МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1979

УДК 539.3

УСЛОВИЯ АДАМАРА В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Е. Л. ГУРВИЧ

(Ленинград)

В нелинейной теории упругости важную роль играют различные, отвечающие интуитивным представлениям о поведении материала ограничения на форму зависимости удельной потенциальной энергии деформации от геометрических характеристик деформации. Наиболее существенным таким ограничением является, пожалуй, неравенство (условие) Адамара [1], связанное, в частности, с наличием в положении равновесия минимума полной (интегральной) энергии упругого тела и, следовательно, с устойчивостью положения равновесия. Однако имеется явное, особенно заметное в случае изотропного материала, несоответствие между ясным физическим смыслом этого условия и его громоздкой и труднопроверяемой непосредственной формулировкой.

Ниже будет дано наглядное истолкование условия Адамара непосредственно в терминах удельной энергии деформации изотропного тела, полученное без привлечения относительно более сложных понятий, связанных с устойчивостью решения краевых задач теории упругости.

Сформулированы условия P и Q, одновременное выполнение которых эквивалентно выполнению условия Адамара. Выяснен смысл простого условия P, близкого к известному условию Бейкера – Эриксена [1].

Показано, что условие Q имеет место тогда и только тогда, когда требуемая для равномерного (в указанном далее смысле) деформирования упругого тела виртуальная мощность возрастает вместе с ростом деформации.

Рассмотрен также практический способ проверки условия Адамара и приведены примеры.

1. Условие Адамара. Удельная потенциальная энергия деформации изотропного упругого тела σ является функцией главных растяжений u_1, u_2, u_3 деформации. Обозначим Λ совокупность всевозможных троек (u_1, u_2, u_3) положительных чисел. Функцию $\sigma=\sigma(u_1, u_2, u_3)$ предполагаем определенной и дважды непрерывно дифференцируемой на Λ. Заметим, что $\sigma(u_1, u_2, u_3)$ симметрична, т. е. сохраняет свое значение при произвольной перестановке u_1, u_2, u_3.

Обозначим

$$\sigma_i=\frac{\partial\sigma}{\partial u_i},\qquad \sigma_{ij}=\frac{\partial^2\sigma}{\partial u_i\,\partial u_j}\qquad (i,j=1,2,3)$$

Согласно [1], условие Адамара в точке $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)\in\Lambda$ выполнено тогда и только тогда, когда для произвольных векторов $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3)$ будет

$$\Theta(\mathbf{u},\mathbf{a},\mathbf{b})=\sum_{i,j}\sigma_{ij}a_ia_jb_ib_j+2\sum_{i<j}\frac{u_j\sigma_i-u_i\sigma_j}{u_i^2-u_j^2}a_ia_jb_ib_j+$$

$$+\sum_{i<j}\frac{u_i\sigma_i-u_j\sigma_j}{u_i^2-u_j^2}(a_i^2b_j^2+a_j^2b_i^2)\geqslant 0 \tag{1.1}$$

Заметим, что условие (1.1) после элементарных преобразований может быть получено из приведенного в [1] выражения для акустического тензора.

Потребовав, чтобы $\Theta(\mathbf{u}, \mathbf{a}, \mathbf{b})>0$ для всех $\mathbf{a}\neq 0$, $\mathbf{b}\neq 0$, получим так называемое SE-условие, связанное с сильной эллиптичностью системы дифференциальных уравнений равновесия.

Для вектора $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ обозначим также

$$\xi(\mathbf{u},\mathbf{x})=\sum_{i,j}\sigma_{ij}x_ix_j+2\sum_{i<j}\frac{u_j\sigma_i-u_i\sigma_j}{u_i^2-u_j^2}x_ix_j+2\sum_{i<j}\frac{u_i\sigma_i-u_j\sigma_j}{u_i^2-u_j^2}|x_i||x_j|$$

Определение 1.1. Будем считать, что в точке $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)\in\Lambda$ выполнено условие P, если в этой точке

$$\frac{u_1\sigma_1-u_2\sigma_2}{u_1^2-u_2^2}\geqslant 0,\quad \frac{u_2\sigma_2-u_3\sigma_3}{u_2^2-u_3^2}\geqslant 0,\quad \frac{u_3\sigma_3-u_1\sigma_1}{u_3^2-u_1^2}\geqslant 0 \qquad (1.2)$$

Заметим, что условие P близко к известному условию Бейкера — Эриксена [1].

Определение 1.2. Будем считать, что в точке $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)\in\Lambda$ выполнено условие Q, если в этой точке $\xi(\mathbf{u}, \mathbf{x})\geqslant 0$ для всех $\mathbf{x}$.

Утверждение. Условие Адамара в точке $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)\in\Lambda$ выполнено тогда и только тогда, когда в этой точке одновременно выполнены условия P и Q.

Доказательство. Пусть выполнены условия P и Q. Тогда для любых $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, учитывая неравенства $a_j^2b_i^2+a_i^2b_j^2\geqslant 2|a_ib_ia_jb_j|$ и обозначив $x_i=a_ib_i$ ($i=1, 2, 3$), получим $\Theta(\mathbf{u}, \mathbf{a}, \mathbf{b})\geqslant\xi(\mathbf{u}, \mathbf{x})\geqslant 0$, и условие Адамара выполнено.

Обратно, пусть $\Theta(\mathbf{u}, \mathbf{a}, \mathbf{b})\geqslant 0$ для всех $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Положив $a_1=b_2=1$, $a_2=a_3=b_1=b_3=0$, получим отсюда первое неравенство из (1.2). Аналогично получаются два других неравенства из (1.2), и условие P выполнено.

Докажем, что выполнено условие Q. Предположив противное, получим $\xi(\mathbf{u}, \mathbf{x})<0$ для некоторого $\mathbf{x}$. Обозначив $a_i=|x_i|^{1/2}$, $b_i=|x_i|^{1/2}\operatorname{sign}(x_i)$, получим, что

$$a_ib_i=x_i,\quad a_i^2b_j^2+a_j^2b_i^2=2|x_i|\,|x_j|\quad (i,j=1,2,3),\qquad \Theta(\mathbf{u}, \mathbf{a}, \mathbf{b})=\xi(\mathbf{u}, \mathbf{x})<0$$

Пришли к противоречию.

2. Примеры. Если $u_1=u_2=u_3=u_0$ (равномерное растяжение или сжатие), то обозначим $p=\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$, $d=\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}$, $s=\sigma_{12}=\sigma_{23}=\sigma_{31}$ и докажем, что условие Адамара в точке $\mathbf{u}=(u_0, u_0, u_0)\in\Lambda$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$d\geqslant 0,\quad p+u_0(d-s)\geqslant 0 \qquad (2.1)$$

Действительно, переходя к пределу в левой части неравенств (1.2), получим, что каждое из них равносильно второму неравенству из (2.1). С другой стороны

$$\xi(\mathbf{u},\mathbf{x})=d\left(\sum_i x_i\right)^2+\frac{p+u_0(d-s)}{u}\sum_{i<j}(|x_i||x_j|-x_ix_j)$$

и $\xi(\mathbf{u}, \mathbf{x})\geqslant 0$ для всех $\mathbf{x}$ тогда и только тогда, когда выполнены неравенства (2.1).

Если $\sigma(u_1, u_2, u_3)=f(\rho)$, где $\rho=u_1u_2u_3$ и функция $f(\rho)$, $\rho>0$ дважды непрерывно дифференцируема (идеальная жидкость), то условие P выполнено, поскольку в этом случае $u_i\sigma_i=u_j\sigma_j$ (i, $j=1, 2, 3$). Имеем далее

$$\xi(\mathbf{u},\mathbf{x})=(u_1u_2u_3)^2f''(u_1u_2u_3)\left(\sum_i\frac{x_i}{u_i}\right)^2 \qquad (2.2)$$

и условие Адамара в точке $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)\in\Lambda$ выполнено тогда и только тогда, когда $f''(\rho)\geqslant 0$, $\rho=u_1u_2u_3$.

Пусть

$$\sigma(u_1, u_2, u_3)={}^1/_2C\{(u_1-1)^2+(u_2-1)^2+(u_3-1)^2-p[(u_1-u_2)^2+ +(u_2-u_3)^2+(u_3-u_1)^2]\}$$

причем $C>0$, $0<p<{}^1/_3$ (полулинейный материал). Заметим, что указанное ограничение на p соответствует ограничению на коэффициент Пуассона $\nu=p/(1-p)$ [2]: $0<\nu<{}^1/_2$.

Неравенства (1.2) записываются в виде

$$\begin{aligned}(1-2p)(u_2+u_3)+pu_1&\geqslant 1\\(1-2p)(u_3+u_1)+pu_2&\geqslant 1\\(1-2p)(u_1+u_2)+pu_3&\geqslant 1\end{aligned}\tag{2.3}$$

Докажем, что (2.3) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями для выполнения условия Адамара в точке $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)\in\Lambda$.

Действительно, легко видеть, что

$$\xi(\mathbf{u},\mathbf{x})= =C\left[(1-2p)\left(\sum_i x_i\right)^2+2\sum_{i<j}\frac{(1-2p)(u_i+u_j)+pu_{(ij)}-1}{u_i+u_j}(|x_i||x_j|-x_ix_j)\right]$$

$$u_{(12)}=u_3,\quad u_{(23)}=u_1,\quad u_{(13)}=u_2$$

Ясно, что если (2.3) имеет место, то $\xi(\mathbf{u},\mathbf{x})\geqslant 0$ для всех $\mathbf{x}$, и условие Адамара выполнено.

Укажем более или менее обширный класс энергий, удовлетворяющих условию Адамара для всех $(u_1, u_2, u_3)\in\Lambda$. Пусть

$$\sigma(u_1, u_2, u_3)=\varphi(u_1, u_2, u_3)+f(u_1u_2u_3)\tag{2.4}$$

Функцию $\varphi(u_1, u_2, u_3)$ будем считать симметричной (не меняющейся при перестановке аргументов), дважды непрерывно дифференцируемой, «неубывающей» и выпуклой. Два последних требования означают, что для всех $(u_1, u_2, u_3)\in\Lambda$ будет

$$\varphi_i\geqslant 0\quad (i=1,2,3)\tag{2.5}$$

и для произвольного $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$

$$\sum_{i,j}\varphi_{ij}x_ix_j\geqslant 0\tag{2.6}$$

Функцию $f=f(\rho)$ предположим дважды непрерывно дифференцируемой и выпуклой

$$f''(\rho)\geqslant 0,\quad \rho>0\tag{2.7}$$

Докажем сначала, что

$$(\varphi_i-\varphi_j)/(u_i-u_j)\geqslant 0 \text{ при } i\neq j\tag{2.8}$$

Пусть для определенности $i=1$, $j=2$, $u_1\geqslant u_2$. Рассмотрим функцию

$$r(t)=\varphi\left(\frac{u_1+u_2}{2}+t\frac{u_1-u_2}{2},\frac{u_1+u_2}{2}-t\frac{u_1-u_2}{2},u_3\right)$$

Функция $r(t)$ определена и выпукла при $0\leqslant t\leqslant 1$. Поэтому $dr(1)/dt\geqslant \geqslant dr(0)/dt=0$, т. е.

$$\frac{u_1-u_2}{2}[\varphi_1(u_1, u_2, u_3)-\varphi_2(u_1, u_2, u_3)]\geqslant 0$$

Если $u_1 \neq u_2$, то последнее неравенство эквивалентно (2.8). В случае $u_1 = u_2$ (2.8) может быть получено при помощи предельного перехода.

Для $i \neq j$ имеем

$$\frac{u_i\sigma_i - u_j\sigma_j}{u_i^2 - u_j^2} = \frac{u_i\varphi_i - u_j\varphi_j}{u_i^2 - u_j^2} = \frac{\varphi_i}{u_i + u_j} + \frac{u_j}{u_i + u_j}\,\frac{\varphi_i - \varphi_j}{u_i - u_j}$$

и учитывая (2.5) и (2.8), получим, что условие P выполнено для всех $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \Lambda$.

Из (2.5) и (2.8) следует также

$$\left| \frac{u_j\varphi_i - u_i\varphi_j}{u_i^2 - u_j^2} \right| \leqslant \frac{u_i\varphi_i - u_j\varphi_j}{u_i^2 - u_j^2} \qquad (i \neq j)$$

Учитывая (2.2), получим

$$\xi(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = \xi_0(\mathbf{u}, \mathbf{x}) + (u_1u_2u_3)^2 f''(u_1u_2u_3) \left(\sum_i \frac{x_i}{u_i} \right)^2 \geqslant \xi_0(\mathbf{u}, \mathbf{x}) =$$

$$= \sum_{i,j} \varphi_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i<j} \frac{u_j\varphi_i - u_i\varphi_j}{u_i^2 - u_j^2} x_i x_j + 2 \sum_{i<j} \frac{u_i\varphi_i - u_j\varphi_j}{u_i^2 - u_j^2} |x_i||x_j| \geqslant \sum_{i,j} \varphi_{ij} x_i x_j \geqslant 0$$

и условие Q также выполнено.

Таким образом при предложениях (2.5)—(2.7) условие Адамара для энергии (2.4) удовлетворено при всех $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \Lambda$.

Энергией указанного вида является, например

$$\sigma(u_1, u_2, u_3) = C\left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \frac{1}{u_1^2u_2^2u_3^2} \right), \qquad C > 0 \tag{2.9}$$

Заметим, что в точке $u_1 = u_2 = u_3 = 1$ энергия (2.9) имеет строгий минимум.

3. Истолкование условия P. Рассмотрим однородное изотропное упругое тело, находящееся в однородном деформированном состоянии с единичными главными растяжениями и заполняющее при этом единичный куб K: $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, 2, 3)$.

Если $(u_1, u_2, u_3) \in \Lambda$, то после наложения дополнительной аффинной деформации $X_i = u_i x_i$ рассматриваемое тело перейдет в однородное деформированное состояние с главными растяжениями u_1, u_2, u_3 и будет заполнять куб $K(u_1, u_2, u_3)$, определенный неравенствами $0 \leqslant x_i \leqslant u_i$. Заметим, что по определению $K(1, 1, 1) = K$.

Касательные напряжения на гранях куба $K(u_1, u_2, u_3)$ отсутствуют, нормальные напряжения t_i могут быть вычислены по формулам $t_i = (u_i/u_1u_2u_3)\sigma_i$, где $\sigma = \sigma(u_1, u_2, u_3)$ — удельная энергия деформации рассматриваемого тела.

Неравенства (1.2) могут быть переписаны в виде

$$\frac{t_1 - t_2}{u_1 - u_2} \geqslant 0, \qquad \frac{t_2 - t_3}{u_2 - u_3} \geqslant 0, \qquad \frac{t_3 - t_1}{u_3 - u_1} \geqslant 0 \tag{3.1}$$

Предположив для определенности $u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3$, из (3.1) получим $t_1 \geqslant t_2 \geqslant t_3$.

Таким образом выполнение условия P в точке $(u_1, u_2, u_3) \in \Lambda$ означает, что наибольшее (соответственно наименьшее) нормальное напряжение приложено к той грани куба $K(u_1, u_2, u_3)$, которая перпендикулярна наиболее (соответственно наименее) растянутым ребрам этого куба.

4. Истолкование условия Q. Для заданной непрерывно дифференцируемой кривой $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)=(u_1(t), u_2(t), u_3(t))\in\Lambda$, $\alpha<t<\beta$ введем функции

$$u_i'=\frac{du_i}{dt}, \quad u_i''=\frac{d^2u_i}{dt^2}, \quad u_i^*=\operatorname{sign}(u_i')\,u_i \quad (i=1,2,3)$$

$$s_1=u_1^*+u_2^*+u_3^*, \quad s_2=u_1^*u_2^*+u_2^*u_3^*+u_3^*u_1^*, \quad s_3=u_1^*u_2^*u_3^* \tag{4.1}$$

Определение 4.1. Дважды непрерывно дифференцируемую кривую $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)=(u_1(t), u_2(t), u_3(t))\in\Lambda$, $\alpha<t<\beta$ назовем специальной, если функции $s_i(t)$ линейны по t, т. е. существуют такие постоянные C_i, D_i, что при $\alpha<t<\beta$ будет

$$s_i(t)=C_it+D_i \quad (i=1, 2, 3) \tag{4.2}$$

Теорема. Если $u_1^\circ\neq u_2^\circ$, $u_2^\circ\neq u_3^\circ$, $u_3^\circ\neq u_1^\circ$, то энергия $\sigma=\sigma(u_1, u_2, u_3)$ удовлетворяет в точке $\mathbf{u}^\circ=(u_1^\circ, u_2^\circ, u_3^\circ)\in\Lambda$ условию Q тогда и только тогда, когда для любой специальной кривой $\mathbf{u}(t)=(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$, определенной на содержащем точку $t=0$ интервале, и такой, что $u_i(0)=u_i^\circ$, будет

$$\frac{d^2}{dt^2}\sigma[u_1(t), u_2(t), u_3(t)]\,|_{t=0}\geqslant 0 \tag{4.3}$$

Замечание. По всей видимости, теорема остается справедливой и в случае, когда среди чисел u_1°, u_2°, u_3° имеются равные.

Сформулированная теорема проясняет как математическую структуру, так и физический смысл условия Q.

Вместе с кривой $\mathbf{u}(t)=(u_1(t), u_2(t), u_3(t))\in\Lambda$ рассмотрим семейство однородных деформаций Γ_t однородного изотропного упругого тела, считая что под действием Γ_t тело деформируется указанным выше образом в куб $K(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$.

Тот факт, что кривая $\mathbf{u}(t)$ специальна, означает, что рассматриваемое деформирование происходит в определенном смысле равномерно по t. Например, если $u_i'>0$ $(i=1, 2, 3)$, то из (4.2) следует, что периметр, площадь боковой поверхности и объем куба $K(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ равномерно возрастают вместе с t.

Полная энергия деформации Γ_t будет $E_t=\sigma[u_1(t), u_2(t), u_3(t)]$, а виртуальная мощность $N_t=d\sigma[u_1(t), u_2(t), u_3(t)]/dt$.

Согласно сформулированной теореме, выполнение условия Q в точке $(u_1^\circ, u_2^\circ, u_3^\circ)$ означает, что при равномерном (в указанном смысле) дополнительном деформировании куба $K(u_1^\circ, u_2^\circ, u_3^\circ)$ требуемая виртуальная мощность возрастает, т. е. деформирование все более и более затруднено.

5. Доказательство теоремы. Пусть для определенности $u_1^\circ>u_2^\circ>u_3^\circ$. Обозначим Λ_0 подмножество Λ, состоящее из всех тех точек $(u_1, u_2, u_3)\in\Lambda$, для которых $u_1>u_2>u_3$. Ввиду «локальности» утверждения теоремы достаточно ограничиться специальными кривыми $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$ со значениями в Λ_0.

Для $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)\in\Lambda_0$ и $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ обозначим $\mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{x})$ вектор с компонентами

$$f_i(\mathbf{u}, \mathbf{x})=2x_i\sum_{j\neq i}\frac{u_jx_j}{u_i^2-u_j^2}+2u_i|x_i|\sum_{j\neq i}\frac{|x_j|}{u_i^2-u_j^2} \quad (i=1,2,3) \tag{5.1}$$

Лемма. Для того чтобы кривая $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)\in\Lambda_0$ являлась специальной, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{u}(t)$ удовлетворяла дифференциальному уравнению

$$\mathbf{u}''=\mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{u}'), \quad \alpha<t<\beta \tag{5.2}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)\in\Lambda_0$ — специальная кривая. Обозначим $\varepsilon_i=\varepsilon_i(t)=\operatorname{sign}(u_i')$ $(i=1, 2, 3)$. Из (4.1) и (4.2) получим

$$\varepsilon_1^2u_1^2+\varepsilon_2^2u_2^2+\varepsilon_3^2u_3^2=(C_1t+D_1)^2-2(C_2t+D_2) \tag{5.3}$$

Функция в правой части (5.3) непрерывна, каждая из функций $\varepsilon_i^2u_i^2$ полунепрерывна снизу. Отсюда, учитывая, что ε_i может принимать лишь значения 0, 1, -1, заключаем последовательно, что непрерывны функции $\varepsilon_i^2 u_i^2$, ε_i^2, ε_i. Таким образом ε_i не зависит от t при $\alpha<t<\beta$.

Продифференцировав (4.2) дважды по t, получим

$$\varepsilon_1 u_1''+\varepsilon_2 u_2''+\varepsilon_3 u_3''=0 \tag{5.4}$$

$$\varepsilon_1(\varepsilon_2 u_2+\varepsilon_3 u_3)u_1''+\varepsilon_2(\varepsilon_3 u_3+\varepsilon_1 u_1)u_2''+$$
$$+\varepsilon_3(\varepsilon_1 u_1+\varepsilon_2 u_2)u_3''=-2(\varepsilon_1\varepsilon_2 u_1' u_2'+\varepsilon_2\varepsilon_3 u_2' u_3'+\varepsilon_3\varepsilon_1 u_3' u_1')$$
$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(u_2 u_3 u_1''+u_3 u_1 u_2''+u_1 u_2 u_3'')=$$
$$=-2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(u_1 u_2' u_3'+u_2 u_3' u_1'+u_3 u_1' u_2')$$

Равенства (5.4) однозначно определяют $\mathbf{u}'''$ в зависимости от $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$. Если $\varepsilon_i\neq 0$, то это следует из того, что определитель «системы» (5.4)

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(\varepsilon_1 u_1-\varepsilon_2 u_2)(\varepsilon_2 u_2-\varepsilon_3 u_3)(\varepsilon_1 u_1-\varepsilon_3 u_3)$$

отличен от нуля. Случай, когда некоторые из чисел ε_1, ε_2, ε_3 равны нулю, рассматривается аналогично. Если, например, $\varepsilon_1\neq 0$, $\varepsilon_2\neq 0$, $\varepsilon_3=0$, то $u_3'=0$ и (5.4) сводится к системе двух уравнений с двумя неизвестными u_1'', u_2'', определитель которой $\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1 u_1-\varepsilon_2 u_2)$ не равен нулю.

С другой стороны, заметив, что $\varepsilon_i u_i'=|u_i'|$, $\varepsilon_i^2 u_i'=u_i'$, непосредственным вычислением проверим, что равенства (5.4) удовлетворены, если $u_i''=f_i(\mathbf{u},\mathbf{u}')$. Подставив, например, выражения (5.1) в первое равенство (5.4), получим

$$\varepsilon_1 u_1''+\varepsilon_2 u_2''+\varepsilon_3 u_3''=2\sum_{i\neq j}\varepsilon_i\frac{u_j u_i' u_j'+u_i|u_i'||u_j'|}{u_i^2-u_j^2}=$$

$$=2\sum_{i\neq j}{}' \frac{\varepsilon_i u_j+\varepsilon_j u_i}{u_i^2-u_j^2}u_i' u_j'=0 \tag{5.5}$$

Здесь знак Σ' означает двойное суммирование.

Таким образом необходимость выполнения (5.2) доказана.

Доказательство достаточности производится аналогично и поэтому ограничимся лишь его наброском. Пусть $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)\in\Lambda_0$ — решение дифференциального уравнения (5.2).

Учитывая однозначную разрешимость задачи Коши для уравнения (5.2) (хотя $\mathbf{f}(\mathbf{u},\mathbf{x})$ и не является дифференцируемой, локальное условие Липшица [3] при $\mathbf{u}\in\Lambda_0$ выполнено), убеждаемся, что функции $\varepsilon_i=\operatorname{sign}(u_i')$ постоянны при $\alpha<t<\beta$.

Используя выкладки типа (5.5), получаем равенства (5.4). Интегрируя дважды равенства (5.4), доказываем, что кривая $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$ специальна.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Легко проверить, что для любого $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$

$$\xi(\mathbf{u}^\circ,\mathbf{x})=\sum_{i,j}\sigma_{ij}x_i x_j+\sum_i\sigma_i f_i(\mathbf{u}^\circ,\mathbf{x}) \tag{5.6}$$

Если $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)\in\Lambda_0$ — специальная кривая, то согласно доказанной лемме

$$\frac{d^2}{dt^2}\sigma[u_1(t),u_2(t),u_3(t)]=\sum_{i,j}\sigma_{ij}u_i' u_j'+\sum_i\sigma_i u_i''=$$

$$=\sum_{i,j}\sigma_{ij}u_i' u_j'+\sum_i\sigma_i f_i(\mathbf{u},\mathbf{u}') \tag{5.7}$$

Предположив, что $\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}^\circ$ и обозначив $\mathbf{x}=\mathbf{u}'(0)$, получим из (5.6) и (5.7)

$$\frac{d^2}{dt^2}\sigma[u_1(t),u_2(t),u_3(t)]|_{t=0}=\xi(\mathbf{u}^\circ,\mathbf{x}) \tag{5.8}$$

Таким образом, если условие Q выполнено, то для любой специальной кривой выполнено и неравенство (4.3).

Обратно, для заданного $\mathbf{x}$, воспользовавшись леммой, найдем, решая дифференциальное уравнение (5.2), специальную кривую $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)\in\Lambda_0$, определенную на некотором интервале, содержащем $t=0$, и такую, что $\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}^\circ$, $\mathbf{u}'(0)=\mathbf{x}$. Если неравенство (4.3) выполнено, то, учитывая (5.8), получим $\xi(\mathbf{u}^\circ,\mathbf{x})\geqslant 0$ и условие Q также выполнено. Теорема доказана.

Автор благодарен А. И. Лурье и П. А. Жилину за внимание к работе.

Поступила 28 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М., «Мир», 1975.
2. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
3. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Мир», 1970.