МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1979

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ПОМОЩЬЮ ГОЛОМОРФНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

А. И. АЛЕКСАНДРОВИЧ

(Москва)

Результаты, полученные на основании применения теории функций двух комплексных переменных к трехмерным статическим задачам теории упругости [1, 2] позволяют выделить общие наиболее существенные элементы исследования в виде введения комплексной структуры в пространстве независимых переменных и представления искомых функций в рядах по системе голоморфных функций, которые в силу изучаемого дифференциального оператора обязаны удовлетворять цепочке зацепляющихся дифференциальных уравнений, и применить перечисленные элементы исследования к классическим динамическим задачам теории упругости.

Известно [3], что на основании представления Ламе решение динамической трехмерной задачи теории упругости для изотропного тела сводится к отысканию скалярного и векторного потенциалов, удовлетворяющих следующим уравнениям:

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi=0, \qquad \nabla^2\Psi_i - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi_i=0 \quad (i=1,2,3) \tag{1}$$

$$c_1^2=(\lambda+2\mu)/\rho, \qquad c_2^2=\mu/\rho$$

Введем комплекснозначную функцию $W_1=\Phi+i\Phi_0$ и комплексную структуру в пространстве координат, времени

$$z_1=x_1+ix_2, \quad z_2=x_3+ic_1t \tag{2}$$

Потребуем, чтобы W_1 удовлетворяла уравнению

$$2\frac{\partial^2}{\partial z_1\,\partial \bar{z}_1}W_1+\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}W_1+\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_2^2}W_1=0 \tag{3}$$

Тогда реальная и мнимая часть функции W_1 будет удовлетворять первому из уравнений (1). Для решения последующих трех уравнений в (1) введем аналогично функции

$$W_2=\Psi_1+i\Psi_2, \quad W_3=\Psi_3+i\Psi_4$$

комплексную структуру

$$z_1=x_1+ix_2, \quad z_2=x_3+ic_2t \tag{4}$$

и потребуем, чтобы функции W_2, W_3 удовлетворяли следующим уравнениям:

$$2\frac{\partial^2}{\partial z_1\,\partial \bar{z}_1}W_i+\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}W_i+\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_2^2}W_i=0 \quad (i=1,2) \tag{5}$$

Следовательно, получив общее решение уравнений (3), (5), будем иметь общее решение уравнений (1), однако следует помнить, что комплексные структуры (2) и (4) неодинаковы.

Так как уравнения (3), (5) не связаны между собой и не различаются по форме, рассмотрим одно из этих уравнений

$$2\frac{\partial^2}{\partial z_1\,\partial \bar{z}_1}W+\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}W+\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_2^2}W=0 \tag{6}$$

Будем искать функцию $W\in C^p(\bar{D})$, где $D=(t_0, t_1)\times G$, G — ограниченная область в трехмерном пространстве, занятая рассматриваемым телом.

Согласно теореме Вейерштрасса любую такую функцию можно сколь угодно точно приблизить полиномом.

Записывая этот полином с помощью комплексных переменных, будем иметь

$$W=\sum_{n_1=n_2=0}^{n_1+n_2=N}\overline{P_{n_1n_2}(z_1, z_2)\,z_1^{n_1}z_2^{n_2}} \tag{7}$$

где $P_{n_1n_2}$ — полиномы от переменных z_1, z_2.

Расширяя класс искомых функций, будем искать W в виде

$$W=\sum_{n_1=n_2=0}^{\infty}\overline{\varphi_{n_1n_2}(z_1, z_2)\,z_1^{n_1}z_2^{n_2}} \tag{8}$$

где $\varphi_{n_1n_2}(z_1, z_2)$ — некоторые голоморфные в D функции.

Будем предполагать, что функции $\varphi_{n_1n_2}(z_1, z_2)$ таковы, что ряд (8) сходится в D равномерно. Тогда очевидна единственность представления (8). Естественно, что окончательное решение о равномерной сходимости ряда (8) может быть получено только после привлечения дифференциальных уравнений и краевых условий, т. е. только после того, как эти функции будут фактически построены.

Подставим (8) в уравнение (6). Приравнивая коэффициенты при функциях $z_1^{n_1}z_2^{n_2}$ нулю, получим цепочку зацепляющихся дифференциальных уравнений

$$2(n_1+1)\frac{\partial}{\partial z_1}\varphi_{n_1+1\,n_2}+\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\varphi_{n_1n_2}+(n_2+1)(n_2+2)\varphi_{n_1n_2+2}=0 \tag{9}$$

Простой анализ формул (9) показывает, что общее решение этой системы зависит от системы функций $\{\varphi_{n_10}(z_1, z_2),\ \varphi_{n_11}(z_1, z_2)\}$ $n_1=0, 1, \ldots$ Сами формулы (9) дают рекуррентное правило вычисления любой функции $\varphi_{n_1n_2}$ через выделенную систему функций. Выписывание явной зависимости функции $\varphi_{n_1n_2}$ от выделенной системы функций, как правило, является излишним, так как при численной реализации удобнее пользоваться рекуррентными соотношениями, чем громоздкими явными выражениями.

Задаваясь конечным числом отличных от нуля голоморфных функций $\{\varphi_{n_10}, \varphi_{n_11}\}$ $n_1=0, 1, \ldots, N$, легко получить решение исходных уравнений, выраженное через эти произвольные голоморфные функции. Например, пусть отличны от нуля только функции φ_{00}, φ_{01}, тогда

$$W=\sum_{k=0}^{\infty}\left[z_2^{2k}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\frac{\partial^{2k}}{\partial z_2^{2k}}\varphi_{00}+z_2^{2k+1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{\partial^{2k}}{\partial z_2^{2k}}\varphi_{01}\right] \tag{10}$$

Представим рекуррентные соотношения (9) в другой форме, предполагая, что начало координат принадлежит области

$$\varphi_{n_1+1n_2}=-\frac{1}{2(n_1+1)}\int\limits_0^{z_1}\left[\frac{\partial^2}{\partial z_2{}^2}\varphi_{n_1n_2}+(n_2+1)(n_2+2)\varphi_{n_1n_2+1}\right]dz_1+g_{n_1}(z_2) \tag{11}$$

Тогда в качестве определяющей системы функций можно выбрать следующую

$$\{\varphi_{0n_2}(z_1,\ z_2);\ g_{n_1}(z_2)\}\qquad (n_1,\ n_2=0,\ 1,\ldots)$$

Раскладывая произвольные голоморфные функции по полной системе голоморфных функций для области D, можно получить полную систему частных решений уравнений динамической задачи теории упругости. Тогда решение краевой задачи состоит в подборе линейной комбинации частных решений с целью удовлетворения поставленных краевых условий, что можно, например, сделать методом поточечного удовлетворения краевым условиям. Вопрос о построении полной системы голоморфных функций для заданной области решается в достаточно развитой в настоящее время теории функций многих комплексных переменных [4, 5].

Рассмотрим теперь уравнения теории упругости для установившихся колебаний с круговой частотой ω. Соответствующие уравнения для скалярного и векторного потенциалов будут иметь следующий вид:

$$\nabla^2\Phi-\frac{\omega^2}{c_1{}^2}\Phi=0,\qquad \nabla^2\Psi_i-\frac{\omega^2}{c_2{}^2}\Psi_i=0\quad (i=1,2,3) \tag{12}$$

Так же как и в общем случае динамической задачи, введем комплексную структуру

$$z_1=x_1+ix_2,\quad z_2=x_3+ix_4$$

При этом x_4 — некоторая произвольная координата, от которой скалярный и векторный потенциалы не зависят.

Вводя комплексные функции W_1, W_2, W_3 как и в общем случае, запишем уравнения (12) в следующей форме:

$$4\frac{\partial^2}{\partial z_1\,\partial\bar z_1}W_i+2\frac{\partial^2}{\partial z_2\,\partial\bar z_2}W_i+\frac{\partial^2}{\partial z_2{}^2}W_i+\frac{\partial^2}{\partial\bar z_2{}^2}W_i-a_i{}^2W_i=0 \tag{13}$$

$$a_1{}^2=\omega^2/c_1{}^2,\quad a_2{}^2=a_3{}^2=\omega^2/c_2{}^2\quad (i=1,2,3)$$

К уравнениям (13) следует добавить условие независимости W_i от x_4:

$$\frac{\partial}{\partial z_2}W_i-\frac{\partial}{\partial\bar z_2}W_i=0\quad (i=1,2,3) \tag{14}$$

Таким образом, для изучения установившихся колебаний необходимо получить общее решение следующей системы уравнений:

$$\begin{gathered}4\frac{\partial^2}{\partial z_1\,\partial\bar z_1}W+2\frac{\partial^2}{\partial z_2\,\partial\bar z_2}W+\frac{\partial^2}{\partial z_2{}^2}W+\frac{\partial^2}{\partial\bar z_2{}^2}W-a^2W=0\\ \frac{\partial}{\partial z_2}W-\frac{\partial}{\partial\bar z_2}W=0\end{gathered} \tag{15}$$

Подставляя в (15) выражение (8) и приравнивая коэффициенты при $z_1^{n_1}z_2^{n_2}$ нулю, получим следующую цепочку зацепляющихся уравнений:

$$4(n_1+1)\frac{\partial}{\partial z_1}\varphi_{n_1+1n_2}+2(n_2+1)\varphi_{n_1n_2+1}+(n_2+1)(n_2+2)\varphi_{n_1n_2+2}+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\varphi_{n_1n_2}-a^2\varphi_{n_1n_2}=0 \tag{16}$$

$$(n_2+1)\varphi_{n_1n_2+1}-\frac{\partial}{\partial z_2}\varphi_{n_1n_2}=0$$

Используя второе соотношение из (16), запишем первое соотношение в следующем виде

$$4(n_1+1)\frac{\partial}{\partial z_1}\varphi_{n_1+1n_2}+2\frac{\partial}{\partial z_2}\varphi_{n_1n_2}+2\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\varphi_{n_1n_2}-a^2\varphi_{n_1n_2}=0 \tag{17}$$

Считая начало координат расположенным внутри области, соотношение (16) можно преобразовать к виду

$$\varphi_{n_1+1n_2}=\int\limits_0^{z_1}\left[\frac{a^2}{4(n_1+1)}\varphi_{n_1n_2}-\frac{1}{2(n_1+1)}\frac{\partial}{\partial z_2}\varphi_{n_1n_2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2(n_1+1)}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\varphi_{n_1n_2}\right]dz_1+g_{n_1}(z_2)$$

$$\varphi_{n_1n_2+1}=\frac{1}{n_2+1}\frac{\partial}{\partial z_2}\varphi_{n_1n_2} \tag{18}$$

где $g_{n_1}(z_2)$ — произвольные голоморфные функции одного комплексного переменного z_2.

Следовательно, определяющая система голоморфных функций для получения искомого комплексного потенциала рассматриваемой задачи состоит из функций $\{\varphi_{00}(z_1,z_2);\ g_{n_1}(z_2)\}$ $(n_1=0,1,\ldots)$.

Для плоских задач теории упругости соотношения (9), (16) следует дополнить соотношениями, выражающими условие независимости рассматриваемых потенциалов от координаты x_3. Эти соотношения имеют вид

$$(n_2+1)\varphi_{n_1n_2+1}+\frac{\partial}{\partial z_2}\varphi_{n_1n_2}=0 \tag{19}$$

Соотношения (9), (19) дают следующие рекуррентные формулы:

$$\varphi_{n_1+1n_2}=-\frac{1}{n_1+1}\int\limits_0^{z_1}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\varphi_{n_1n_2}dz_1+g_{n_1}(z_2),\quad \varphi_{n_1n_2+1}=-\frac{1}{n_2+1}\frac{\partial}{\partial z_2}\varphi_{n_1n_2} \tag{20}$$

где $g_{n_1}(z_2)$ — произвольные голоморфные функции одного комплексного переменного z_2.

Соотношения (20) показывают, что в качестве определяющей системы голоморфных функций для вычисления потенциалов в плоских динамических задачах теории упругости можно выбирать следующую систему функций $\{\varphi_{00}(z_1,z_2);\ g_{n_1}(z_2)\}$ $(n_1=0,1,\ldots)$.

В случае установившихся колебаний соотношение (19) совместно со вторым соотношением из (16) позволяют сделать вывод о том, что $\varphi_{n_1n_2}\equiv 0$ при $n_2\neq 0$, а оставшиеся функции зависят только от z_1:

$$\varphi_{00}=\varphi_0(z_1),\ \varphi_{10}=\varphi_1(z_1),\ \ldots,\ \varphi_{n_10}=\varphi_{n_1}(z_1),\ \ldots$$

Первое соотношение в (16) дает связь между этими функциями

$$a^2\varphi_{n_1}(z_1)=4(n_1+1)\frac{\partial}{\partial z_1}\varphi_{n_1+1}(z_1) \tag{21}$$

Следовательно

$$\varphi_{n_1+1}(z_1)=-\frac{a^2}{4(n_1+1)}\int\limits_0^{z_1}\varphi_{n_1}(z_1)\,dz_1+c_{n_1}$$

где c_{n_1} — произвольные константы.

В качестве определяющей системы в этом случае можно выбрать следующую систему $\{\varphi_0(z_1);\ c_{n_1}\}$ $(n_1=0, 1, \ldots)$. Если $a=0$, что соответствует плоской статической задаче теории упругости, то искомый комплексный потенциал будет представляться в виде суммы голоморфной и антиголоморфной функций. Так как в плоской статической задаче теории упругости решение определяется через два действительных потенциала, каждый из которых, являясь действительной частью соответствующего комплексного потенциала, выражается через две голоморфные функции, то, объединяя соответствующие произвольные голоморфные функции, нетрудно получить общее решение уравнений плоской статической задачи теории упругости, зависящее от двух произвольных голоморфных функций, что вполне соответствует известным формулам Г. В. Колосова — Н. И. Мусхелишвили.

Преимущество предлагаемого подхода к решению динамических задач теории упругости состоит в том, что он позволяет получать приближенные решения краевых задач, тождественно удовлетворяющие уравнениям движения. Кроме того, решения представляются через голоморфные функции, обладающие рядом замечательных свойств, позволяющих, например, достаточно легко раскладывать искомые функции в ряды, использовать голоморфные отображения сложных областей на более простые, а также использовать интегральные представления искомых функций по их граничным значениям.

Поступила 10 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александрович А. И.* Применение теории функций двух комплексных переменных к теории упругости. Докл. АН СССР, 1977, т. 232, № 3.
2. *Александрович А. И.* Применение теории функций двух комплексных переменных к решению пространственных задач теории упругости. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 2.
3. *Новацкий В.* Теория упругости. М., «Мир», 1975.
4. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ, часть 2. М., «Наука», 1976.
5. *Ганнинг Р., Росси Х.* Аналитические функции многих комплексных переменных. М., «Мир», 1969.