha=0$ до пяти толщин при $\alpha=3$. При $\alpha > -0.8$ форма изгиба оболочки с начальной погибью



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

такая же, как и для идеальной конструкции (кривые 1—3, фиг. 3); при больших отрицательных амплитудах погиби ($\alpha < -0.8$) форма изгиба следует форме погиби (пунктирная кривая 4 на фиг. 3).

4. Для проверки полученных теоретических данных был проведен эксперимент. Отметим, что авторам известен лишь один эксперимент, описанный в [1].

Всего было испытано шесть серий оболочек (55 образцов), отличающихся материалом, номинальной толщиной и длиной. Оболочки одной серии изготовлены из листовой стали X18H9M, имеющей низкий предел текучести $\sigma_{02}=20 \cdot 9.8 \cdot 10^6$ Н/м², оболочки остальных серий — из листовой стали X18H9H с $\sigma_{02}=80 \cdot 9.8 \cdot 10^6$ Н/м². Принималось $E=1.92 \cdot 9.8 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\nu=0.3$. Оболочки изготавливались точечной сваркой. Все они имели одинаковый периметр поперечного сечения, равный периметру круговой оболочки с радиусом $R_0=0.0571$ м.

Нагружение оболочек внешним давлением осуществлялось путем откачки воздуха из внутренней полости. При испытаниях образец устанавливался в приспособление, обеспечивающее заданную форму торцев оболочки, герметичность внутренней полости и постоянство граничных условий (упругое опирание).

В ходе испытаний регистрировалось давление, соответствующее потере несущей способности оболочки. Потеря устойчивости всех испытанных оболочек сопровождалась хлопком. Оболочки всех серий с отношением полусей $B/A=0.9, 0.8$, как правило, теряли устойчивость с образованием

вмятин по всей поверхности. Количество волн по периметру совпадало с числом волн для круговой оболочки. Длина полуволн различна: наибольшая — в зоне минимальной кривизны, наименьшая — в зоне максимальной кривизны. Степень различия увеличивается по мере уменьшения B/A .

Оболочки всех серий с соотношением полуосей эллипса поперечного сечения $B/A=0.7$ теряли устойчивость с образованием одной вмятины в зоне максимального радиуса кривизны. С увеличением нагрузки происходило развитие этих вмятин. Исчерпание несущей способности происходило при образовании вмятины в зоне максимальной кривизны (фиг. 5).

Потеря устойчивости оболочек с $B/A=0.5$ происходила с образованием одной либо двух вмятин в зоне максимального радиуса. Критические нагрузки, соответствующие этим формам потери устойчивости, практически одинаковы.

На фиг. 1 представлены полученные из эксперимента значения параметра критического давления Q_* для оболочек с $R_0/h=290$, $l=2.5$ (кривая 3); $R_0/h=290$, $l=2$ (кривая 4); $R_0/h=600$, $l=2$ (кривая 5). Как видно, экспериментальные значения параметра критического давления близки к расчетным по максимальному радиусу кривизны эллиптического контура. Низкие значения определенных в эксперименте критических нагрузок при $R_0/h=600$ можно объяснить увеличенной относительной начальной погибью, получаемой при изготовлении оболочек из тонкого листа.

Появление в эксперименте формы потери устойчивости с двумя вмятинами в зоне максимального радиуса кривизны объясняется, по-видимому, влиянием начальной погиби со значительной отрицательной амплитудой (соответствующая форма изгиба, полученная в расчете, представлена кривой 4 на фиг. 3).

Поступила 28 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Yao J. C., Jenkins W. C. Buckling of elliptic cylinders under normal pressure. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 1. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1970, т. 9, № 1.)
2. Bushnell D. Stress, buckling, and vibration of prismatic shells. AIAA Journal, 1971, vol. 9, No. 10. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1971, т. 9, № 10.)
3. Marlowe M. B., Brogan F. A. Collapse of elliptic cylinders under uniform external pressure. AIAA Journal, 1971, vol. 9, No. 11. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1971, т. 9, № 11.)
4. Аксельрад Э. Л. Гибкие оболочки. М., «Наука», 1976.
5. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., Физматгиз, 1962.
6. Андреев Л. В., Лебедев А. Г., Ободан Н. И. Алгоритм решения нелинейной задачи устойчивости несимметричных цилиндрических оболочек. В сб.: Применение численных методов в строительной механике корабля. Л., «Судостроение», 1976.
7. Корнев В. М. О решении задач устойчивости оболочек с учетом плотности собственных решений. В сб.: Теория оболочек и пластин. Л., «Судостроение», 1975.
8. Бабенко В. И. К потере устойчивости цилиндрических оболочек при внешнем давлении. Докл. АН УССР Сер. А, 1977, № 3.