

ЗАДАЧА О ВИБРАЦИОННОЙ БРАХИСТОХРОНЕ

М. Д. ГЕРШМАН, Р. Ф. НАГАЕВ

(Ленинград)

Рассматривается задача о плоской кривой наискорейшего спуска при наличии сил кулонова трения в системе координат, совершающей поступательные периодические (или почти периодические) вибрации высокой частоты. Задача рассматривается в рамках теории оптимального управления с использованием метода осреднения [1]. Ее общее решение в первом приближении удается свести к квадратурам. Подробно разбирается простейший частный случай чисто вертикальных вибраций с постоянным по модулю ускорением. При отсутствии вибраций построенное решение прямо переходит в полученное ранее в работах [2, 3]. Задача представляет интерес при проектировании ряда вибрационных машин.

1. Уравнения движения материальной точки вдоль плоской кривой, соединяющей начало декартовой системы координат Oxy и точку $(x=a, y=b)$, имеют вид

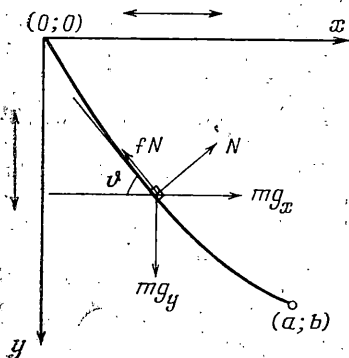
$$\begin{aligned} x' &= v \cos \vartheta, & y' &= v \sin \vartheta \\ v' &= g_y (\sin \vartheta - f \cos \vartheta) + g_x (\cos \vartheta + f \sin \vartheta) + f v \vartheta' \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь x, y и v — текущие декартовы координаты и скорость точки, ϑ — угол между касательной к кривой и осью Ox ($-\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2$), f — коэффициент кулонова трения, дифференцирование по времени обозначается точкой. Предполагается, что ось Oy вибрирующей декартовой системы координат направлена вертикально вниз (см. фиг. 1), $g_x(t)$ — проекция ускорения поступательных вибраций плоскости на ось Ox , а $g_y(t)$ — сумма ускорения силы тяжести g и проекции ускорения вибраций на ось Oy . При выводе системы (1.1), кроме того, предполагалось, что скорость материальной точки при движении ее по кривой всегда положительна. Поэтому сила кулонова трения всегда направлена в сторону, противоположную увеличению длины кривой, а ее величина пропорциональна нормальному давлению точки на кривую. Первые два уравнения (1.1) имеют кинематический смысл,

в то время как третье уравнение является динамическим. Наконец, отметим, что система (1.1) предполагает безотрывное скольжение точки по кривой и отсутствие подбрасывания. Поэтому величина нормального давления N в процессе движения не меняет знака

$$N = g_y \cos \vartheta - g_x \sin \vartheta - v \vartheta' > 0 \quad (1.2)$$

Выполнение неравенства (1.2) предполагает относительно низкую интенсивность вибраций.



Фиг. 1

Введем новую переменную

$$W = v \exp(-f\theta) \quad (1.3)$$

Тогда система (1.1) запишется в форме ($\rho = \text{arctg } f$ — угол трения)

$$\dot{x} = W \exp(f\theta) \cos \theta, \quad \dot{y} = W \exp(f\theta) \sin \theta \quad (1.4)$$

$$W' = \exp(-f\theta) [g_y \sin(\theta - \rho) + g_x \cos(\theta - \rho)] \cos^{-1} \rho$$

В уравнениях (1.4) величину θ можно истолковать как управление. Действительно, решая систему (1.4) при произвольной заданной функции $\theta(t)$ и принятых краевых условиях, можно всегда определить как закон движения, так и форму кривой и уже потом убедиться, что величина θ имеет смысл угла поворота касательной.

Систему (1.4) необходимо дополнить начальными и граничными условиями

$$v = v_0, \quad \theta = \theta_0 \text{ при } t = 0 \quad (1.5)$$

$$x = y = 0 \text{ при } t = 0; \quad x = a, \quad y = b \text{ при } t = T \quad (1.6)$$

где T — конечный момент движения. В дальнейшем вместо двух условий (1.5) будем пользоваться одним

$$W = W_0 = v_0 \exp(-f\theta_0) \text{ при } t = 0 \quad (1.7)$$

Если в результате решения задачи при условии (1.7) в начальной точке ($t = 0, x = y = 0$) получаются значения угла $\theta = \theta_1$ и скорость $v = v_1$, отличные от (1.5), но, естественно, связанные соотношением

$$W_0 = v_1 \exp(-f\theta_1)$$

то это означает, что в начале искомой кривой имеется дуга окружности бесконечно малого радиуса, изменяющая наклон касательной от θ_0 до θ_1 .

Действительно, на такой бесконечно малой дуге составляющая силы трения, обусловленная центробежной силой, существенно больше всех прочих действующих на частицу силовых факторов. Поэтому в силу третьего уравнения (1.4) на бесконечно малом интервале движения по такой дуге величина W сохраняется и равна W_0 .

Переходя к решению задачи о быстродействии (минимизация времени скатывания T), для системы (1.4) при краевых условиях (1.6), (1.7) введем функцию Гамильтона

$$H = W \exp(f\theta) (\psi_1 \cos \theta + \psi_2 \sin \theta) + \psi_3 \exp(-f\theta) [g_y \sin(\theta - \rho) + g_x \cos(\theta - \rho)] \cos^{-1} \rho \quad (1.8)$$

где ψ_1, ψ_2, ψ_3 сопряжены соответственно переменным x, y и W . Тогда сопряженная система запишется в виде

$$\dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \dot{\psi}_3 = -\exp(f\theta) (\psi_1 \cos \theta + \psi_2 \sin \theta) \quad (1.9)$$

Поскольку управление θ есть угол поворота касательной к кривой, решение, связанное с выходом величины θ на границу области управления $\theta = \pm 1/2\pi$, не имеет физического смысла. Поэтому максимум гамильтониана H в классе управлений θ , отвечающих реальным кривым, достигается в стационарных точках, соответствующих равенству

$$\partial H / \partial \theta = 0 \quad (1.10)$$

Выпишем теперь условие трансверсальности $\psi_3 = 0$ при $t = T$. Еще одно условие

$$\psi_2 = 0 \text{ при } t = T \quad (1.11)$$

появляется, если отбросить граничное условие $y|_{t=x}=b$. Это значит, что разыскивается кривая, вдоль которой материальная точка перемещается на заданное расстояние a по горизонтали за наименьшее время. Будем далее такую кривую называть естественной брахистохроной, в отличие от простой брахистохроны, вытекающей из (1.6).

2. Переходим к непосредственному интегрированию системы уравнений вибрационной брахистохроны (1.4), (1.9), (1.10). Прежде всего отметим, что результат интегрирования первых двух уравнений (1.9) можно представить в виде

$$\psi_1 = \mu \cos \gamma, \quad \psi_2 = \mu \sin \gamma \quad (2.1)$$

где μ и γ — постоянные. Тогда третье уравнение (1.4), последнее уравнение (1.9) и (1.10) выделяются в следующую замкнутую систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$W' = \exp(-f\theta) [g_y \sin(\theta - \rho) + g_x \cos(\theta - \rho)] \cos^{-1} \rho \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \psi_3' &= -\mu \exp(f\theta) \cos(\theta - \gamma) \\ -\mu W \exp(f\theta) \cos \rho \sin(\theta - \gamma - \rho) + \psi_3 \exp(-f\theta) (g_y \cos \theta - g_x \sin \theta) &= 0 \end{aligned}$$

Последнее трансцендентное соотношение (2.2) может быть истолковано как задание в неявном виде величины θ как функции W , ψ_3 и времени t .

Введем следующие безразмерные переменные и коэффициенты:

$$\tau = \omega t, \quad \varepsilon = (2g)^{1/2} \pi a^{-1/2} \omega^{-1}, \quad p = 2^{1/2} \pi (ag)^{-1/2} W \quad (2.3)$$

$$q = (2g)^{1/2} \pi a^{-1/2} (\mu \cos \rho)^{-1} \psi_3, \quad w_{x,y} = g_{x,y} g^{-1}, \quad z = pq^{-1}$$

Здесь ω — характерная частота вибраций плоскости (в случае периодических вибраций — их круговая частота).

Тогда безразмерная форма уравнений (2.2) примет вид

$$\begin{aligned} p' &= \varepsilon \exp(-f\theta) [w_y \sin(\theta - \rho) + w_x \cos(\theta - \rho)] \cos^{-1} \rho \quad (2.4) \\ q' &= -\varepsilon \exp(f\theta) \cos(\theta - \gamma) \cos^{-1} \rho \\ z \exp(2f\theta) \sin(\theta - \gamma - \rho) - w_y \cos \theta + w_x \sin \theta &= 0 \end{aligned}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по безразмерному времени τ .

Будем считать, что вибрации являются высокочастотными и поэтому параметр ε , равный отношению характерного времени (периода) вибраций к времени свободного падения с высоты a , есть достаточно малая положительная величина. В этом смысле первые два уравнения (2.4) образуют так называемую систему в стандартной форме, которая может быть решена с помощью метода осреднения [4]. Переменные p , q , а следовательно и z , являются медленными, а $\theta = \theta(z, \tau)$ — быстрой. Согласно третьему уравнению (2.4), в интервале своего изменения угол θ — однозначная функция τ того же типа, что и $w_x(\tau)$, $w_y(\tau)$.

Осредненные уравнения первого приближения имеют вид

$$p' = \varepsilon f_1(z), \quad q' = -\varepsilon f_2(z) \quad (2.5)$$

$$f_1 = \langle \exp(-f\theta) [w_y \sin(\theta - \rho) + w_x \cos(\theta - \rho)] \cos^{-1} \rho \rangle$$

$$f_2 = \langle \exp(f\theta) \cos(\theta - \gamma) \cos^{-1} \rho \rangle, \quad (\langle \dots \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{\Theta} \int_0^{\Theta} (\dots) d\tau)$$

Осреднение следует вести по τ после подстановки в осредняемую функцию выражения ϑ через z и τ с помощью третьего соотношения (2.4). Отметим также, что в уравнениях (2.5) сохранены обозначения p, q, z . Следует, однако, помнить, что эти величины суть первые слагаемые соответствующих асимптотических разложений и поэтому отличаются от искомого на величину порядка ε в интервале $0 < \tau < O(\varepsilon^{-1})$.

Специфическая структура уравнений (2.5) позволяет найти их решение в квадратурах. Действительно, поскольку $p=qz$ (см. (2.3)), можно написать равенства

$$\varepsilon f_1 = p' = q'z + qz' = -\varepsilon f_2 z + qz'$$

из которых следует

$$z' = \varepsilon q^{-1}(f_1 + zf_2), \quad q^{-1}dq = -f_2(f_1 + zf_2)^{-1}dz \quad (2.6)$$

При помощи выражений функций f_1, f_2 и последнего соотношения (2.4) нетрудно доказать, что

$$f_2 = dF/dz \quad (2.7)$$

$$F(z) = f_1 + zf_2 = \langle \exp(-f\vartheta) \cos^{-1} \rho \sin(\vartheta - \gamma - \rho) \{w_y[\cos \gamma - \sin(2\vartheta - \gamma - \rho) \sin \rho] - w_x[\sin \gamma + \cos(2\vartheta - \gamma - \rho) \sin \rho]\} \rangle$$

В результате получаем

$$q = \kappa F^{-1}(z), \quad p = \kappa z F^{-1}(z), \quad \kappa = q_0 F(z_0) = 2^{1/2} \pi (ag)^{-1/2} v |_{t=\tau} \quad (2.8)$$

Величина κ имеет смысл безразмерной скорости в конечной точке брахистохроны, а q_0, z_0 — значения соответствующих величин в начальный момент времени. Уравнение связи между безразмерным временем τ и параметром z получается из (2.6) и, в силу (2.8), приводится к форме

$$\varepsilon \tau = \kappa \int_{z_0}^z F^{-2}(z) dz \quad (2.9)$$

Перейдем к определению декартовых координат вибрационной брахистохроны. Для этого введем безразмерные переменные

$$\xi_1 = 2\pi^2 a^{-1} x, \quad \xi_2 = 2\pi^2 a^{-1} y \quad (2.10)$$

и перепишем первые два уравнения (1.4) в безразмерной стандартной форме

$$\xi_1' = \varepsilon p \exp(f\vartheta) \cos \vartheta, \quad \xi_2' = \varepsilon p \exp(f\vartheta) \sin \vartheta \quad (2.11)$$

Правые части уравнений (2.11) не зависят от ξ_1 и ξ_2 . Поэтому, если p, q и ϑ определены из (2.4), ξ_1 и ξ_2 могут быть найдены квадратурами. Тем не менее, решение (2.11) можно искать в виде асимптотических разложений и тогда в первом приближении получим

$$\xi_i' = \varepsilon p F_i(z) \quad (i=1, 2) \quad (2.12)$$

$$F_1(z) = \langle \exp(f\vartheta) \cos \vartheta \rangle, \quad F_2(z) = \langle \exp(f\vartheta) \sin \vartheta \rangle$$

В соотношениях (2.12) переменные ξ_1, ξ_2, p и z имеют смысл первых асимптотических приближений, а осреднение, как и раньше, ведется с использованием третьего соотношения (2.4) при фиксированном z .

Вместо уравнений (2.12) при учете (2.6) — (2.8) будем иметь

$$\frac{d\xi_i}{dz} = \xi_i' \frac{d\varepsilon\tau}{\varepsilon dz} = \frac{\kappa^2 z F_i(z)}{F^3(z)}$$

Отсюда непосредственно приходим к параметрическим уравнениям вибрационной брахистохроны в первом приближении

$$\xi_i = \kappa^2 \int_{z_0}^z \frac{F_i(z) z dz}{F^3(z)} \quad (i=1,2) \quad (2.13)$$

В уравнениях (2.13) неизвестные константы q_0 и γ подлежат определению из граничных условий (1.6) при $t=T$ ($\kappa=q_0 F(z_0)$, $z_0=p_0 q_0^{-1}$, где $p_0=2^{1/2}\pi(ag)^{-1/2}W_0$). При этом следует учесть, что в силу (1.11) в конечной точке $q=0$, а, следовательно, величина z обращается в бесконечность.

В задаче об естественной брахистохроне в силу (1.11) и (2.1) $\gamma=0$ и единственная неизвестная постоянная q_0 находится при помощи первого уравнения (2.13). Второе уравнение (2.13) служит для определения неизвестной в этом случае величины b .

3. Оптимальное управление ϑ , определяемое посредством третьего уравнения (2.4), уже в первом приближении является быстроосциллирующей функцией времени. Поэтому истинная брахистохрона, в отличие от сглаженной кривой первого приближения, представляет собой наложение плавной кривой на высокочастотные дрожания малой амплитуды. Ориентация этих дрожаний существенно зависит от начальной фазы движения, которая в реальных условиях носит случайный характер. Это предопределяет практическую бесполезность более высоких асимптотических приближений.

Многие характеристики построенной кривой первого приближения отличаются от соответствующих характеристик истинной брахистохроны на немалые величины. К ним относится, например, общая длина кривой. Тем не менее, безразмерное время Γ движения вдоль кривой первого приближения близко к безразмерному времени движения вдоль истинной брахистохроны $\Gamma_* = \omega T$:

$$\Gamma/\Gamma_* = 1 + O(\varepsilon) \quad (3.1)$$

В этом легко убедиться, если сравнить уравнения для определения этих величин

$$\eta(\varepsilon\Gamma) = 0 \text{ и } \eta(\varepsilon\Gamma_*) + \varepsilon u_1[\eta(\varepsilon\Gamma_*), \Gamma_*] + \varepsilon^2 \dots = 0$$

Здесь η — гладкая непрерывная функция своего аргумента, а u_1, u_2, \dots — такие же функции η , но быстроосциллирующие функции явно входящего в них Γ_* . В силу (2.9) имеем

$$\varepsilon\Gamma = \kappa \int_{z_0}^{\infty} \frac{dz}{F^2(z)} \quad (3.2)$$

Необходимо, наконец, отметить, что истинная дрожаящая брахистохрона, определяемая в процессе построения последовательных асимптотических приближений, не имеет физического смысла в силу невыполнения условия отсутствия подбрасывания (1.2). Действительно, соответствующее неравенство имеет следующий безразмерный вид:

$$w_y \cos \vartheta - w_x \sin \vartheta - p \exp(f\vartheta) \varepsilon^{-1} \vartheta' > 0 \quad (3.3)$$

В этом неравенстве последнее слагаемое, с одной стороны, велико (пропорционально ε^{-1}), а с другой, — быстро осциллирует (меняет знак) вместе с производной Φ' (величина p , как и скорость движения v , считается всегда положительной). Поэтому (3.3) не может выполняться для истинной брахистохроны, а также для другой любой околной дрожащей кривой.

В то же время неравенство (3.3) для сглаженной брахистохроны выполняется, если

$$w_y F_1 - w_x F_2 - \exp\left(f \operatorname{arctg} \frac{F_2}{F_1}\right) z F (F_1^2 + F_2^2)^{-1/2} \left(F_1 \frac{dF_2}{dz} - F_2 \frac{dF_1}{dz}\right) > 0 \quad (3.4)$$

Для получения (3.4) достаточно учесть, что в этом случае $\Phi = \operatorname{arctg} (d\xi_2/d\xi_1)$, а ξ_1 и ξ_2 определяются через медленную переменную z из уравнения (2.13). Естественно, что неравенство (3.4), а также аналогичные неравенства, выписанные для любых достаточно гладких околных кривых, выполняются, если интенсивность вибраций относительно невелика.

Таким образом, среди рассматриваемых околных кривых физическими являются только гладкие (недрожащие), для которых неравенство (3.4) выполняется, и, следовательно, нормальное давление не меняет знака. В силу (3.1) полученная сглаженная брахистохрона среди таких кривых оптимальна.

Отметим, что брахистохрона, оптимальная среди любых околных кривых, должна определяться из решения гораздо более сложной задачи с учетом подбрасывания. При невысокой интенсивности вибраций эта кривая также будет носить дрожащий характер и потому практического значения не имеет.

При отсутствии вибраций ($g_x = w_x = 0$, $g_y = g$, $w_g = 1$) необходимость в использованной асимптотической процедуре отпадает, и уравнения (2.5) и (2.12) являются точными. Соответственно соотношения (2.13) являются точными уравнениями фрикционной брахистохроны, из которых после взятия квадратур можно непосредственно прийти к выражениям, полученным в [2].

4. Наиболее просто уравнения (2.13) записываются в случае, когда трение отсутствует ($f = \rho = 0$), начальная скорость равна нулю ($v_0 = p_0 = 0$), а вибрация происходит в чисто вертикальном направлении ($g_x = w_x = 0$) по $2\pi/\omega$ -периодическому закону

$$-4A\pi^{-2}[\pi(2n+1) - \omega t][\omega t - 2\pi n], \quad \omega t \in (2\pi n, \pi(2n+1))$$

$$4A\pi^{-2}[2\pi(n+1) - \omega t][\omega t - \pi(2n+1)], \quad \omega t \in (\pi(2n+1), 2\pi(n+1))$$

где A — амплитуда вибрации. В этом случае, как нетрудно видеть

$$w_y = 1 + w \operatorname{sign} \tau \quad (w_x = 0) \quad (4.1)$$

где величину $w = 8A\omega^2 \pi^{-2} g^{-1}$ будем трактовать как коэффициент перегрузки.

Ограничиваясь рассмотрением задачи об естественной брахистохроне ($\gamma = 0$), из третьего уравнения (2.4) найдем следующее явное выражение для функции $\Phi(z, \tau)$:

$$\Phi = \operatorname{arctg} (w_y/z) \quad (4.2)$$

Рассматриваемый закон вибраций является 2π -периодическим по безразмерному времени τ . Поэтому можно написать

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) d\tau$$

Тогда после несложного интегрирования из (2.7) и (2.12) при учете (4.1) и (4.2) непосредственно получим явные выражения для функций $F_1(z)$, $F_2(z)$ и $F(z)$.

Последующее вычисление квадратур, входящих в формулы (2.13), наиболее эффективно при использовании замены

$$z = \operatorname{tg}(\frac{1}{2}\varphi) [1 - w^2 \cos^2(\frac{1}{2}\varphi)]^{1/2} \quad (0 \leq \varphi < \pi) \quad (4.3)$$

В результате окончательные выражения приведутся к виду

$$\xi_1 = \kappa^2 \left\{ \frac{1+w^2}{3w^2} \left[E(w) - E\left(\frac{\pi-\varphi}{2}, w\right) \right] - \frac{1-w^2}{3w^2} \left[K(w) - F\left(\frac{\pi-\varphi}{2}, w\right) \right] - \frac{1}{6} \left[1 - \frac{w^2}{2} (1 + \cos \varphi) \right]^{1/2} \sin \varphi \right\} \quad (4.4)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{4} \kappa^2 (1 - \cos \varphi) [1 - \frac{1}{4} w^2 (3 + \cos \varphi)]$$

где F и E — эллиптические интегралы, а K и E — полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода с модулем w .

Из равенства (4.4) с помощью (1.6) и (2.10) сразу же получим выражение для безразмерной скорости и ординаты в конце естественной брахистохроны

$$\kappa = 6^{1/2} \pi w G^{-1/2}(w), \quad b = \frac{3}{4} a w^2 (2 - w^2) G^{-1}(w) \quad (4.5)$$

$$G(w) = (1 + w^2) E(w) - (1 - w^2) K(w)$$

Выищем теперь формулу для полного времени движения, которая получается из (3.2) при учете (2.3) ($z_0 = 0$)

$$T = 2w^{-1} a^{1/2} (3g)^{-1/2} G^{1/2}(w) \quad (4.6)$$

Если интенсивность вибраций достаточно мала ($0 < w \ll 1$), то два первых слагаемых в первом выражении (4.4) образуют малую разность больших чисел, и для вычисления величин κ , b , x , y , T удобнее пользоваться их разложением в ряд по степеням w :

$$\kappa = (8\pi)^{1/2} (1 + \frac{1}{16} w^2 + \frac{7}{512} w^4 + w^6 \dots), \quad b = 2a\pi^{-1} (1 - \frac{3}{8} w^2 - \frac{1}{32} w^4 + w^6 \dots) \quad (4.7)$$

$$x = a\pi^{-1} [(\varphi - \sin \varphi)^{-1/3} w^2 \sin \varphi (1 - \cos \varphi) - \frac{1}{32} w^4 \sin \varphi (1 - \cos \varphi + \frac{1}{3} \sin^2 \varphi) + w^6 \dots]$$

$$y = a\pi^{-1} (1 - \cos \varphi) [1 - \frac{1}{16} w^2 (1 + \cos \varphi) + \frac{1}{128} w^4 (1 - \cos \varphi) + w^6 \dots]$$

$$T = (a\pi)^{1/2} g^{-1/2} (1 - \frac{1}{16} w^2 - \frac{5}{512} w^4 + w^6 \dots)$$

Из (4.7) прежде всего вытекает, что при отсутствии вибраций ($w = 0$) построенная брахистохрона вырождается в дугу циклоиды.

Построенное решение имеет смысл в замкнутом диапазоне изменения перегрузки $0 \leq w \leq 1$. Предельная наиболее пологая брахистохрона ($w = 1$) характеризуется следующими, вытекающими из (4.4) — (4.6) при $w = 1$ соотношениями

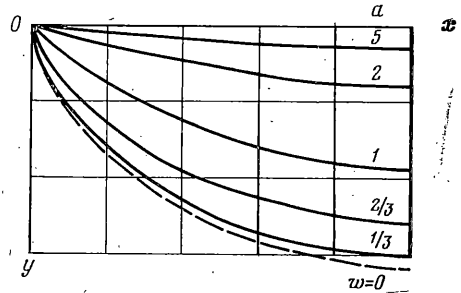
$$\kappa = \pi \sqrt{3}, \quad b = \frac{3}{8} a, \quad T = 2\sqrt{\frac{2}{3}} (a/g)$$

$$x = 4a (1 - \cos \frac{1}{2}\varphi) (\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{1}{2}\varphi)^{-1/3} \cos \varphi, \quad y = \frac{1}{4} a (1 - \cos \varphi)^2$$

Поскольку в рассматриваемом примере отсутствуют силы сухого трения, определенный физический смысл имеет также решение, построенное для случая высокой интенсивности вибраций ($w > 1$). Действительно, при этом достаточно положить, что криволинейный канал, вдоль которого движется частица, обладает удерживающими свойствами, и, следовательно, нормальная реакция N , не влияющая на характер движения, может быть и отрицательной.

При $w > 1$ замена (4.3) оказывается не эффективной и вместо этого можно предположить

$$u = \left[\frac{(1-w)^2 + z^2}{(1+w)^2 + z^2} \right]^{1/2}, \quad k = \left| \frac{1-w}{1+w} \right|$$



Фиг. 2

Тогда параметрические уравнения брахистохроны в отличие от (4.4) примут вид

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{4}{3} \kappa^2 (1+w)^{-1} (1-k^2)^{-2} \{ (1+k^2) E(v, h) - 2k^2 F(v, h) - \\ &\quad - [2 + (1+k^2) u^{-1}] (u^2 - k^2)^{1/2} (1-u)^{1/2} (1+u)^{-3/2} \} \\ \xi_2 &= 2\kappa^2 (u-k)^2 (1+w)^{-1} (1-k)^{-1} (1+u)^{-2} (1+k)^{-2} \\ v &= \arcsin [u^{-1} (u^2 - k^2)^{1/2} (1-k^2)^{-1/2}], \quad h = (1-k^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Выражение для безразмерной скорости, ординаты в конце естественной брахистохроны и полного времени спуска соответственно представятся в виде

$$\begin{aligned} \kappa &= \pi (1-k^2) \left[\frac{2D(w)}{3(1+w)} \right]^{-1/2}, \quad b = \frac{3a(1-k)^3}{8D(w)}, \\ T &= \frac{4}{1-k^2} \left[\frac{aD(w)}{3g(1+w)} \right]^{1/2} \\ D(w) &= (1+k^2) E(h) - 2k^2 K(h) \end{aligned}$$

Отметим, что при $w \rightarrow \infty$ из полученных выше формул вытекает, что $\kappa = 2(\pi w)^{1/2} + O(w^{-1/2})$, $b = a(2\pi w)^{-1} + O(w^{-2})$, $T = (2\pi a)^{1/2} (gw)^{-1/2} + O(w^{-3/2})$.

При увеличении перегрузки естественная брахистохрона становится все более пологой, приближаясь к оси абсцисс (фиг. 2), а общее время движения уменьшается. Так, если для $w=0$ $T=1.77 (a/g)^{1/2}$, то для $w=1$ $T=1.64 (a/g)^{1/2}$, и для $w=5$ $T=0.79 (a/g)^{1/2}$.

Авторы благодарят Ф. Л. Черноусько за ценные советы.

Поступила 10 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Акуленко Л. Д., Черноусько Ф. Л. Метод осреднения в задачах оптимального управления. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 4.
2. Гершман М. Д., Нагаев Р. Ф. О фрикционной брахистохроне. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 4.
3. Ashby N., Brittin W. E., Love W. F., Wyss W. Brachistochrone with Coulomb friction. Amer. J. Phys., 1975, vol. 43, No. 10.
4. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. Изд-во МГУ, 1974.