

ОПТИМИЗАЦИЯ АНИЗОТРОПНЫХ СВОЙСТВ
ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД В ПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

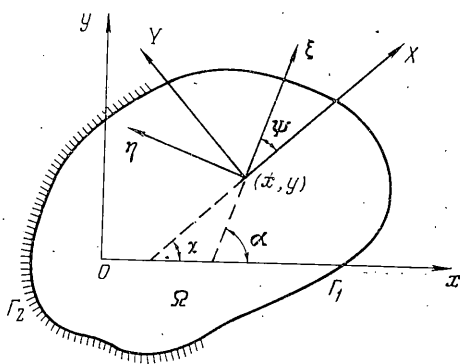
Н. В. БАНИЧУК

(Москва)

Задачи оптимизации внутренней структуры упругих тел представляют интерес в связи с исследованием наилучших способов армирования конструкций. Некоторые вопросы выбора оптимальных распределений модулей жесткости упругих тел изучены в работах [1-4].

В данной работе рассмотрена задача об оптимальной ориентации осей анизотропии в каждой точке плоского деформируемого тела. Приводятся условия оптимальности. Анализ условий оптимальности и стационарных способов ориентации упругих модулей показывает, что необходимые условия экстремума не выделяют однозначным образом наилучшую ориентацию осей анизотропии. Основные трудности решения оптимальной задачи обусловлены необходимостью рассмотрения различных сочетаний стационарных способов ориентации, примененных в отдельных областях тела, и сравнения значений, принимаемых функционалом. Получено аналитическое решение задачи оптимизации анизотропных свойств упругой плоскости с круговым отверстием, к границам которого приложено равномерное давление. Для двумерных задач предложен численный способ определения оптимальных решений.

1. Рассмотрим в прямоугольной системе координат xu плоскую задачу теории упругости о равновесии упругого анизотропного тела, нагруженного силами (q_x, q_y) на части контура Γ_1 и жестко закрепленного на части контура Γ_2 . Будем считать, что свойства материала не меняются в направлении оси z , ортогональной к плоскости xu , и что деформация $\epsilon_z = 0$ (случай плоской деформации). Предположим, что среда является локально ортотропной и обозначим через ξ, η оси ортотропии. В точке с координатами x, y положение осей ортотропии $\xi\eta$ относительно осей xu зададим с помощью угла $\alpha = \alpha(x, y)$, где α — угол между осями x и ξ (см. фиг. 1). Значения констант ортотропии $A_{11}^\circ, A_{12}^\circ, A_{13}^\circ, A_{22}^\circ, A_{23}^\circ, A_{33}^\circ, A_{44}^\circ, A_{55}^\circ, A_{66}^\circ$ [5] считаются заданными. Равновесие упругого тела при указанных граничных условиях характеризуется вариационным принципом



Фиг. 1

$$\Pi = \iint_{\Omega} f dx dy - \int_{\Gamma_1} (uq_x + vq_y) ds \rightarrow \min_{u, v} \quad (1.1)$$

$$f = 1/2 (A_{11}\epsilon_x^2 + A_{22}\epsilon_y^2 + A_{66}\gamma_{xy}^2) + A_{12}\epsilon_x\epsilon_y + A_{16}\epsilon_x\gamma_{xy} + A_{26}\epsilon_y\gamma_{xy}$$

где u, v — перемещения вдоль осей x, y , а через $\varepsilon_x, \dots, \varepsilon_{xy} = 1/2 \gamma_{xy}, \sigma_x, \dots, \tau_{xy}$ обозначены компоненты тензоров деформации и напряжений. Модули упругости A_{ij} в фиксированной системе координат xy связаны с заданными константами A_{ij}° в системе $\xi\eta$ известными формулами перехода [3]:

$$\begin{aligned} A_{11} &= c_1 \cos^4 \alpha + c_2 \sin^4 \alpha + c_3, & A_{22} &= c_1 \sin^4 \alpha + c_2 \cos^4 \alpha + c_3 \\ A_{12} &= (c_1 + c_2) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + A_{12}^\circ, & A_{16} &= \sin \alpha \cos \alpha (c_2 \sin^2 \alpha - c_1 \cos^2 \alpha) \\ A_{26} &= \cos \alpha \sin \alpha (c_2 \cos^2 \alpha - c_1 \sin^2 \alpha), & A_{66} &= (c_1 + c_2) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + A_{66}^\circ \\ c_1 &= A_{11}^\circ - A_{12}^\circ - 2A_{66}^\circ, & c_2 &= A_{22}^\circ - A_{12}^\circ - 2A_{66}^\circ, & c_3 &= A_{12}^\circ + 2A_{66}^\circ \end{aligned} \quad (1.2)$$

Величины A_{ij} являются функциями угла α , т. е. $A_{ij} = A_{ij}(\alpha)$, а Π — функционал от $\alpha(x, y)$. Заметим, что минимум по u и v в (1.1) разыскивается на классе функций $u(x, y), v(x, y)$, удовлетворяющих кинематическим условиям на Γ_2 . Граничные условия на Γ_1 , как известно, являются естественными для функционала (1.1) и удовлетворять им заранее не требуется.

Примем величину работы внешних сил, приложенных к контуру Γ_1 , в качестве оптимизируемого критерия качества

$$J(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} (uq_x + vq_y) ds \quad (1.3)$$

и рассмотрим задачу минимизации этого функционала

$$J_* = \min_{\alpha} J(\alpha) \quad (1.4)$$

за счет соответствующего выбора распределения углов наклона $\alpha(x, y)$ осей ортотропии в каждой точке $(x, y) \in \Omega$ по отношению к неподвижной системе осей xy . Функционал J называется податливостью упругого тела.

2. Стандартный способ получения условий оптимальности, как известно, связан с учетом дифференциальных связей (в данном случае уравнений равновесия для u и v) и введением сопряженных переменных. Однако для рассматриваемой задачи вследствие того, что уравнения равновесия в перемещениях являются уравнениями Эйлера для функционала (1.1), задачу оптимизации можно переформулировать аналогично [4] и исключить из рассмотрения дифференциальные связи.

С этой целью, используя теорему Клапейрона, выполним следующие преобразования (см. [4]):

$$J_* = \min_{\alpha} (-\min_{u,v} \Pi) = -\max_{\alpha} \min_{u,v} \Pi.$$

Таким образом, задача (1.4) сводится к отысканию максимума. Для удобства получения условий стационарности Π по α и сокращения выкладки введем в рассмотрение в каждой точке (x, y) систему главных осей деформации XU и обозначим компоненты тензора деформации в этих осях через $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ ($\varepsilon_{xy} = 0$). Обозначим через ψ и χ соответственно углы между осями X и ξ, x и X ($\psi = \alpha - \chi$, фиг. 1). Величины $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ и $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ связаны между собой известными формулами перехода

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x \cos^2 \chi + \varepsilon_y \sin^2 \chi + \gamma_{xy} \sin \chi \cos \chi \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_x \sin^2 \chi + \varepsilon_y \cos^2 \chi - \gamma_{xy} \sin \chi \cos \chi \\ \varepsilon_{xy} &= 1/2 (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \sin 2\chi + 1/2 \gamma_{xy} \cos 2\chi = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Выражение (1.1) для f преобразуем к виду

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} A_{11}(\psi) \varepsilon_x^2 + A_{12}(\psi) \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1}{2} A_{22}(\psi) \varepsilon_y^2 = N \cos^4 \psi + Q \cos^2 \psi + R \\ N &= \frac{1}{2} (c_1 + c_2) (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2, \quad Q = (\varepsilon_x - \varepsilon_y) (c_1 \varepsilon_y - c_2 \varepsilon_x) \\ R &= \frac{1}{2} A_{22}^\circ \varepsilon_x^2 + A_{12}^\circ \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1}{2} \varepsilon_y^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ определены соотношениями (2.1). Таким образом функционал Π представлен при помощи (1.2), (2.1), (2.2) через два угла ψ и χ , между которыми имеется связь $\psi + \chi = \alpha$. При получении необходимых условий экстремума потребуем выполнения равенства нулю первой вариации функционала Π , обусловленной вариациями $\delta\alpha, \delta u, \delta v$. Заметим, что при варьировании Π по u, v и α (как это обычно делается для функционалов, зависящих от вектор-функции [6, 7]) величины u, v и α считаются независимыми. Следовательно, при этом можно считать не зависящим от α и угол χ , входящий в выражения (2.1), (2.2) и определяемый из третьего соотношения (2.1) в зависимости только от компонент деформации $\operatorname{tg} 2\chi = \gamma_{xy} / (\varepsilon_x - \varepsilon_y)$. Поэтому при выписывании первой вариации полагаем $\delta f / \delta \alpha = \delta f / \delta \psi$. В качестве условия стационарности по α будем иметь $\sin 2\psi (2N \cos^2 \psi + Q) = 0$.

Это условие содержит в себе три различных экстремальных способа ориентации осей

$$\begin{aligned} \cos \psi &= 0, \quad \sin \psi = 0 \\ \cos^2 \psi &= -Q/2N \quad \text{при } 0 \leq -Q/2N \leq 1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ориентация осей ортотропии согласно третьему способу возможна только при выполнении неравенства, указанного в (2.3). Поясним это, используя представление для f в виде квадратичного трехчлена $f = Nt^2 + Qt + R$ относительно переменной $t = \cos^2 \psi$. Так как t изменяется на отрезке $0 \leq t \leq 1$, то экстремум f по t может реализоваться либо в граничных точках отрезка $t=0$ и $t=1$, что соответствует первому и второму случаям, либо во внутренней точке. Неравенство (2.3) выражает условие принадлежности t отрезку $[0, 1]$.

Приведем выражения для потенциала f , соответствующие всем трем случаям.

$$\begin{aligned} (f)_1 &= \frac{1}{2} A_{22}^\circ \varepsilon_x^2 + A_{12}^\circ \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1}{2} A_{11}^\circ \varepsilon_y^2 = \frac{1}{8} A_{22}^\circ [\varepsilon_x + \varepsilon_y + \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}]^2 + \\ &\quad + \frac{1}{8} A_{11}^\circ [\varepsilon_x + \varepsilon_y - \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}]^2 + A_{12}^\circ (\varepsilon_x \varepsilon_y - \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2) \\ (f)_2 &= \frac{1}{2} A_{11}^\circ \varepsilon_x^2 + A_{12}^\circ \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1}{2} A_{22}^\circ \varepsilon_y^2 = \frac{1}{8} A_{11}^\circ [\varepsilon_x + \varepsilon_y + \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}]^2 + \\ &\quad + \frac{1}{8} A_{22}^\circ [\varepsilon_x + \varepsilon_y - \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}]^2 + A_{12}^\circ (\varepsilon_x \varepsilon_y - \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2) \\ (f)_3 &= D_1 (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2D_2 \varepsilon_x \varepsilon_y) = D_1 [(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 + (D_2 - 1) (\varepsilon_x \varepsilon_y - \frac{1}{2} \gamma_{xy}^2)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

где D_1, D_2 — постоянные, выражающиеся через константы A_{ij}°

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{A_{11}^\circ A_{22}^\circ - (A_{12}^\circ + 2A_{66}^\circ)^2}{2(A_{11}^\circ + A_{22}^\circ - 2A_{12}^\circ - 4A_{66}^\circ)} \\ D_2 &= \frac{A_{11}^\circ A_{22}^\circ - (A_{12}^\circ)^2 - 2A_{66}^\circ (A_{11}^\circ + A_{22}^\circ - 2A_{66}^\circ)}{A_{11}^\circ A_{22}^\circ - (A_{12}^\circ + 2A_{66}^\circ)^2} \end{aligned}$$

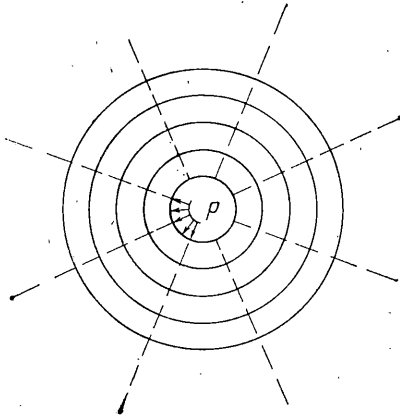
Для определенности в дальнейшем будем предполагать $A_{11}^\circ > A_{22}^\circ$.

3. Применим соотношения (2.3), (2.4) к конкретной задаче оптимизации анизотропных свойств упругой плоскости с круговым отверстием. Область Ω имеет вид $r \geq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, где a — радиус отверстия, а r и θ — полярные координаты, начало которых совмещено с центром отверстия.

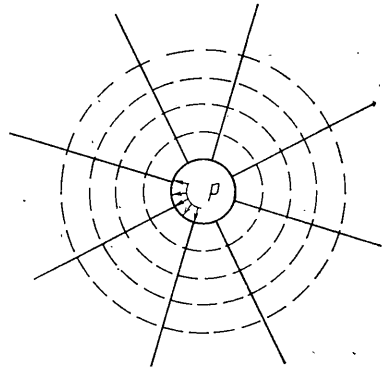
К границе Γ ($r=a$) приложены постоянные нормальные усилия величины p , т. е.

$$\sigma_r = p, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (3.1)$$

Наличие осевой симметрии обуславливает независимость от θ углов наклона осей ортотропии α и радиальных перемещений u , т. е. $\alpha = \alpha(r)$, $u = u(r)$. При этом касательные напряжения, сдвиговые деформации и перемещения в окружном направлении обращаются в нуль ($\tau_{r\theta} = 0$, $\gamma_{r\theta} = 0$, $v = 0$). Главные оси тензора деформации имеют в каждой точке (r, θ) об-



Фиг. 2



Фиг. 3

ласти Ω радиальное и окружное направления. Минимизируемый функционал (1.3), вычисляемый вдоль контура Γ , будет пропорционален радиальному смещению $u(a)$ точек контура и его значение $J = 2\pi r p u(a)$ принято в качестве меры жесткости.

Решая поставленную задачу оптимизации жесткости рассмотрим сначала случай, когда для всех точек области Ω реализуется одинаковый способ ориентации осей ортотропии. Пусть $\cos \psi = 0$ в Ω . Это соответствует тому, что ось ортотропии с максимальным модулем A_{11}° ориентирована в окружном направлении, а ось с минимальным модулем A_{22}° — в радиальном направлении. На фиг. 2 сплошными и штрихпунктирными линиями показаны соответственно направления с большим и меньшим модулем. При этом выражение для f , уравнение равновесия и распределение радиальных перемещений имеют вид

$$f = \frac{1}{2} A_{22}^\circ \varepsilon_r^2 + A_{12}^\circ \varepsilon_r \varepsilon_\theta + \frac{1}{2} A_{11}^\circ \varepsilon_\theta^2, \quad u_{rr} + \frac{u_r}{r} - \kappa^2 \frac{u}{r^2} = 0 \quad (3.2)$$

$$u = C_1 r^\kappa + C_2 r^{-\kappa}, \quad \kappa = \sqrt{A_{11}^\circ / A_{22}^\circ} > 1$$

Определяя неизвестные константы C_1 , C_2 из первого граничного условия (3.1) и условия в бесконечно удаленной точке $\sigma_r = 0$, получим

$$u = p a^{\kappa+1} / \gamma r^\kappa, \quad J = 2\pi \gamma^{-1} a^2 p^2, \quad \gamma = \sqrt{A_{11}^\circ A_{22}^\circ - A_{12}^\circ} \quad (3.3)$$

Если $\sin \psi = 0$ при $r \geq a$, то ось ортотропии с большим модулем A_{11}° имеет радиальное направление. В этом случае направления с большим модулем показаны на фиг. 3 сплошными и штрихпунктирными линиями.

Запишем соответствующее выражение для f , уравнение равновесия и распределение радиальных перемещений

$$f = \frac{1}{2} A_{11}^\circ \varepsilon_r^2 + A_{12} \varepsilon_r \varepsilon_\theta + \frac{1}{2} A_{22} \varepsilon_\theta^2, \quad u_{rr} + \frac{u_r}{r} - k^2 \frac{u}{r^2} = 0 \quad (3.4)$$

$$u = C_1 r^k + C_2 r^{-k}, \quad k = 1/\kappa = \sqrt{A_{22}^\circ/A_{11}^\circ} < 1$$

С учетом граничных условий при $r=a$ и $r \rightarrow \infty$ на основании (3.4) имеем

$$u = \rho a^{k+1}/\gamma r^k, \quad J = 2\pi \gamma^{-1} a^2 \rho^2 \quad (3.5)$$

Сравнивая (3.3), (3.5) заметим, что способы ориентации осей ортотропии (2.3.1) и (2.3.2) приводят к одинаковым значениям минимизируемого функционала J .

В случае третьего способа ориентации осей анизотропии, когда $\cos^2 \psi = -Q/2N$ в Ω , приходим к следующим выражениям для f , u и уравнению равновесия

$$f = D_1 (\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2 + 2D_2 \varepsilon_r \varepsilon_\theta), \quad u_{rr} + \frac{u_r}{r} - \frac{u}{r^2} = 0$$

$$u = C_1 r + C_2 r^{-1} \quad (3.6)$$

Вычисляя константы C_1, C_2 определим распределение напряжений, величину $\cos^2 \psi$ и значение минимизируемого функционала

$$u = \rho a^2 / 2r A_{66}^\circ, \quad J = \pi a^2 \rho^2 / A_{66}^\circ, \quad \cos^2 \psi = 1/2 \quad (3.7)$$

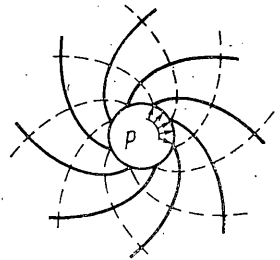
Оси ортотропии в этом случае направлены по касательным к линиям, показанным на фиг. 4. Из сравнений значений функционала (3.3), (3.5), (3.7) следует, что если

$$\sqrt{A_{11}^\circ A_{22}^\circ} - A_{12}^\circ > 2A_{66}^\circ \quad (3.8)$$

то к наибольшей жесткости приводят способы ориентации осей анизотропии (2.3.1), (2.3.2). Если же в (3.8) имеет место знак обратного неравенства, то меньшее значение функционала J реализуется для способа ориентации (2.3.3).

Выше рассматривались стационарные решения, полученные в предположении, что каждый из способов ориентации реализован во всей области Ω . Оптимальным не может оказаться решение, «составленное» из областей с различными стационарными способами распределения модулей. Поэтому нужно также исследовать возможности сочетания в Ω всех способов (2.3), допуская, что область Ω распадается на кольцевые зоны, разделенные окружностями ($r=r_i$), в которых реализуются различные ориентации осей ортотропии.

Решение этого вопроса приводит к задачам с неизвестными границами, причем при $r=r_i$ непрерывны напряжения σ_r , а производные u_r терпят разрыв. Используя в точках $r=r_i$ условия Вейерштрасса — Эрдмана и проводя элементарные, но громоздкие вычисления, можно показать, что, если модули упругости $A_{11}^\circ, A_{22}^\circ, A_{66}^\circ$ удовлетворяют неравенству (3.8), то сшивки областей с различными типами ориентаций осей ортотропии не приводят к значению функционала, меньшему величины J из (3.3), (3.5). Если же неравенство (3.8) не выполняется, то сочетание указанных областей не позволяет достигнуть значений функционала, меньшего значения J из (3.7). Заметим, что при сшивке любого числа областей вида (2.3.1) и (2.3.2) (в этих областях реализованы указанные способы ориентации (2.3.1) и (2.3.2)) значение функционала оказывается равным вели-



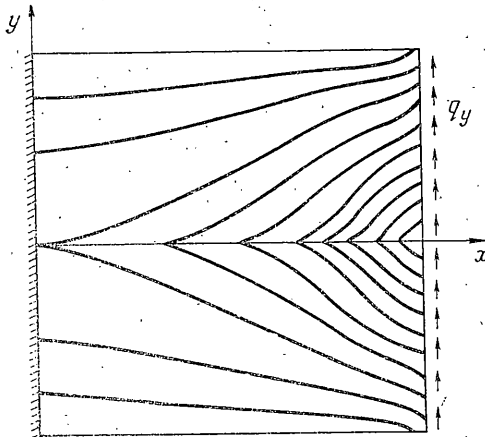
Фиг. 4

чине J из (3.3), (3.5), т. е. остается тем же, что и для случаев, когда во всей области Ω реализуется какой-нибудь один из этих способов. Таким образом, при выполнении неравенства (3.8) оптимальными оказываются способы ориентации (2.3.1) и (2.3.2), а в противном случае — способ ориентации (2.3.3).

Замечание. В рассмотренной задаче способы ориентации (2.3.1), (2.3.2), реализованные во всей области Ω , а также произвольное сочетание областей, в которых оси ортотропии ориентированы таким способом, приводят к одинаковым значениям функционала. Однако это свойство связано с бесконечностью области Ω и не справедливо для конечных кольцевых областей.

Действительно, рассматривая случай кольцевой области $\Omega \{a \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, когда на внутренней границе $r=a$ заданы условия (3.1), а внешняя граница свободна от напряжений, получим, что для любых a и b к меньшему значению J приводит способ ориентации осей (2.3.1).

4. Приведем пример численного решения одной задачи оптимизации¹ для прямоугольной области Ω . В п. 2 было показано, что минимизация податливости (максимизация жесткости) сводится к отысканию максимина потенциальной энергии системы Π . Для численного решения этой задачи применим метод последовательной оптимизации, описанный в работах [8, 9]. При использовании этого метода вариация управляющей функции $\delta\alpha$ полагалась равной $\delta\alpha (\partial f / \partial \alpha) t$, что обеспечивало положительность вариации функционала



Фиг. 5

$$\begin{aligned} \delta\alpha\Pi = t \iint_{\Omega} & \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial \alpha} \right) \varepsilon_x^2 + \right. \\ & + \left(\frac{\partial A_{12}}{\partial \alpha} \right) \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_{22}}{\partial \alpha} \right) \varepsilon_y^2 + \\ & + \left(\frac{\partial A_{16}}{\partial \alpha} \right) \varepsilon_x \gamma_{xy} + \left(\frac{\partial A_{26}}{\partial \alpha} \right) \varepsilon_y \gamma_{xy} + \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_{66}}{\partial \alpha} \right) \gamma_{xy}^2 \right] dx dy \end{aligned}$$

где t — шаг по градиенту. Расчеты проводились для прямоугольной области Ω ($0 \leq x \leq a$, $-b/2 \leq y \leq b/2$). При этом использовалось отображение области Ω на единичный

квадрат и решение разыскивалось для ряда значений параметра $\lambda = b/a$. Во всех случаях полагалось $E_1 = 17.5$, $E_2 = 13.1$, $E_3 = 5.3$, $G_{12} = 2.82$ (в $\text{кг/см}^2 \cdot 10^4$), $\nu_{12} = 0.1$, $\nu_{23} = 0.17$, $\nu_{31} = 0.229$ (стеклотекстолит), причем для подсчета A_{ij}° использовались формулы

$$\begin{aligned} A_{11}^{\circ} &= e_{22} / (e_{11}e_{22} - e_{12}^2), \quad A_{22}^{\circ} = e_{11} / (e_{11}e_{22} - e_{12}^2), \quad A_{12}^{\circ} = -e_{12} / (e_{11}e_{22} - e_{12}^2) \\ A_{66} &= G_{12}, \quad e_{11} = (E_3 - \nu_{31}^2 E_1) / E_1 E_3, \quad e_{12} = -(\nu_{12} E_2 + E_1 \nu_{23} \nu_{31}) / E_1 E_2 \\ e_{22} &= (E_2 - \nu_{23}^2 E_3) / E_2^2 \end{aligned}$$

Здесь E_1, E_2, E_3 — модули Юнга, G_{12} — модуль сдвига, $\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31}$ — коэффициенты Пуассона.

На фиг. 5 изображено рассчитанное при $\lambda = 1/2$ оптимальное распределение углов $\alpha(x, y)$ для случая, когда край $x=0$, $-1/2 \leq y \leq 1/2$ жестко закреплен ($u = v = 0$), а к краю $x=1$, $-1/2 \leq y \leq 1/2$ приложены нагрузки вида

¹ Решение этой задачи получено автором совместно с А. В. Албулом и Д. А. Епураш.

$q_y=0.001$, $q_x=0$. Вдоль границ $y=\pm 1/2$, $0 \leq x \leq 1$ усилия не прикладываются: $q_x=q_y=0$. Касательные к линиям на фиг. 5 показывают направления с максимальным упругим модулем. Ориентация упругих модулей обладает симметрией относительно линии $y=0$. Сравнение оптимальной пластины с однородной ортотропной пластинкой, у которой ось ортотропии с максимальным модулем параллельна оси x , показывает, что относительный выигрыш в жесткости, получаемый за счет оптимизации, составляет $\sim 10\%$.

Поступила 16 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Аннин Б. Д. Оптимальное проектирование упругих анизотропных неоднородных тел. Тр. III национального конгресса по теоретической и прикладной механике. Варна, Болгария, 1977.
2. Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М., «Машиностроение», 1977.
3. Баничук Н. В. Об одной задаче на экстремум для системы с распределенными параметрами и определении оптимальных свойств упругой среды. Докл. АН СССР, 1978, т. 242, № 5.
4. Баничук Н. В. Об оптимальной анизотропии скручиваемых стержней. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 4.
5. Лезницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М., «Наука», 1977.
6. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М., Физматгиз, 1961.
7. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Вариационное исчисление. М., Гостехиздат, 1951.
8. Баничук Н. В., Каргвелишвили В. М., Миронов А. А. Численное решение двумерных задач оптимизации упругих пластин. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1.
9. Баничук Н. В., Каргвелишвили В. М., Миронов А. А. Об одном численном методе решения двумерных задач оптимизации в теории упругости. Материалы пятой всесоюзной конференции по численным методам решения задач теории упругости и пластичности, ч. 2. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1978.