**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1979**

УДК 539.3

О РЕШЕНИИ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ШЕРОХОВАТЫХ ТЕЛ

А. С. РАБИНОВИЧ

(Москва)

Рассматриваются плоская и осесимметричная контактные задачи о сжатии шероховатых упругих тел. На основании экспериментальных и теоретических исследований [1–3] принимается степенная зависимость между контурным давлением и сближением поверхностей вследствие деформации микронеровностей. Задачи описываются нелинейными интегральными уравнениями относительно контурного давления. Для решения этих уравнений предлагается эффективный итерационный метод. Этот метод является более совершенным по сравнению с методом, предложенным в [4, 5]. Полученные результаты применимы для расчета контурных и фактических давлений и площадей контакта в случаях сжатия цилиндрических, сферических шероховатых тел, а также плоских тел, имеющих, помимо шероховатостей, волнистость [3, 6].

1. Рассматриваемые контактные задачи, плоская и осесимметричная, приводятся к следующим нелинейным интегральным уравнениям относительно контурного давления [4, 5]:

$$Kp^{1/m}(r)+\int_{-a}^{a} p(\rho)\ln\left|\frac{\rho-a}{\rho-r}\right|d\rho=c(a^2-r^2) \tag{1.1}$$

$$Kp^{1/m}(r)+\iint_{\Omega} p(\rho)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_a}\right)d\Omega=c(a^2-r^2) \tag{1.2}$$

Здесь p — контурное давление на участке контакта; a — размер участка контакта; Ω — круг радиуса a; r, ρ — координаты точек участка контакта; R — расстояние между точкой, удаленной от центра круга на расстояние r и переменной точкой, удаленной от центра круга на расстояние ρ; R_a — значение R при $r=a$; m — действительное число, лежащее в пределах $1\leqslant m\leqslant 3$; K, c — константы, зависящие от механических и геометрических характеристик контактирующих тел ($K\geqslant 0$, $c\geqslant 0$).

Решения этих уравнений ищутся в виде

$$p(r)=\left(\sum_{i=0}^{\infty} d_i r^{2i}\right)^m (a^2-r^2)^{1/2}, \qquad (d_0\geqslant 0) \tag{1.3}$$

Разложим в ряд Маклорена функцию

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} d_i r^{2i}\right)^m=\sum_{i=0}^{\infty} b_i r^{2i} \tag{1.4}$$

Корректность записей (1.3) и (1.4) при $|r|\leqslant a$ проверена ниже.

Обозначим

$$\alpha_l=d_l a^{2l}/d_0, \quad \beta_l=b_l a^{2l}/b_0, \quad s=1-1/2m, \quad t_0=1$$

$$t_i=s(s+1)\ldots(s+i-1)/i!, \quad (i\geqslant 1), \quad \varkappa=K/(\pi^\lambda a^{2s} d_0^{m-1})$$

где $\lambda=1$ для уравнения (1.1) и $\lambda=2$ для уравнения (1.2).

При $l=0$ величина $\beta_l=\alpha_l=1$, а при $l\geqslant 1$:

$$\beta_l=\sum_{j=1}^{l}\frac{m(m-1)\ldots(m-j+1)}{j!}\sum_{\substack{i_1+i_2+\ldots+i_j=l\\ i_1\geqslant 1, i_2\geqslant 1,\ldots,i_j\geqslant 1}}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_j} \tag{1.5}$$

Положим в случае плоской задачи

$$w(r)=\int_{-a}^{a}p(\rho)\ln\left|\frac{\rho-a}{\rho-r}\right|d\rho$$

а в случае осесимметричной задачи

$$w(r)=\iint_{\Omega}p(\rho)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_a}\right)d\Omega$$

Подставляя в выражения $w(r)$ функцию

$$p(r)=\sum_{i=0}^{\infty}b_i r^{2i}(a^2-r^2)^{1/2}$$

после вычисления интегралов получаем следующую формулу [4, 5]:

$$w(r)=\pi^\lambda(a^2-r^2)b_0\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{l+k}u_{l,k}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l} \tag{1.6}$$

где в случае плоской задачи

$$u_{l,k}=-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k}\frac{(2i-3)!!}{(l+k+1-i)(2i)!!}, \quad (0)!!=(-1)!!=1, \quad (-3)!!=-1$$

В случае осесимметричной задачи ($\mathrm{B}(x,y)$ — бета-функция)

$$u_{l,k}=\frac{1}{\pi^2}\sum_{i=l+1}^{l+k+1}\left[C_{l+k}^{i-1}\mathrm{B}\left(\frac{2i+1}{2},\frac{2(l+k-i)+3}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-C_{l+k}^{i}\mathrm{B}\left(\frac{2i+3}{2},\frac{2(l+k-i)+1}{2}\right)\right]\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{2i+1}{2}\right), \quad C_{l+k}^{l+k+1}=0$$

Ниже проверены достаточные условия для выполнения равенства (1.6): сходимость ряда в правой части (1.4) и абсолютная сходимость двойного ряда в (1.6) при $|r|\leqslant a$.

Подставим (1.3) в (1.1) и (1.2) и разделим эти уравнения на $\pi^\lambda(a^2-r^2)$. Разлагая их левые части в ряд Маклорена, используя (1.6), и приравнивая выражения при одинаковых степенях r в левой и правой частях этих уравнений, получим следующую бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\varkappa\sum_{i=0}^{l}t_{l-i}\alpha_i+\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{l+k}u_{l,k}=\frac{c\theta_l}{\pi^\lambda b_0} \quad (0\leqslant l<\infty) \tag{1.7}$$

где $\theta_l=1$ при $l=0$ и $\theta_l=0$ при $l\geqslant1$, $\alpha_0=\beta_0=1$.

Из (1.7) при $l\geqslant1$ получаем бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений относительно чисел α_l:

$$\varkappa\sum_{i=0}^{l} t_{l-i}\alpha_i+\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{l+k}u_{l,k}=0 \quad (1\leqslant l<\infty,\ \alpha_0=1) \qquad (1.8)$$

Числа β_{l+k} выражаются через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l+k}$ по формуле (1.5).

Для решения рассматриваемых задач необходимо найти решение системы (1.8) при любых возможных значениях параметров $\varkappa$ и m. Если оно найдено, то, как следует из первого уравнения системы (1.7), давление $p(r)$ может быть представлено в виде

$$p(r)=(2\lambda)^{-1}p_0(r)\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\left(\frac{r}{a}\right)^{2k}\Big/\left(\varkappa+u_{0,0}+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k u_{0,k}\right) \qquad (1.9)$$

$$p_0(r)=2\lambda c\pi^{-\lambda}(a^2-r^2)^{1/2}$$

где p_0 — давление при отсутствии шероховатости [7].

Из первого уравнения системы (1.7) также следует, что размер участка контакта a равен

$$a=(\pi^{-\lambda}K^m c^{1-m}\varkappa^{-m})^{1/(2m-1)}\left(\varkappa+u_{0,0}+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k u_{0,k}\right)^{(m-1)/(2m-1)} \qquad (1.10)$$

Для определения параметра $\varkappa$ служит условие равновесия [7].

2. Перейдем к решению системы (1.8). Для решения этой системы при различных $\varkappa$ и m предлагается эффективный итерационный метод, идея которого основана на следующем важном свойстве коэффициентов $u_{l,k}$: начиная с $k=1$, они при любом l становятся весьма малыми по сравнению с единицей [4, 5].

По этому методу последовательные приближения $\alpha_l^{(n)}$ (n — номер приближения, $n=1, 2, \ldots$) находятся из следующей бесконечной системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$\varkappa\sum_{i=0}^{l} t_{l-i}\alpha_i^{(n)}+\beta_l^{(n)}u_{l,0}+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{l+k}^{(n-1)}u_{l,k}=0 \quad (1\leqslant l<\infty) \qquad (2.1)$$

где $\alpha_0^{(n)}=1$, $\beta_{l+k}^{(0)}=0$.

При $n\geqslant1$ и $l\geqslant1$ под числом $\beta_l^{(n)}$ понимается число, равное правой части формулы (1.5) при $\alpha_i=\alpha_i^{(n)}$ ($i=1, 2, \ldots, l$); при $l=0$ полагаем $\beta_l^{(n)}=1$.

Система (2.1) легко разрешима относительно $\alpha_l^{(n)}$. Из (1.5) и (2.1) при $l\geqslant1$ получаем

$$\alpha_l^{(n)}=-\frac{1}{\varkappa+mu_{l,0}}\left[\varkappa\sum_{i=0}^{l-1}t_{l-i}\alpha_i^{(n)}+v_l^{(n)}u_{l,0}+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{l+k}^{(n-1)}u_{l,k}\right] \qquad (2.2)$$

$$v_l^{(n)}=\sum_{j=2}^{l}\frac{m(m-1)\ldots(m-j+1)}{j!}\sum_{\substack{i_1+i_2+\ldots+i_j=l\\ i_1\geqslant1,\ i_2\geqslant1,\ldots,i_j\geqslant1}}\alpha_{i_1}^{(n)}\alpha_{i_2}^{(n)}\ldots\alpha_{i_j}^{(n)} \quad (l\geqslant2) \qquad (2.3)$$

При $l=1$ коэффициенты $v_l^{(n)}=0$.

Соотношения (2.2) являются рекуррентными и по ним можно последовательно определить значения чисел $\alpha_l^{(n)}$ при любых l и n.

По формуле (2.2) на ЭЦВМ были проведены подробные расчеты последовательных приближений $\alpha_l^{(n)}$ при различных значениях параметров $\varkappa$ ($\varkappa$ неотрицателен) и m, лежащих в пределах: $0\leqslant\varkappa<\infty$, $1\leqslant m\leqslant 3$. Эти расчеты показали, что последовательные приближения $\alpha_l^{(n)}$ быстро сходятся к решению системы (1.8) и уже при $n=2$ отличаются от него лишь третьим знаком после запятой.

Введем последовательные приближения $p^{(n)}(r)$ и $a^{(n)}$: под $a^{(n)}$ будем понимать число, равное правой части формулы (1.10) при $\beta_l=\beta_l^{(n)}$ ($l=1, 2, \ldots$); под $p^{(n)}(r)$ будем понимать функцию, равную правой части формулы (1.9) при $a=a^{(n)}$ и $\beta_l=\beta_l^{(n)}$ ($l=0, 1, 2, \ldots$). Последовательные приближения $p^{(n)}(r)$ и $a^{(n)}$ быстро сходятся соответственно к некоторой функции $p(r)$ и некоторому числу a.

Начиная с $n=2$, последовательные приближения $p^{(n)}(r)$ и $a^{(n)}$ практически совпадают соответственно с $p(r)$ и a, причем выражения $|a-a^{(n)}|$ и $|p(r)-p^{(n)}(r)|$ при любых значениях r составляют доли процента от a и $p(0)$.

Покажем, что функции $p(r)$ и числа a, являющиеся пределами при $n\to\infty$ функций $p^{(n)}(r)$ и чисел $a^{(n)}$, удовлетворяют нелинейным интегральным уравнениям (1.1) и (1.2). Для этого рассмотрим функцию

$$\varphi(r)=\varkappa^{-1}\left[\frac{c}{\pi^{\lambda}b_0}-\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{l+k}u_{l,k}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l}\right] \tag{2.4}$$

Произведенные расчеты позволили проверить, что при $|r/a|\leqslant 1$ для последовательных приближений системы (1.8) и решения системы (1.8) ряды

$$\sum_{l=0}^{\infty}\beta_l\left(\frac{r}{a}\right)^{2l},\qquad \sum_{l,k=0}^{\infty}\beta_{l+k}u_{l,k}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l}$$

сходятся (причем двойной ряд сходится абсолютно), а числа b_0, a и функция $\varphi(r)$ положительны.

Пусть числа α_l — решение системы (1.8). Из (1.7) следует

$$\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l\left(\frac{r}{a}\right)^{2l}\sum_{l=0}^{\infty}t_l\left(\frac{r}{a}\right)^{2l}=\varphi(r) \tag{2.5}$$

где под произведением рядов Маклорена в левой части (2.5) понимается ряд Маклорена, получаемый формальным умножением этих рядов, а равенство (2.5) понимается в смысле равенства коэффициентов при одинаковых степенях r/a в левой и правой частях.

Так как

$$\sum_{l=0}t_l\left(\frac{r}{a}\right)^{2l}=\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{-s}$$

то числа α_l совпадают с коэффициентами ряда Маклорена функции $(1-r^2/a^2)^s\varphi(r)$. Из указанного свойства функции $\varphi(r)$ вытекает, что ряд $\Sigma\alpha_l(r/a)^{2l}$ является сходящимся при $|r|\leqslant a$, положительным при $|r|<a$ и равным нулю при $|r|=a$. Следовательно, равенство (2.5) верно при $|r|\leqslant a$ в обычном смысле.

Нетрудно убедиться, что при $|r|<\varepsilon$, где ε — достаточно малое положительное число, имеет место равенство

$$\left[\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l\left(\frac{r}{a}\right)^{2l}\right]^m=\sum_{l=0}^{\infty}\beta_l\left(\frac{r}{a}\right)^{2l} \tag{2.6}$$

Так как ряд в левой части равенства (2.6) положителен при $|r|<a$, то левая часть этого равенства, являющаяся функцией действительной переменной r, может быть аналитически продолжена в некоторую комплексную область, содержащую отрезок действительной оси $|r|<a$ и принадлежащую кругу радиуса a с центром в нулевой точке. Ряд в правой части равенства (2.6) также может быть аналитически продолжен в эту же область. Из теоремы единственности теории аналитических функций вытекает, что равенство (2.6) имеет место при $|r|<a$. Из непрерывности левой и правой частей (2.6) следует, что это равенство справедливо и при $|r|=a$. Из справедливости равенства (2.6) вытекает справедливость равенства (1.4).

Из написанного выше следует, что последовательные приближения $p^{(n)}(r)$ и $a^{(n)}$ сходятся соответственно к неотрицательным функциям $p(r)$ и числам a, удовлетворяющим нелинейным интегральным уравнениям (1.1), (1.2), и при $n=2$ практически совпадают с ними.

Произведенные расчеты позволили сделать вывод: при вычислении $p^{(n)}(r)$ достаточно ограничиться в сумме по j в формулах (1.5) и (2.3) лишь значениями $j\leqslant 3$, в бесконечном ряде, входящем в формулу (2.2), не более чем тремя членами и в ряде Маклорена и числовом ряде, входящих в формулу (1.9), не более чем десятью и пятью членами.

Из (1.9) следует, что при $K=0$ давление $p(r)=p_0(r)$. Поведение давления $p(r)$ при $K\neq 0$ и при $|r|\to a$ вытекает из следующей формулы, получаемой из (2.5):

$$p(r)=p(0)a^{-2m}\varphi^m(r)(a^2-r^2)^m$$

где вследствие написанного выше $\varphi(r)$ — положительная и непрерывная функция.

Таким образом, предлагаемый метод позволяет эффективно решить рассматриваемые задачи.

3. В качестве примера рассмотрим случай $m=2$ для плоской задачи, описываемой уравнением (1.1).

Обозначим через $p_0{}^*$, a_0 — максимальное давление и полуширину участка контакта для идеально гладких тел, сжимаемых той же силой и имеющих те же механические характеристики и радиусы кривизны, что и шероховатые тела. Из условия равновесия следует

$$\int_{-a}^{a}p(t)\,dt=ca_0{}^2 \tag{3.1}$$

Из (1.9) и (3.1) будем иметь

$$ca^2\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!}\Big/\left(\varkappa+\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k u_{0,k}\right)=ca_0{}^2 \tag{3.2}$$

где $(-1)!!=1$.

Обозначив $a_*=a/a_0$, $p_*(\tau)=p(a\tau)/p_0{}^*$ $(|\tau|\leqslant 1)$, из (1.9) и (3.2) получим

$$a_*=\left[\left(\varkappa+\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k u_{0,k}\right)\Big/\left(\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!}\right)\right]^{1/2}$$

$$p_*(\tau)=\frac{1}{2}a_*\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\tau^{2k}\sqrt{1-\tau^2}\Big/\left(\varkappa+\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k u_{0,k}\right)$$

Таблица 1

$\varkappa$	$\tau=0.00$	$\tau=0.20$	$\tau=0.40$	$\tau=0.60$	$\tau=0.80$	$\tau=0.90$	$\tau=0.95$
0.000	1.00000 1.00000 1.00000	0.97980 0.97980 0.97980	0.91652 0.91652 0.91652	0.80000 0.80000 0.80000	0.60000 0.60000 0.60000	0.43589 0.43589 0.43589	0.31225 0.31225 0.31225
0.025	0.98767 0.98976 0.99019	0.96512 0.96695 0.96731	0.89437 0.89516 0.89524	0.76358 0.76141 0.76069	0.53344 0.52350 0.52180	0.32585 0.31383 0.31374	0.15967 0.15505 0.15587
0.050	0.97731 0.97951 0.97957	0.95310 0.95485 0.95487	0.87684 0.87696 0.87689	0.73388 0.73054 0.73038	0.47429 0.46706 0.46722	0.24816 0.24482 0.24516	0.10058 0.10104 0.10120
0.100	0.95680 0.95805 0.95802	0.92942 0.93021 0.93018	0.84263 0.84210 0.84209	0.67846 0.67618 0.67622	0.38694 0.38552 0.38561	0.16966 0.17056 0.17059	0.05878 0.05970 0.05971
0.250	0.89413 0.89398 0.89398	0.85977 0.85959 0.85959	0.75206 0.75184 0.75184	0.55643 0.55662 0.55662	0.25820 0.25917 0.25916	0.09222 0.09290 0.09290	0.02777 0.02803 0.02803
0.500	0.80243 0.80221 0.80221	0.76322 0.76306 0.76306	0.64363 0.64369 0.64369	0.44162 0.44200 0.44200	0.17779 0.17818 0.17818	0.05708 0.05725 0.05725	0.01617 0.01623 0.01623
1.000	0.67401 0.67395 0.67395	0.63405 0.63402 0.63402	0.51633 0.51637 0.51637	0.33199 0.33210 0.33210	0.12055 0.12062 0.12062	0.03624 0.03626 0.03626	0.00992 0.00993 0.00993
2.500	0.48722 0.48722 0.48722	0.45350 0.45350 0.45350	0.35752 0.35752 0.35752	0.21750 0.21750 0.21750	0.07308 0.07308 0.07308	0.02101 0.02101 0.02101	0.00563 0.00563 0.00563

Таблица 2

n	$\varkappa=0$	$\varkappa=0.025$	$\varkappa=0.05$	$\varkappa=0.1$	$\varkappa=0.25$	$\varkappa=0.5$	$\varkappa=1$	$\varkappa=2.5$
2	1.00000	1.05972	1.10399	1.17972	1.36506	1.61696	2.02380	2.91880
5	1.00000	1.06272	1.10627	1.18051	1.36471	1.61657	2.02364	2.91880
6	1.00000	1.06311	1.10624	1.18048	1.36471	1.61657	2.02364	2.91880

В табл. 1 и 2 приведены соответственно значения $p_*(\tau)$ и a_* во втором ($n=2$), пятом ($n=5$) и шестом ($n=6$) приближениях при различных значениях $\varkappa$ для рассматриваемой плоской задачи при $m=2$.

Случай $\varkappa=0$ соответствует решению задачи для идеально гладких тел. При $\tau=1$ давление $p_*(\tau)=0$ для всех приближений.

Поступила 30 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демкин Н. Б.* Контактирование шероховатых поверхностей. М., «Наука», 1970.
2. *Рыжов Э. В.* Контактная жесткость деталей машин. М., «Машиностроение», 1966.
3. *Демкин Н. Б.* Шероховатость, площади касания, контактное давление. В сб.: Расчетные методы оценки трения и износа. Брянск, Приокское книжн. изд-во, 1975.
4. *Рабинович А. С.* Плоская контактная задача для шероховатых упругих тел. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 3.
5. *Рабинович А. С.* Осесимметричная контактная задача для шероховатых упругих тел. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 4.
6. *Ланков А. А.* Основные соотношения для расчета контурных давлений и других характеристик контакта в стыке твердых шероховатых поверхностей. В сб.: Расчетные методы оценки трения и износа. Брянск, Приокское книжн. изд-во, 1975.
7. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.