**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1979**

УДК 539.3

ТЕОРЕМА БЕТТИ И СООТНОШЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Л. И. СЛЕПЯН

(Ленинград)

Основная цель работы – показать, что соотношения ортогональности (5), выведенные в [1] для волн в однородном упругом слое, справедливы для систем широкого класса. Данные соотношения выводятся здесь как следствие теоремы Бетти и условия симметрии. При этом отпадает необходимость обращаться к конкретному виду собственных функций или к уравнениям, которым они удовлетворяют, в результате чего достигается довольно большая общность. Теорема Бетти, в свою очередь, трактуется как следствие линейности системы и наличия комплексного потенциала.

Показано, что соотношения ортогональности для собственных функций, определенных в произвольной области, также являются следствием теоремы Бетти.

Для вывода соотношений ортогональности будем использовать теорему взаимности (Бетти, 1872). Рассмотрим статическую систему, для которой существует комплексный потенциал

$$N=\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\mathbf{u}}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{u}\,d\Omega \tag{1}$$

не зависящий от пути, по которому достигается поле комплексных перемещений $\mathbf{u}$. Здесь Ω – произвольная замкнутая область ($\Omega\subset\Omega_0$, Ω_0 – область, где определена система), $\mathbf{E}$ – комплексные объемные силы, внешние по отношению к той части системы, которая заключена в области Ω. Силы $\mathbf{E}$, возможно, частично или полностью сосредоточены на некоторых поверхностях, линиях или точках. При этом они описываются обобщенными функциями. В частности, действие части системы, находящейся вне Ω, при локальном взаимодействии сосредоточено на поверхности, отделяющей Ω. (Для теоремы Бетти несущественно, являются ли внешние силы объемными или поверхностными, поэтому не имеет смысла разделять $\mathbf{E}$ в (1) на собственно объемные силы и напряжения, действующие на поверхность Ω.) Усилия, возникающие из-за наложенных на систему связей, полагаем внутренними.

При вещественных векторах $\mathbf{u}$, $\mathbf{E}$, когда их можно отождествить с реальными перемещениями и внешними силами, потенциал (1) – работа внешних сил на перемещениях $\mathbf{u}$ в области Ω (внешних – по отношению к Ω) и так как она не зависит от пути, то N – потенциальная энергия в Ω.

Внутренний интеграл в (1) можно, конечно, записать в виде интеграла по времени t:

$$\int\limits_{0}^{\mathbf{u}}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{u}=\int\limits_{0}^{t}\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\,dt$$

Пусть внешние силы определяются через перемещение линейным оператором A, действующим по пространственным переменным и не зависящем от времени

$$\mathbf{E}=A\mathbf{u} \quad (d\mathbf{E}=Ad\mathbf{u}) \tag{2}$$

Заметим, что векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{E}$, называемые здесь перемещениями и внешними объемными силами, могут иметь и другой физический смысл. Существенно лишь выполнение условий (1), (2).

При указанных условиях справедлива теорема Бетти

$$\int_\Omega \mathbf{E}'\cdot\mathbf{u}''\,d\Omega=\int_\Omega \mathbf{E}''\cdot\mathbf{u}'\,d\Omega \tag{3}$$

где величины, помеченные одним штрихом, относятся к первому состоянию, двумя — ко второму. Для доказательства достаточно рассмотреть два пути, на которых достигается перемещение $\mathbf{u}=\mathbf{u}'+\mathbf{u}''$:

$$1)\ \mathbf{u}=\mathbf{u}'t,\ d\mathbf{u}=\mathbf{u}'dt\ \ (\mathbf{E}=\mathbf{E}'t,\ 0\leqslant t\leqslant 1)$$

и затем

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}'+\mathbf{u}''(t-1),\ d\mathbf{u}=\mathbf{u}''dt\ \ (\mathbf{E}=\mathbf{E}'+\mathbf{E}''(t-1),\ 1\leqslant t\leqslant 2)$$

При этом

$$N=N_1=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\mathbf{E}'\cdot\mathbf{u}'+\frac{1}{2}\mathbf{E}''\cdot\mathbf{u}''+\mathbf{E}'\cdot\mathbf{u}''\right)d\Omega$$

$$2)\ \mathbf{u}=\mathbf{u}''t,\ \ d\mathbf{u}=\mathbf{u}''dt\ \ \ (\mathbf{E}=\mathbf{E}''t,\ 0\leqslant t\leqslant 1)$$

и затем

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}''+\mathbf{u}'(t-1),\ d\mathbf{u}=\mathbf{u}'dt\ \ (\mathbf{E}=\mathbf{E}''+\mathbf{E}'(t-1),\ 1\leqslant t\leqslant 2)$$

При этом

$$N=N_2=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\mathbf{E}'\cdot\mathbf{u}'+\frac{1}{2}\mathbf{E}''\cdot\mathbf{u}''+\mathbf{E}''\cdot\mathbf{u}'\right)d\Omega$$

Так как потенциал N от пути интегрирования не зависит, то $N_1=N_2$ и, следовательно, выполняется равенство (3).

Существование потенциала (1) для каждой конкретной системы может быть установлено непосредственно. Заметим, однако, что если оператор A, а следовательно и потенциал N, линейно зависят от некоторых параметров (например, компонентов тензора упругих постоянных, параметров, характеризующих граничные условия, и т. д.), — причем система консервативна, когда данные параметры вещественны и значения их заключены в некоторых пределах,— то существование потенциала гарантируется при любом изменении параметров. Действительно, левая часть равенства $N_1-N_2=0$ будет линейной функцией параметров, аналитически продолжаемой на любые комплексные значения.

Рассмотрим теперь динамическую, вообще говоря, неконсервативную систему, которая получается из статической консервативной заменой указанных параметров линейными операторами свертки по времени с некоторыми (обобщенными) функциями. Проведем преобразование Лапласа над равенством (2). Получим

$$\mathbf{E}^L=\int_0^\infty \mathbf{E}e^{-st}dt=\int_0^\infty A\mathbf{u}e^{-st}\,dt=A^L\mathbf{u}^L$$

При этом возвращаемся к статической системе, но с параметрами — функциями s. В соответствии со сказанным выше теорема Бетти для такой системы остается справедливой, но относительно $\mathbf{u}^L$, $\mathbf{E}^L$ и, следовательно

$$\int_\Omega \mathbf{E}'*\mathbf{u}''\,d\Omega=\int_\Omega \mathbf{E}''*\mathbf{u}'\,d\Omega \tag{4}$$

где символ (*) означает свертку по времени. В частности, если $\mathbf{u}'$, $\mathbf{u}''$ одинаково зависят от времени: $\mathbf{u}'=\mathbf{u}_0'f(t)$, $\mathbf{u}''=\mathbf{u}_0''f(t)$, то равенство (4) эквивалентно прежнему (3). Так, если для указанной системы $\mathbf{u}=\mathbf{u}_0e^{\omega t}$, $\mathbf{E}=\mathbf{E}_0e^{\omega t}$, где величины с нижними индексами не зависят от t, ω — комплексная постоянная, одинаковая для обоих состояний, то теорема Бетти справедлива и в форме (3). Пди этом обе части равенства (3) можно сократить на $\exp(2\omega t)$. Следовательно, оно имеет место и в отношении векторных функций $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{E}_0$.

Теорема Бетти (3) обобщена Рэлеем [2] (стр. 174—180) на динамически неконсервативные системы (колебания около положения равновесия). Обобщение (4) на динамически консервативные нестационарные системы указано в [3] (стр. 155). Перейдем к выводу соотношений ортогональности.

Рассмотрим бесконечный цилиндр или тело вращения произвольного поперечного сечения. Пусть заданная в нем динамическая линейная, вообще говоря, неконсервативная система получается из статической консервативной указанным выше путем (заменой параметров линейными операторами свертки по времени с некоторыми обобщенными функциями). Обозначим продольную ось цилиндра или полярный угол для тела вращения через x (полярные координаты вводятся в плоскости, перпендикулярной оси вращения, с полюсом на этой оси). Введем еще два предположения: оператор A инвариантен относительно сдвига по x (параметры системы не зависят от x) и относительно отражения от плоскости поперечного сечения S (относительно замены x на $-x$) — имеет место симметрия свойств системы относительно поперечного сечения.

Пусть возможным состояниям системы при отсутствии внешних сил отвечают собственные функции: $\mathbf{u}_0=\mathbf{u}_0'=\mathbf{v}'e^{q_1x}$, $\Sigma_0=\Sigma_0'=\boldsymbol{\sigma}'e^{q_1x}$, $\mathbf{u}_0=\mathbf{u}_0''=\mathbf{v}''e^{q_2x}$, $\Sigma_0=\Sigma_0''=\boldsymbol{\sigma}''e^{q_2x}$ ($\mathbf{u}=\mathbf{u}_0e^{\omega t}$, $\Sigma=\Sigma_0e^{\omega t}$).

Здесь Σ — вектор напряжения, действующий на поперечное сечение S, скажем, справа (со стороны бо́льших значений x); $q_{1,2}$ — комплексные постоянные, $q_1^2\neq q_2^2$; вектора $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\sigma}$ не зависят от x (зависят лишь от положения точки в поперечном сечении); ω — комплексная постоянная, одинаковая для обоих состояний.

Заметим, что предположения о характере области, занимаемой телом, и, далее, о независимости параметров системы от x потребовались лишь для того, чтобы оправдать симметрию и существование собственных функций указанного вида. В дальнейшем эти условия не потребуются. Существенно, однако, предположение о симметрии. В силу симметрии существуют еще и другие собственные функции, симметричные указанным относительно поперечного сечения, например, сечения $x=0$. В частности, существуют функции $\mathbf{u}'''$, Σ''', симметричные функциям $\mathbf{u}''$, Σ'': симметричны вектора перемещений и вектора напряжений, действующих на сечение $x=x_+>0$ справа (Σ'') и на сечение $x=-x_+$ слева ($-\Sigma'''$). Отсюда получаем

$$\mathbf{u}_0'''=\mathbf{v}'''e^{-q_2x},\ v_1'''=-v_1'',\ \mathbf{v}_2'''=\mathbf{v}_2'',\qquad \Sigma_0'''=\boldsymbol{\sigma}'''e^{-q_2x},\ \sigma_1'''=\sigma_1'',\ \boldsymbol{\sigma}_2'''=-\boldsymbol{\sigma}_2''$$

где v_1, σ_1 — проекции $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\sigma}$ на ось x (на правую нормаль к S); $\mathbf{v}_2$, $\boldsymbol{\sigma}_2$ — составляющие тех же векторов на плоскости S.

Вырежем часть тела сечениями $x=a$, $x=b$ ($a<b$) и запишем теорему Бетти (3) относительно первого и второго, а также первого и третьего

состояний. Так как функции — собственные, внешними (при локальном взаимодействии) будут лишь напряжения, действующие на поперечное сечение $x=a$ слева $(-\Sigma)$ и на поперечное сечение $x=b$ справа (Σ). Интеграл по объему (3) заменяется здесь интегралом по поперечному сечению. Итак, будем иметь

$$M_+ \int\limits_S (\sigma_1' v_1'' + \boldsymbol{\sigma}_2' \cdot \mathbf{v}_2'' - \sigma_1'' v_1' - \boldsymbol{\sigma}_2'' \cdot \mathbf{v}_2')\, dS = 0$$

$$M_- \int\limits_S (-\sigma_1' v_1'' + \boldsymbol{\sigma}_2' \cdot \mathbf{v}_2'' - \sigma_1'' v_1' + \boldsymbol{\sigma}_2'' \cdot \mathbf{v}_2')\, dS = 0$$

$$M_\pm = \exp[(q_1 \pm q_2) b] - \exp[(q_1 \pm q_2) a]$$

Учитывая, что координаты a, b произвольны, $q_1^2 \neq q_2^2$, находим

$$\int\limits_S [\sigma_1' v_1'' - \boldsymbol{\sigma}_2'' \cdot \mathbf{v}_2' - (\sigma_1'' v_1' - \boldsymbol{\sigma}_2' \mathbf{v}_2'')]\, dS = 0$$

$$\int\limits_S [\sigma_1' v_1'' - \boldsymbol{\sigma}_2'' \cdot \mathbf{v}_2' + (\sigma_1'' v_1' - \boldsymbol{\sigma}_2' \cdot \mathbf{v}_2'')]\, dS = 0$$

Складывая и вычитая одно равенство из другого, приходим к искомым соотношениям ортогональности

$$\int\limits_S (\sigma_1' v_1'' - \boldsymbol{\sigma}_2'' \cdot \mathbf{v}_2')\, dS = 0, \qquad \int\limits_S (\sigma_1'' v_1' - \boldsymbol{\sigma}_2' \cdot \mathbf{v}_2'')\, dS = 0 \tag{5}$$

Второе равенство получается также непосредственно из первого перестановкой верхних индексов.

Нигде не предполагалось, что $\omega \neq 0$. Поэтому соотношения (5) справедливы и в статике, т. е. при $\omega = 0$.

Соотношения ортогональности (5) позволяют построить решение задачи для полубесконечной области (например для $0 \leqslant x < \infty$) в виде ряда по собственным функциям, если при $x=0$ заданы σ_1, $\mathbf{v}_2$ или v_1, $\boldsymbol{\sigma}_2$ (и условия при $x \to \infty$). Впрочем, то же решение может быть получено с помощью косинус- или синус-преобразования Фурье уравнений задачи.

Заметим еще, что для тела вращения требование периодичности рассматриваемых решений не обязательно. Как и для цилиндра, можно полагать $-\infty < x < \infty$. При этом состояние тела вращения соответствует периодическому наложению волн (см., например, [3] (стр. 279)).

Справедливость соотношений (5) для волн в однородном изотропном упругом слое со свободными границами доказана в [1] путем анализа уравнений плоской задачи теории упругости. Там же указано, что соотношения (5) имеют место и для упругого цилиндра. Соотношения ортогональности для волн при $q_1 = q_2$, $\omega_1^2 \neq \omega_2^2$ указаны в [3] (стр. 143).

Рассмотрим тело произвольной формы, занимающее область Ω. Пусть внешние объемные силы выражаются через перемещение суммой $\mathbf{E} = A\mathbf{u} + A_1\mathbf{u}$, где A — линейный оператор, A_1 — не обязательно линейный. Предположим, что при отсутствии внешних сил (усилия, возникающие из-за наложенных на тело связей, по-прежнему полагаем внутренними) тело может находиться в состояниях, описываемых собственными функциями $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$ и $\mathbf{u} = \mathbf{u}''$. Можно полагать, что члены $-A_1\mathbf{u}'$, $-A_1\mathbf{u}''$ соответствуют внешним силам для системы, где $\mathbf{E}=A\mathbf{u}$. Предположим, что для последней системы существует потенциал (1). Тогда из теоремы Бетти следует соотношение ортогональности

$$\int_{\Omega} [(A_1\mathbf{u}')\cdot\mathbf{u}''-(A_1\mathbf{u}'')\cdot\mathbf{u}']d\Omega=0 \qquad (6)$$

В частности, для свободных колебаний, когда перемещения выражаются в виде: $\mathbf{u}'=\mathbf{v}'e^{\omega_1 t}$, $\mathbf{u}''=\mathbf{v}''e^{\omega_2 t}$, $\omega_1^2\neq\omega_2^2$, силам инерции соответствуют (ρ — плотность)

$$-A_1\mathbf{u}'=-\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}'}{\partial t^2}=-\rho\omega_1^2\mathbf{v}'e^{\omega_1 t}, \quad -A_1\mathbf{u}''=-\rho\omega_2^2\mathbf{v}''e^{\omega_2 t}$$

и соотношение (6) преобразуется к известному виду

$$\int_{\Omega} \rho\mathbf{v}'\cdot\mathbf{v}''\,d\Omega=0$$

Тот факт, что последнее соотношение вытекает из энергетических соображений, отмечен в [3] (стр. 141—143).

Поступила 27 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зильберглейт А. С., Нуллер Б. М.* Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости. Докл. АН СССР, т. 234, № 2, 1977.
2. *Стретт Дж. В.* (*Лорд Рэлей*). Теория звука, т. 1. М., Гостехиздат, 1955.
3. *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. Судостроение, Л., 1972.