МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1979

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОЙ И ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ПРИ УЧЕТЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ СТРУКТУРЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ТЕЛ

В. М. АЛЕКСАНДРОВ, И. И. КУДИШ

(Москва)

Модель, учитывающая в контактных задачах поверхностную структуру контактирующих тел, была предложена в [1]. В этой модели предполагалось, что микронеровности взаимодействующих тел деформируются подобно линейным пружинам основания Фусса – Винклера. Несколько позже экспериментами [2] было установлено, что зависимость между сжимающим усилием и деформацией микронеровностей может быть аппроксимирована степенной функцией. С учетом этого факта в 1969 г. Л. А. Галиным впервые была сформулирована нелинейная контактная задача для шероховатых тел. Приближенные решения этой задачи были затем получены в [3–5].

В данной работе исследуются контактные задачи без трения для толстой полосы (толстого слоя) при наличии микронеровностей на контактирующих поверхностях, деформация которых описывается достаточно общей нелинейной функцией давления. Рассматриваются задачи для заранее известной и неизвестной областей контакта.

Для решения указанных задач развивается асимптотический метод, который в ряде случаев позволяет получить приближенные аналитические решения. В качестве большого (малого) параметра принимается отношение характерных деформаций микронеровностей к деформации гладких тел. В результате исследования устанавливается, что в зависимости от значений параметров задачи асимптотические представления контактного давления могут строиться либо с помощью метода регулярных возмущений, либо метода сращиваемых асимптотических разложений [6–8]. В последнем случае в малых окрестностях границ области контакта возникают пограничные слои, в которых происходят резкие изменения давления.

1. Плоская задача. Следуя [5,9], исходные уравнения контактной задачи с учетом шероховатости поверхностей для толстой полосы запишем в виде [1]

$$\varphi_*(p)+\frac{2}{\pi\theta}\int_{-a}^{a}p(t)\ln\frac{1}{|x-t|}\,dt=c-f(x),\quad |x|\leqslant a$$

$$\int_{-a}^{a}p(t)\,dt=P,\qquad c=-\frac{2}{\pi\theta}P(\ln h+a_0)+\delta \tag{1.1}$$

Здесь a — полудлина отрезка контакта; $p(x)$ — контактное давление; P — внешнее усилие, приложенное к штампу; θ — приведенный модуль упругости материалов тел; $\varphi_*(p)$ — функция, характеризующая контактную деформацию микронеровностей под действием давления p; h — толщина полосы $(ha^{-1}\gg 1)$; a_0 — постоянная, значение которой дано в [9]; δ —

[1] Приведенный ниже анализ относится к случаю четной функции $f(x)$. Общий случай рассматривается аналогично.

поступательное перемещение штампа. В случае задачи с неизвестной областью контакта к уравнениям (1.1) необходимо добавить условия $p(\pm a)=0$.

Введем безразмерные величины

$$x'=\frac{x}{a},\ p'(x)=\frac{p(x)}{p_*},\ \varphi_*'(p)=\frac{\theta}{p_*a_*}\varphi_*(p),\ f'(x)=\frac{\theta}{p_*a_*}f(x)$$

$$c'=\frac{\theta}{p_*a_*}c-\ln\frac{1}{a_*},\quad \beta=\frac{a}{a_*}$$

где $a_*=a$ для задачи с фиксированной областью контакта ($\beta=1$), а для задачи с неизвестной областью контакта a_* — полудлина герцевского отрезка контакта при заданном P и $f(x)=x^2/2R$ (R — приведенный радиус взаимодействующих тел в точке $x=0$); p_* — характерное давление, $p_*a_*=2P/\pi$.

В этом случае уравнения исходной задачи могут быть записаны в следующей безразмерной форме (штрихи опущены):

$$\lambda\varphi(p,\lambda)+\frac{2}{\pi}\beta\int_{-1}^{1}p(t)\ln\frac{1}{|x-t|}dt=c-f(\beta x),\qquad |x|\leqslant 1 \tag{1.2}$$

$$\int_{-1}^{1}p(t)\,dt=\frac{\pi}{2\beta},\quad p(\pm 1)=0 \tag{1.3}$$

При этом в уравнении (1.2) учтено, что $\varphi_*(p)=\lambda\varphi(p,\lambda)$, где λ — безразмерный параметр, равный отношению характерных деформаций микронеровностей к деформации гладких тел и зависящий от конкретного вида функции $\varphi_*(p)$.

Будем предполагать в дальнейшем, что $\varphi(p,\lambda)$ — кусочно-гладкая функция и $\lambda>0$

$$\begin{gathered}\varphi(p,\lambda),\quad \varphi_p'(p,\lambda)>0\quad \text{при } p,\lambda>0\\ \varphi(p,\lambda)=A(\lambda)p^\alpha+\ldots,\quad \alpha>0\ \text{ при }\ p\to\infty\quad (p\to 0)\\ A(\lambda)=A(0)+\ldots,\quad A(0)>0\ \text{ при }\ \lambda\ll 1\end{gathered} \tag{1.4}$$

Ниже для случаев $\lambda\gg 1$ и $\lambda\ll 1$ предлагается асимптотический метод решения уравнения (1.2) при дополнительных условиях (1.3).

1. Рассмотрим плоскую задачу с фиксированной областью контакта, при этом $\beta=1$. Временно считая $\varphi(p,\lambda)$ известной функцией переменной x, представим решение задачи (1.2), (1.3) (первое условие) в виде [1]:

$$\begin{gathered}p(x)=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\left\{1+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f'(t)\sqrt{1-t^2}\,dt}{t-x}+\frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_p'(p(t),\lambda)p'(t)\sqrt{1-t^2}\,dt}{t-x}\right\}\\ c=\ln 2+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(p(t),\lambda)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}\end{gathered} \tag{1.5}$$

Уравнения (1.2), (1.3) (первое условие) и (1.5) эквивалентны при условии $\beta=1$.

Изложим метод регулярных возмущений. Рассмотрим случай $\lambda\gg 1$. При этом решение в главном определяется взаимодействием микронеровностей. В общем случае решение исходных уравнений следует искать в виде разложений[1] по заранее неизвестным функциям $\mu_k(\lambda)$ и $\delta_k(\lambda)$:

$$p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k(\lambda)p_k(x),\qquad |x|\leqslant 1,\qquad c=\sum_{k=0}^{\infty}\delta_k(\lambda)c_k \tag{1.6}$$

С учетом (1.6) функция $\varphi(p,\lambda)$ может быть разложена в асимптотический ряд

$$\varphi(p,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k{}^\circ(\lambda)\varphi_k(p_0,\ldots,p_k) \tag{1.7}$$

Подставив затем (1.6) и (1.7) в соответствующие уравнения (1.2), (1.3), а также использовав соотношение $\beta=1$, в процессе решения задачи будем получать выражения для $\mu_k(\lambda)$, $\delta_k(\lambda)$ и уравнения для определения $p_k(x)$ и c_k [6–8].

Изложим указанную процедуру решения на примере, когда асимптотические последовательности функций $\{\mu_k(\lambda)\}$, $\{\delta_k(\lambda)\}$, $\{\mu_k{}^\circ(\lambda)\}$ могут быть указаны заранее, до решения задачи

$$\mu_k(\lambda)=\mu_k{}^\circ(\lambda)=\lambda^{-k},\qquad \delta_k(\lambda)=\lambda^{1-k}\qquad (k=0,1,\ldots) \tag{1.8}$$

С помощью (1.6) – (1.8) получим для первых членов асимптотических разложений $p(x)$ и c уравнения

$$\varphi(p_0(x),\infty)=c_0,\qquad \int_{-1}^{1}p_0(t)\,dt=\frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_p{}'(p_0(x),\infty)p_1(x)+\varphi_{\lambda^{-1}}'(p_0(x),\infty)+\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}p_0(t)\ln\frac{1}{|x-t|}\,dt=c_1-f(x) \tag{1.9}$$

$$\int_{-1}^{1}p_1(t)\,dt=0$$

и так далее. Из (1.4) следует, что уравнения (1.9) разрешимы, причем

$$p_0(x)=\pi/4,\qquad c_0=\varphi(\pi/4,\infty)$$

$$p_1(x)=\left[\varphi_p{}'\left(\frac{\pi}{4},\infty\right)\right]^{-1}\left\{\frac{1}{2}-\ln 2+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(t)\,dt+\frac{1}{2}(1-x)\ln(1-x)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(1+x)\ln(1+x)-f(x)\right\},\qquad c_1=\frac{3}{2}-\ln 2+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\,dx+\varphi_{\lambda^{-1}}'\left(\frac{\pi}{4},\infty\right) \tag{1.10}$$

Совокупность формул (1.6) – (1.8) и (1.10) определяет двучленное асимптотическое разложение решения поставленной задачи равномерно пригодное на отрезке $[-1,1]$.

Из вида $p_0(x)$ и $p_1(x)$ следует, что гладкость $p(x)$ при $\lambda\gg 1$ на интервале $(-1,1)$ определяется гладкостью $f(x)$, а при $x\to\pm 1$ – $p''(x)\to\infty$, если $f''(\pm 1)$ ограничена.

Изложим теперь метод сингулярных возмущений. Исследуем уравнения (1.5) при $\lambda\ll 1$ методом сращиваемых асимптотических разложений, огра-

[1] Представление решения в виде бесконечного ряда возможно лишь для бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(p,\lambda)$ в окрестности точки $p=p_0$.

ничиваясь рассмотрением лишь главных членов асимптотических рядов. Для возможности построения этих членов достаточно, чтобы выполнялись условия (1.4). Будем также предполагать, что $f'(x)$ удовлетворяет условию Гельдера на отрезке $[-1,1]$.

Под внешней областью будем понимать интервал, на котором в качестве решения уравнений (1.5) с малой ошибкой может быть принято решение вырожденной задачи

$$p_0(x)=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\left\{1+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f'(t)\sqrt{1-t^2}\,dt}{t-x}\right\},\quad c_0=\ln 2+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad (1.11)$$

соответствующей задаче о вдавливании штампа с острыми кромками в толстую полосу. Решение задачи (1.11) легко может быть получено предельным переходом $\lambda\to 0$ при $x\pm 1\sim 1$ и $p(x)\sim 1$. Внутренними областями будем называть малые окрестности точек $x=\pm 1$ с характерными размерами $\varepsilon=\varepsilon(\lambda,\alpha)\ll 1$, в которых вклад микронеровностей в решение задачи соизмерим с вкладом $p_0(x)$.

Рассмотрим внутреннюю область, примыкающую к точке $x=-1$, и введем в ней переменную $r=(x+1)/\varepsilon$. Так как $f'(x)$ удовлетворяет условию Гельдера, а штамп имеет острые кромки в точках $x=\pm 1$, постоянная N равна [1]:

$$N=1+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}f'(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt,\quad 0<|N|<\infty,\quad p_0(x)\cong\varepsilon^{-1/2}N/2\sqrt{2r}\ \text{при}\ r\sim 1 \qquad (1.12)$$

Предполагая, что давление во внутренней области (пограничном слое) сращивается с $p_0(x)$ при $x\to -1$, имеем $p(x)\sim\varepsilon^{-1/2}$ при $r\sim 1$.

Ограничиваясь рассмотрением главных членов асимптотик, будем искать решение уравнений (1.5) в виде

$$\begin{gathered} p(x)=p_0(x)+o(1),\quad p_0(x)\sim 1\ \text{при}\ x\pm 1\sim 1 \\ p(x)=\varepsilon^{-1/2}q(r)+o(\varepsilon^{-1/2}),\quad q(r)\sim 1\ \text{при}\ r\sim 1 \qquad (1.13) \\ p(x)=\varepsilon^{-1/2}g(s)+o(\varepsilon^{-1/2}),\quad g(s)\sim 1\ \text{при}\ s\sim 1 \\ c=c_0+\delta_1(\lambda,\alpha)c_1+o(\delta_1),\quad \delta_1\ll 1,\quad c_1\sim 1 \qquad (1.14) \end{gathered}$$

где $p_0(x)$ и c_0 определяются из (1.11), $s=(x-1)/\varepsilon$ — внутренняя переменная в окрестности точки $x=1$.

В уравнении (1.5) для $p(x)$ перейдем к внутренней переменной r и устремим $\lambda\to 0$ при фиксированном $r\sim 1$. Тогда, используя соотношения (1.4), получим для главного члена $q(r)$ разложения $p(x)$ во внутренней области уравнение [6]:

$$q(r)=\frac{1}{2\sqrt{2r}}\left\{N+\alpha\frac{A(0)}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{q'(t)q^{\alpha-1}(t)\sqrt{2t}\,dt}{t-r}\right\} \qquad (1.5)$$

а для характерного размера внутренней области будем иметь

$$\varepsilon(\lambda,\alpha)=\lambda^{2/(\alpha+1)} \qquad (1.16)$$

Аналогичным образом в окрестности точки $x=1$ получим, учитывая четность $f(x)$:

$$p(-x)=p(x),\quad g(s)=q(-s)$$

$$g(s)=\frac{1}{2\sqrt{-2s}}\left\{N+\alpha\frac{A(0)}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{g'(t)g^{\alpha-1}(t)\sqrt{-2t}\,dt}{t-s}\right\} \qquad (1.17)$$

Можно показать, что интегралы, входящие в уравнения (1.15) и (1.17), стремятся к нулю при $r\to\infty$ и $s\to-\infty$ соответственно, то есть $q(r)$ сращивается с $N/2\sqrt{2r}$, а $g(s)$ — с $N/2\sqrt{-2s}$.

Из интегрального условия в (1.5) и соотношений (1.11), (1.13), (1.14) и (1.16) получим

$$c-c_0=\frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(p(t),\lambda)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=O(\varepsilon,\lambda)\tag{1.18}$$

при этом член порядка ε в (1.18) возникает при оценке интеграла по внутренней области, а член порядка λ — по внешней.

Из (1.18) при $0<\alpha<1$ с помощью (1.11) и (1.14), найдем

$$c_1=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(p_0(t),0)\,dt}{\sqrt{1-t^2}},\qquad \delta_1(\lambda,\alpha)=\lambda\tag{1.19}$$

Это означает, что c_1 при $0<\alpha<1$ определяется внешним решением.

Из (1.18) следует, что при $\alpha=1$ внешняя и внутренние области дают вклад одного порядка в c_1. С помощью (1.13) определим равномерно пригодное решение уравнений (1.5) [6]:

$$p_u(x)=\varepsilon^{-1}\frac{8\sqrt{1-x^2}}{N^2}p_0(x)\,q\left(\frac{x+1}{\varepsilon}\right)q\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right)\tag{1.20}$$

Тогда с помощью (1.14), (1.18) и (1.20) получим

$$c_1=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(p_u(t),0)\,dt}{\sqrt{1-t^2}},\qquad \delta_1(\lambda,1)=\lambda\tag{1.21}$$

При $\alpha>1$ из (1.16) и (1.18) следует, что основной вклад в c_1 дают внутренние области, поэтому на основании (1.14) будем иметь

$$c_1=2\frac{A(0)}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{q^\alpha(t)\,dt}{\sqrt{2t}},\qquad \delta_1(\lambda,\alpha)=\varepsilon\tag{1.22}$$

Отметим, что осадка c в данном случае больше, чем при контакте гладких тел.

2. Рассмотрим плоскую задачу с неизвестной границей области контакта. Исключив с помощью второго условия в (1.3) и (1.4) из уравнения (1.2) постоянную c, получим

$$\lambda\varphi(p,\lambda)+\frac{2}{\pi}\beta\int_{-1}^{1}p(t)\ln\frac{1-t}{|x-t|}\,dt=f(\beta)-f(\beta x),\qquad |x|\leqslant 1\tag{1.23}$$

Изложим решение этой задачи на примере, когда $f(\beta x)=\beta^2x^2$. В этом случае решение (1.2), (1.3) можно представить в виде [1]:

$$p(x)=\beta\sqrt{1-x^2}+\frac{\lambda}{2\pi\beta}\sqrt{1-x^2}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_p'(p(t),\lambda)\,p'(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)},\qquad |x|\leqslant 1$$

$$\frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{t\varphi_p'(p(t),\lambda)\,p'(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=1-\beta^2\tag{1.24}$$

По-прежнему будем предполагать, что соотношения (1.4) выполняются.

Можно показать, что при $\varphi(p, \lambda)=p^2$ уравнения (1.2), (1.3) или, что то же, (1.24) имеют точное решение

$$p(x)=\frac{1}{\beta}\sqrt{1-x^2}, \quad \beta=\left[\frac{(1+4\lambda)^{1/2}+1}{2}\right]^{1/2} \tag{1.25}$$

асимптотиками которого являются

$$p(x)=\lambda^{-1/4}(1-\lambda^{-1/2}/4+\ldots)\sqrt{1-x^2} \text{ при } \lambda\gg1; \quad \beta=\lambda^{1/4}(1+\lambda^{-1/2}/4+\ldots) \tag{1.26}$$

$$p(x)=(1-\lambda/2+\ldots)\sqrt{1-x^2} \text{ при } \lambda\ll1; \quad \beta=1+\lambda/2+\ldots \tag{1.27}$$

Изложим теперь метод регулярных возмущений при $\lambda\gg1$. В этом случае решение уравнения (1.23) с учетом (1.3) в главном определяется взаимодействием микронеровностей. Пусть $\varphi(p, \lambda)=p^\alpha$, тогда заранее можно указать асимптотические последовательности функций параметра λ, по которым производится разложение $p(x)$ и β, а именно

$$p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-(2k+1)\gamma}p_k(x), \quad \beta=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-(2k-1)\gamma}\beta_k, \quad \gamma=\frac{1}{\alpha+2} \tag{1.28}$$

Подставив эти выражения в уравнение (1.23) и условия (1.3) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим

$$p_0^\alpha(x)+\beta_0^2(x^2-1)=0, \quad \int_{-1}^{1}p_0(t)\,dt=\frac{\pi}{2\beta_0}$$

$$\alpha p_0^{\alpha-1}(x)p_1(x)+2\beta_0\beta_1(x^2-1)+\frac{2\beta_0}{\pi}\int_{-1}^{1}p_0(t)\ln\frac{1-t}{|x-t|}\,dt=0$$

$$\int_{-1}^{1}p_1(t)\,dt=-\frac{\pi\beta_1}{2\beta_0^2} \tag{1.29}$$

и так далее. Решениями этих уравнений являются функции и постоянные

$$p_0(x)=\beta_0^{2/\alpha}(1-x^2)^{1/\alpha}, \quad \beta_0=\left[\frac{\sqrt{\pi}(\alpha+2)}{4}\,\frac{\Gamma[(\alpha+2)/2\alpha]}{\Gamma(1/\alpha)}\right]^{\alpha/(\alpha+2)}$$

$$p_1(x)=\frac{2}{\alpha\beta_0}\left\{\beta_1-\frac{\beta_0^{2/\alpha}}{\pi}(1-x^2)^{-1}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{1/\alpha}\ln\frac{1-t}{|x-t|}\,dt\right\}p_0(x)$$

$$\beta_1=\frac{4\beta_0^{(\alpha+4)/\alpha}}{\pi^2(\alpha+2)}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{(1-\alpha)/\alpha}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{1/\alpha}\ln\frac{1-t}{|x-t|}\,dt\,dx \tag{1.30}$$

Формулы (1.28), (1.30) дают равномерно пригодное решение задачи при любом $\alpha>0$. При $\alpha=2$ это решение сводится к (1.26).

Исследуем задачу (1.24) при $\lambda\ll1$. Ниже будет показано, что при $\alpha>3$ задача имеет регулярно возмущенный характер [6–8]. В этом случае всюду в области контакта решение в главном определяется упругим взаимодействием гладких тел. Поэтому решение будем искать в виде

$$p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k p_k(x), \qquad \beta=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\beta_k \tag{1.31}$$

Поступая аналогично случаю $\lambda\gg1$, получим

$$p_0(x)=\sqrt{1-x^2}, \quad \beta_0=1$$

$$p_1(x)=-p_0(x)\left\{(\alpha-1)\beta_1+\frac{\alpha x}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^{1/2(\alpha-3)}\,dt}{t-x}\right\}, \quad \beta_1=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma[{}^1/_2(\alpha-1)]}{\Gamma(\alpha/2)} \tag{1.32}$$

Последние формулы определяют двучленное равномерно пригодное на отрезке $[-1,1]$ асимптотическое разложение решения задачи (1.24) при $\alpha>3$. Это решение при $\alpha=2$ сводится к (1.27).

Из (1.28), (1.30)-(1.32) следует, что полуширина площадки контакта шероховатых тел больше, чем для гладких.

Изложим далее метод сингулярных возмущений. Исследуем задачу (1.24) методом сращиваемых асимптотических разложений [6] при $\lambda\ll1$ и $0<\alpha\leqslant3$. В данном случае область контакта распадается на две внутренние подобласти с характерным размером порядка $\varepsilon(\lambda,\alpha)\ll1$, примыкающие к точкам $x=\pm1$, и внешнюю область, дополняющую внутренние до отрезка $[-1,1]$.

Во внешней области основной вклад в решение задачи дает герцевское решение, а во внутренних — вклад шероховатости и решения Герца становятся соизмеримыми. В силу четности $p(x)$ достаточно исследовать внешнюю область и одну внутреннюю, примыкающую к точке $x=-1$. Для исследования $p(x)$ во внутренней области можно ограничиться одночленным разложением $p(x)$ во внешней области (герцевским решением)

$$p_0(x)=\sqrt{1-x^2}, \qquad \beta_0=1 \tag{1.33}$$

Введем внутреннюю переменную $r=(x+1)/\varepsilon$; тогда $p_0(x)\cong\varepsilon^{1/2}\sqrt{2r}$ при $r\sim1$. Для сращивания решения во внутренней области с $p_0(x)$ при $x\to-1$ необходимо, чтобы $p(x)\sim\varepsilon^{1/2}$ при $r\sim1$. Поэтому решение уравнений (1.24) при $0<\alpha<3$ будем искать в виде

$$p(x)=p_0(x)+o(1), \quad p_0(x)\sim1 \text{ при } x\pm1\sim1$$

$$p(x)=\varepsilon^{1/2}q(r)+o(\varepsilon^{1/2}), \quad q(r)\sim1 \text{ при } r\sim1 \tag{1.34}$$

$$\beta=\beta_0+\delta_1(\lambda,\alpha)\beta_1+o(\delta_1), \quad \delta_1\ll1, \quad \beta_1\sim1 \tag{1.35}$$

где $p_0(x)$ и β_0 определяются из (1.33), а $\delta_1(\lambda,\alpha)$ — функция малого параметра λ.

Перейдем в первом уравнении (1.24) к внутренней переменной r и в полученное уравнение подставим равенства (1.34) (при $r\sim1$) и (1.35). Устремляя затем $\lambda\to0$, получим

$$q(r)=\sqrt{2r}\left\{1+\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{q'(t)\,q^{\alpha-1}(t)\,dt}{\sqrt{2t}\,(t-r)}\right\}, \qquad \varepsilon=\lambda^{2/(3-\alpha)} \tag{1.36}$$

Можно показать, что решение (1.36) для $q(r)$ сращивается с $\varepsilon^{-1/2}p_0(x)$ при $x\to-1$.

Вывод уравнения для главного члена асимптотики давления во внутренней области при $\alpha=3$ представляет значительные трудности. Однако из вида двучленного внешнего разложения решения уравнений (1.24)

$$p(x)\cong p_0(x)\left\{1+\delta_1(\lambda,3)\beta_1-\lambda\frac{3}{2\pi}\left[2+x\ln\frac{1-x}{1+x}\right]\right\}$$

легко может быть получен характерный размер внутренней области [6] $\varepsilon=e^{-1/\lambda}$, то есть внутренние области экспоненциально малы, в то время как при $\alpha<3$ внутренние области малы алгебраически.

С помощью (1.34) для интеграла, входящего в (1.24), получим оценку

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{tp'(t)p^{\alpha-1}(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=O(\varepsilon^{1/2(\alpha-1)},1) \tag{1.37}$$

При этом член $\sim\varepsilon^{1/2(\alpha-1)}$ возникает при оценке интеграла, взятого по внутренним областям, а член порядка единицы — по внешней.

Используя четность $p(x)$, из (1.24) с помощью (1.34), (1.35) и (1.37) при $0<\alpha<1$, будем иметь

$$\beta_1=\frac{\alpha}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{q'(t)q^{\alpha-1}(t)\,dt}{\sqrt{2t}},\qquad \delta_1(\lambda,\alpha)=\varepsilon \tag{1.38}$$

Следовательно, изменение размера площадки контакта определяется внутренними областями и имеет порядок ε.

Из (1.37) следует, что при $\alpha=1$ постоянная β_1 определяется как внешней, так и внутренними областями. Определим равномерно пригодное решение

$$p_u(x)=\frac{\varepsilon}{2}q\left(\frac{x+1}{\varepsilon}\right)g\left(\frac{x-1}{\varepsilon}\right) \tag{1.39}$$

Здесь $g(s)$ — главный член асимптотики давления при $s=(x-1)/\varepsilon\sim1$. Тогда из (1.24) с помощью (1.37) и (1.39) получим

$$\beta_1=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{tp_u'(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}},\qquad \delta_1(\lambda,1)=\lambda$$

Из (1.37) следует, что основной вклад в β_1 при $1<\alpha\leqslant3$ дает внешняя область, поэтому с помощью (1.33) и (1.35) для β_1 и $\delta_1(\lambda,\alpha)$ получим выражения, совпадающие с (1.32).

Можно показать, что при $\alpha=2$ решением (1.36) является $q(r)=\sqrt{2r}$. Это решение согласуется с (1.27).

С помощью изложенного асимптотического метода может быть исследована задача, когда один конец отрезка контакта фиксирован, а другой заранее неизвестен, а также задача при наличии кулоновского трения.

2. Осесимметричная задача. Следуя [1, 9], запишем исходные уравнения контактной задачи для толстого слоя с учетом шероховатости в безразмерном виде

$$\lambda\varphi(p,\lambda)+\frac{8}{\pi}\beta\int\limits_0^1\frac{\rho}{r+\rho}K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right)p(\rho)\,d\rho=c-f(\beta r),\qquad 0\leqslant r\leqslant1$$

$$\int\limits_0^1\rho p(\rho)\,d\rho=\frac{1}{3\beta^2},\qquad c=-\frac{8a_0a_*}{3\pi h}+\delta \tag{2.1}$$

Здесь $K(x)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, постоянная a_0 приводится в [9].

В случае задачи с фиксированной областью контакта к уравнениям (2.1) необходимо добавить условие $\beta=1$, а в случае неизвестной области контакта $p(1)=0$. Безразмерные переменные введены с помощью величин, полученных из решения задачи Герца (см. п. 1).

Ниже приведен асимптотический анализ для частного случая

$$\varphi(p,\lambda)=p^\alpha, \quad \alpha>0 \tag{2.2}$$

1. Для осесимметричной задачи с фиксированной площадкой контакта решение уравнений (2.1) можно представить в виде ($\beta=1$) [1]:

$$p(r)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\left[c-f(0)-\int_0^1\frac{f'(\rho)\,d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}-\lambda p^\alpha(0)-\lambda\alpha\int_0^1\frac{p'(\rho)p^{\alpha-1}(\rho)\,d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right]+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_r^1\frac{1}{\sqrt{s^2-r^2}}\left[s\int_0^s\frac{f'(\rho)\,d\rho}{\sqrt{s^2-\rho^2}}\right]'ds+$$

$$+\frac{\lambda\alpha}{2\pi}\int_r^1\frac{1}{\sqrt{s^2-r^2}}\left[s\int_0^s\frac{p'(\rho)p^{\alpha-1}(\rho)\,d\rho}{\sqrt{s^2-\rho^2}}\right]'ds,$$

$$c=\frac{2\pi}{3}+f(0)+\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,f'(\rho)\,d\rho+\lambda p^\alpha(0)+\lambda\alpha\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,p'(\rho)p^{\alpha-1}(\rho)\,d\rho \tag{2.3}$$

Исследуем уравнения (2.1) при $\lambda\gg1$ методом регулярных возмущений. В рассматриваемом случае микронеровности в главном определяют решение задачи во всей области контакта. Поэтому решение задачи будем искать в виде

$$p(r)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-k}p_k(r), \quad 0\leqslant r\leqslant1; \quad c=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{1-k}c_k \tag{2.4}$$

Введем (2.4) в (2.1) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях λ; в результате получим

$$p_0(r)={}^2/_3, \quad c_0=({}^2/_3)^\alpha \tag{2.5}$$

$$p_1(r)=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha-1}\left\{c_1-f(r)-\frac{16}{3\pi}\int_0^1\frac{\rho}{r+\rho}K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right)d\rho\right\} \tag{2.6}$$

$$c_1=2\int_0^1 rf(r)\,dr+\frac{32}{3\pi}\int_0^1 r\,dr\int_0^1\frac{\rho}{r+\rho}K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right)d\rho$$

. . . .

Соотношения (2.5) и (2.6) совместно с разложениями (2.4) определяют двучленное равномерно пригодное приближение к решению задачи при $\lambda\gg1$, $\alpha>0$ и произвольной достаточно гладкой функции $f(r)$.

Из (2.4) и (2.5) следует, что давление в главном постоянно и не зависит ни от формы штампа, ни от характера взаимодействия микронеровностей, а осадка штампа при шероховатых поверхностях больше, чем при гладких и определяется в главном функцией $\varphi(p, \lambda)$. Из (2.6) следует, что упругие деформации слоя начинают сказываться на решении лишь с приближений первого порядка.

В случае штампа произвольной формы в плане с достаточно гладкой границей при $\lambda \gg 1$ решение будет иметь структуру равномерно пригодного в области контакта разложения типа (2.4). При этом давление в главном постоянно и определяется лишь площадью области контакта, а осадка штампа зависит, кроме того, от характера взаимодействия микронеровностей.

Исследуем теперь уравнения (2.3) при $\lambda \ll 1$ методом сращиваемых асимптотических разложений. Для краткости ограничимся случаем $f(r)=\mathrm{const}$.

По-прежнему под внешней областью будем подразумевать область, в которой в главном влиянием шероховатости можно пренебречь. При этом решение вырожденной задачи во внешней области [6] имеет вид

$$p_0(r)=1/3\sqrt{1-r^2}, \quad c_0=f(0)+2\pi/3 \tag{2.7}$$

Во внутренней области введем переменную $R=(r-1)/\varepsilon$, где $\varepsilon=\varepsilon(\lambda, \alpha)\ll 1$ — характерная ширина внутренней области. Решение уравнений (2.3) будем искать в виде

$$\begin{aligned} &p(r)=p_0(r)+o(1), \quad p_0(r)\sim 1 \text{ при } r-1\sim 1 \\ &p(r)=\varepsilon^{-1/2}q(R)+o(\varepsilon^{-1/2}); \quad q(R)\sim 1 \text{ при } R\sim 1 \\ &c=c_0+\delta_1(\lambda, \alpha)c_1+o(\delta_1), \quad c_1\sim 1, \quad \delta_1\ll 1 \end{aligned} \tag{2.8}$$

где $p_0(r)$ и c_0 определяются из (2.7).

Аналогично п. 1, воспользовавшись разложением для $p(r)$ при $R\sim 1$, с помощью (2.7) во внутренней области получим

$$q(R)=\frac{1}{3\sqrt{-2R}}\left\{1-\frac{3\alpha}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{q'(\rho)q^{\alpha-1}(\rho)\,d\rho}{\sqrt{-2\rho}}\right\}+$$

$$+\frac{\alpha}{4\pi}\int\limits_{R}^{0}\frac{1}{\sqrt{s-R}}\left[\int\limits_{-\infty}^{s}\frac{q'(\rho)q^{\alpha-1}(\rho)\,d\rho}{\sqrt{s-\rho}}\right]' ds$$

При этом для ε будем иметь

$$\varepsilon(\lambda, \alpha)=\lambda^{2/(\alpha+1)} \tag{2.9}$$

С помощью (2.3), (2.8) и (2.9) нетрудно получить (см. п. 1)

$$c_1=3^{-\alpha}/(1-\alpha), \quad \delta_1(\lambda, \alpha)=\lambda, \quad 0<\alpha<1$$

$$c_1=3^{-1}+\int\limits_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,p_u'(\rho)\,d\rho, \quad \delta_1(\lambda, 1)=\lambda \quad (\alpha=1) \tag{2.10}$$

$$p_u(r)=\varepsilon^{-1/2}\sqrt{\frac{2}{1+r}}\,q\left(\frac{r-1}{\varepsilon}\right)$$

$$c_1=\alpha\int\limits_{-\infty}^{0}\sqrt{-2\rho}\,q'(\rho)q^{\alpha-1}(\rho)\,d\rho, \quad \delta_1(\lambda, \alpha)=\varepsilon, \quad \alpha>1$$

Полученные результаты легко распространить на произвольную функцию $f(r)$.

2. Рассмотрим осесимметричную задачу с неизвестной границей области контакта. В этом случае решение уравнений (2.1) и (2.2) представим

в виде [1]:

$$p(r)=p_н(\beta,r)+\frac{\lambda\alpha}{2\pi\beta}\int_r^1\frac{1}{\sqrt{t^2-r^2}}\left[t\int_0^t\frac{p'(\rho)p^{\alpha-1}(\rho)\,d\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\right]'dt$$

$$\lambda\alpha\int_0^1 r\left\{r\int_0^r\frac{p'(\rho)p^{\alpha-1}(\rho)\,d\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\right\}'dr=\frac{2\pi}{3}\frac{1-\beta^3H(\beta)}{\beta}$$

$$p_н(\beta,r)=\frac{1}{2\pi\beta}\int_r^1\frac{1}{\sqrt{t^2-r^2}}\left[t\int_0^t\frac{f_\rho'(\beta\rho)\,d\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\right]'dt \tag{2.11}$$

$$H(\beta)=\frac{3}{2\pi\beta^2}\int_0^1 r\left\{r\int_0^r\frac{f_\rho'(\beta\rho)\,d\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\right\}'dr$$

Отметим, что если $\varphi(p,\lambda)=p^2$ и имеет место касание второго порядка, т. е. $f(\beta r)={}^1/_2\pi\beta^2r^2$, то задача (2.11) имеет замкнутое решение вида

$$p(r)=\beta^{-2}\sqrt{1-r^2},\quad \beta=2^{-1/3}[(1+8\lambda/\pi)^{1/2}+1]^{1/3} \tag{2.12}$$

Ниже приведен асимптотический анализ для случая

$$f(\beta r)={}^1/_2\pi\beta^2r^2,\quad p_н(\beta,r)=\beta\sqrt{1-r^2},\quad H(\beta)=1 \tag{2.13}$$

Исследуем уравнения (2.1), (2.2) и (2.13) при $\lambda\gg1$ методом регулярных возмущений. С помощью условия $p(1)=0$ из первого уравнения (2.1) можно исключить постоянную c. Решение полученного уравнения будем искать в виде

$$p(r)=\lambda^{-2\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-3k\gamma}p_k(r),\quad \beta=\lambda^{\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-3k\gamma}\beta_k,\quad \gamma={}^1/_2(\alpha+1)^{-1},\quad 0\leqslant r\leqslant1 \tag{2.14}$$

Определив $p(r)$ и β из (2.1) легко найдем постоянную c.

Подставим (2.14) в уравнение задачи и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях λ. В результате будем иметь

$$p_0(r)=\left(\frac{\pi}{3}\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{2\gamma}(1-r^2)^{1/\alpha},\qquad \beta_0=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\gamma}\left(\frac{2}{3}\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{\alpha\gamma}$$

$$p_1(r)=\frac{2}{\alpha\beta_0}\left\{\beta_1+2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{(1-2\alpha)/\alpha}\beta_0^{2/\alpha}(1-r^2)^{-1}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^1\rho(1-\rho^2)^{1/\alpha}\left[K(\rho)-\frac{1}{r+\rho}K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right)\right]d\rho\right\}p_0(r) \tag{2.15}$$

$$\beta_1=\frac{6}{\alpha+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(1-\alpha)/\alpha}\beta_0^{2(2+\alpha)/\alpha}\left\{\int_0^1 r(1-r^2)^{(1-\alpha)/\alpha}dr\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^1\frac{\rho(1-\rho^2)^{1/\alpha}}{r+\rho}K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right)d\rho-\frac{\alpha}{2}\int_0^1\rho(1-\rho^2)^{1/\alpha}K(\rho)\,d\rho\right\}$$

и так далее.

Полученное двучленное равномерно пригодное на отрезке $[-1,1]$ асимптотическое разложение при $\alpha=2$ совпадает с разложением (2.12) при $\lambda\gg1$.

3. Исследуем далее уравнения (2.11) и (2.13) при $\alpha>3$ и $\lambda\ll1$. Как и в случае плоской задачи, решение будем искать в виде

$$p(r)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k p_k(r),\quad \beta=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\beta_k,\quad 0\leqslant r\leqslant1 \tag{2.16}$$

Подставив (2.16) в уравнения (2.11), (2.13) и приравняв коэффициенты при λ^k, получим

$$p_0(r)=\sqrt{1-r^2},\quad \beta_0=1$$

$$p_1(r)=\frac{\alpha}{2\pi}\left\{\frac{2\sqrt{1-r^2}}{\alpha^2-1}-\frac{1}{2}\int_r^1\frac{1}{\sqrt{s^2-r^2}}\left[s\int_0^{s^2}\frac{(1-t)^{(\alpha-2)/2}dt}{\sqrt{s^2-t}}\right]'ds\right\},\quad \beta_1=\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2-1} \tag{2.17}$$

Исследуем уравнения (2.11) и (2.13) при $0<\alpha\leqslant3$ и $\lambda\ll1$ методом сращиваемых асимптотических разложений. В отличие от случая $\alpha>3$ контактное давление близко к герцевскому лишь вне узкого кругового кольца, примыкающего к окружности $r=1$, а внутри кольца эффект взаимодействия микронеровностей соизмерим с упругим взаимодействием контактирующих тел в целом.

Введем внутреннюю переменную $R=(r-1)/\varepsilon$, $\varepsilon=\varepsilon(\lambda,\alpha)\ll1$. Решение задачи при $0<\alpha<3$ будем искать в виде

$$\begin{gathered}p(r)=p_0(r)+o(1),\quad p_0(r)\sim1\ \text{при}\ r-1\sim1\\ p(r)=\varepsilon^{1/2}q(R)+o(\varepsilon^{1/2}),\quad q(R)\sim1\ \text{при}\ R\sim1\\ \beta=\beta_0+\delta_1(\lambda,\alpha)\beta_1+o(\delta_1),\quad \beta_1\sim1,\quad \delta_1\ll1\end{gathered} \tag{2.18}$$

где $p_0(r)$ и β_0 определяются из (2.17)

Поступая как в п. 1, получим для главного члена асимптотики давления $q(R)$ во внутренней области уравнение

$$q(R)=\sqrt{-2R}+\frac{\alpha}{4\pi}\int_R^0\frac{1}{\sqrt{s-R}}\left[\int_{-\infty}^{s}\frac{q'(t)q^{\alpha-1}(t)dt}{\sqrt{s-t}}\right]'ds \tag{2.19}$$

и выражение для $\varepsilon(\lambda,\alpha)=\lambda^{2/(3-\alpha)}$.

При $\alpha=3$ указанным методом не удается получить уравнение для $q(R)$, однако из двучленного внешнего разложения $p(r)$ следует оценка $\varepsilon\sim e^{-1/\lambda}$.

С помощью (2.18) и выражения для $\varepsilon(\lambda,\alpha)$, из (2.11) и (2.13) по аналогии с методикой, изложенной в п. 1, получим

$$\beta_1=-\frac{\alpha}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{q'(R)q^{\alpha-1}(R)dR}{\sqrt{-2R}},\qquad \delta_1(\lambda,\alpha)=\varepsilon,\qquad 0<\alpha<1$$

$$\beta_1=-\frac{1}{4\pi}\left[1+2\int_0^1\frac{p_u'(\rho)d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right],\qquad \delta_1(\lambda,1)=\lambda\quad(\alpha=1)$$

$$p_u(r)=\varepsilon^{1/2}\sqrt{\frac{1+r}{2}}\,q\left(\frac{r-1}{\varepsilon}\right),\quad \beta_1=\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2-1},\quad \delta_1(\lambda,\alpha)=\lambda,\quad 1<\alpha\leqslant3$$

При $\alpha=2$ полученные результаты согласуются с (2.12). Качественные замечания, сделанные относительно решения плоской задачи, остаются справедливыми и для решения осесимметричной задачи.

3. Численные результаты. Предложенный асимптотический метод может быть без существенных изменений использован для исследования задач с произвольной формой основания штампа и при других зависимостях между давлением и деформацией микронеровностей, например

$$\varphi_*(p)=\varphi(\lambda)(1-e^{-\lambda p^{\alpha}}),\quad \varphi_*(p)=\lambda\begin{cases}p^{\alpha}, & p\leqslant p_*\\ p_*{}^{\alpha}, & p>p_*\end{cases},\quad \alpha>0$$

Кроме того, изложенный метод применим к задаче о шероховатой полосе или слое произвольной толщины.

Полученные в п. 1 результаты будут проиллюстрированы на примере

$$\varphi(p,\lambda)=p^{\alpha},\qquad \lambda=\frac{\pi\theta}{2}\frac{k_*}{P}\left(\frac{2}{\pi}\frac{P}{a_*}\right)^{\alpha}$$

Для сравнения с [5] положим $f(x)=f_0=\text{const}$ и $\pi\theta/2=1$. Тогда при $P=0.6$, $k_*=0.361$, $\alpha=0.5$ и $a=0.7$ имеем $\lambda=0.44445$. При этом величина $c-f_0$, вычисленная по формулам (1.11), (1.14), (1.19), равна 0.945. В [5] при этих же значениях P, k_*, α и a получено $c-f_0=0.934$.

При $\lambda=12.2$ и $\alpha=1$ с помощью формул (1.28), (1.30) получено $a=2.33$, в то время как по данным [3], $a=2.34$. Ниже приведено давление $p(x)$, вычисленное соответственно по формулам п. 1 для $k=0$ (первая строка) и для $k=0.1$ (вторая строка). В третьей строке приводятся данные из [3].

$x/a=0$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.240	0.230	0.201	0.153	0.086	0
0.222	0.215	0.193	0.156	0.103	0
0.225	0.216	0.191	0.147	0.086	0

Полученные в п. 2 результаты проиллюстрируем на численном примере, приведенном в [4], а именно, положим $\alpha={}^2/_3$, $\lambda=2.889$. Тогда, воспользовавшись формулами (2.14) и (2.15), получим $a=3.099$. В [4] найдено $a=3.116$.

При $\alpha={}^2/_3$ и $\lambda=0.2$ с помощью формул (2.7), (2.8) и (2.10) получим $c-f(0)=2.383$.

Поступила 22 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
2. *Демкин Н. Б.* Расчет и экспериментальное исследование характеристик контакта шероховатых поверхностей. В сб.: «Контактные задачи и их инженерные приложения». (Доклады конференции) М., НИИ машиноведения, 1969.
3. *Рабинович А. С.* Плоская контактная задача для шероховатых упругих тел. Изв. АН СССР, МТТ, 1974, № 3.
4. *Рабинович А. С.* Осесимметричная контактная задача для шероховатых упругих тел. Изв. АН СССР, МТТ, 1975, № 4.
5. *Мартыненко М. Д., Романчик В. С.* О решении интегрального уравнения контактной задачи теории упругости для шероховатых тел. ПММ, 1977, т. 41, вып. 2.
6. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
7. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.
8. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. М., «Мир», 1976.
9. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.
10. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.