

## О ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВЫХ ФОРМ РАВНОВЕСИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. В. БОЛОТИН, В. И. ВОРОБЬЕВ, В. А. СЕМЕНОВ,  
В. К. ЧЕРНОВ

(Москва)

Как известно, равновесие механической системы, неустойчивое при наличии консервативных сил, можно превратить в устойчивое при помощи периодического параметрического воздействия подходящей частоты и амплитуды. Примером служит стабилизация равновесия обращенного маятника путем сообщения точке подвеса периодических колебаний [1]. Большая часть результатов для этого класса задач была получена методом усреднения и родственными методами, существенно использующими возможность разделения «быстрых» и «медленных» движений [2]. Эти методы дают приближенное условие устойчивости, что ставит ряд дополнительных вопросов: об области применения приближенных результатов и о погрешности; о возможности потери устойчивости в классе быстрых движений; о взаимодействии обобщенных координат в системах с несколькими степенями свободы; об условиях устойчивости при достаточно относительно медленных параметрических воздействиях, при большом демпфировании и т. п. Аналогичные вопросы возникают также в связи с задачами о параметрической стабилизации при помощи полигармонических, почти периодических и стационарных случайных воздействий.

В данной работе получены точные в вычислительном отношении границы областей устойчивости параметрически стабилизируемых систем. Наряду с анализом области применения и оценкой погрешности результатов, доставляемых методом усреднения, обсуждаются качественные эффекты, которые не могут быть обнаружены методом усреднения и родственными приемами. Для исследования устойчивости применяется численный метод из [3].

1. Рассмотрим систему с  $n$  степенями свободы, линеаризованные уравнения возмущенного движения которой имеют вид

$$A \frac{d^2 q}{dt^2} + B \frac{dq}{dt} + [C + \mu F(t)] q = 0 \quad (1.1)$$

Здесь  $q(t)$  — вектор-функция обобщенных координат,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $F$  — матрицы размерностью  $n \times n$ ,  $\mu$  — действительное число. Матрица инерционных коэффициентов  $A$  и матрица демпфирования  $B$  — числовые, симметричные и положительно-определенные. Матрица упругих коэффициентов  $C$  числовая, симметричная; вообще говоря, ей соответствует знакопеременная квадратичная форма. Пусть в главных обобщенных координатах матрица  $A^{-1}C$  записывается в виде

$$A^{-1}C = \text{diag}\{-\omega_1^2, \dots, -\omega_r^2, \omega_{r+1}^2, \dots, \omega_n^2\} \quad (1.2)$$

где  $r$  — степень неустойчивости равновесия при одних консервативных силах. Числа  $\omega_k > 0$  будем называть собственными частотами системы для всех  $k$ , в том числе и при  $k \leq r$ . Элементы матрицы  $F(t)$  полагаем действительными интегрируемыми кусочно-непрерывными функциями  $t$  с периодом  $T = 2\pi\omega^{-1}$ , так что  $F(t+T) = F(t)$ .

Невозмущенному состоянию равновесия соответствует решение  $q=0$  системы (1.1). Если  $\mu=0$ ,  $r \geq 1$ , то равновесие неустойчиво. Пусть  $\mu > 0$ , т. е. на систему наложено периодическое параметрическое воздействие. Задача состоит в том, чтобы установить условия, связывающие параметры  $\mu$ ,  $\omega$  с параметрами системы, при которых равновесие  $q=0$  становится устойчивым.

Некоторые условия устойчивости, полученные методом усреднения, можно найти в [2]. Эти условия имеют вид односторонних ограничений, накладываемых на частоту  $\omega$ , и не учитывают возможности быстрой потери устойчивости. Параметрическое воздействие, стабилизирующее равновесия по отношению к формам движения при  $k \leq r$ , может оказаться дестабилизирующим по отношению к другим формам движения. Более того, даже в том случае, когда матрицы  $A$ ,  $B$  и  $C$  одновременно приводятся к диагональному виду, введение параметрического воздействия может вызвать связанность между формами и, следовательно связанность между медленными и быстрыми движениями. Таким образом, задачи о параметрической стабилизации систем с несколькими степенями свободы требуют более тщательного рассмотрения, чем это делалось до сих пор. Даже в простейшей задаче о стабилизации обращенного маятника при гармонических колебаниях точки опоры имеются не изученные до конца вопросы. Так, в условия стабилизации, получаемые по методу усреднения, не входит характеристика демпфирования (последнее полагается достаточно малым). Остается открытым вопрос о возможности повторной дестабилизации при колебаниях основания с большими амплитудами.

Для нахождения областей стабилизации в пространстве параметров применим численный метод из [3]. Система уравнений (1.1) приводится к нормальному виду относительно компонентов фазового вектора  $x^T = (q, q')^T$ . Далее одним из численных методов (например Рунге — Кутты) на отрезке  $[0, T]$  строится фундаментальная матрица Коши  $X(t)$ . Ее значение в конце первого периода  $R = X(T)$  представляет собой матрицу перехода (монодромии). Решение  $q=0$  системы (1.1) устойчиво по Ляпунову, если все мультипликаторы — корни уравнения

$$\det(R - \rho E) = 0 \quad (1.3)$$

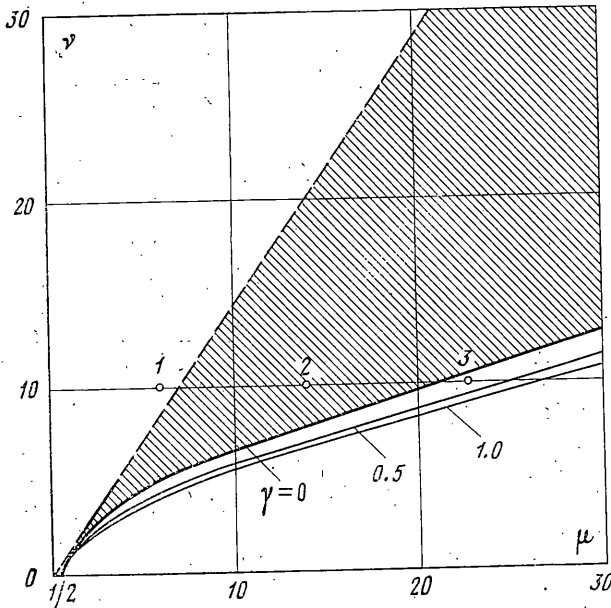
лежат в замкнутом единичном круге, причем мультипликаторы, расположенные на граничной окружности, — простые. Решение  $q=0$  асимптотически устойчиво, если все мультипликаторы лежат в открытом единичном круге. Практически анализ устойчивости проводится либо путем непосредственного вычисления комплексных корней уравнения (1.3), либо путем анализа норм последовательности матриц  $R, R^2, R^4, \dots, R^{2^p}$ . Алгоритм включает в себя организацию цикла по параметрам системы и поиск границы областей устойчивости методом дихотомии. Подробности можно найти в [3]. Устойчивость и надежность вычислительной схемы контролируются в процессе вычислений по отсутствию разброса у точек, соответствующих границам областей устойчивости. Поскольку для нахождения каждой точки границы матрица перехода отыскивается заново, то тем самым контролируются не только машинные ошибки, но и погрешности численного интегрирования.

2. Задача о параметрической стабилизации обращенного маятника при гармонических колебаниях точки опоры приводит к уравнению

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\gamma\omega_0 \frac{dq}{dt} - \omega_0^2(1 + 2\mu \cos \omega t)q = 0 \quad (2.1)$$

где  $q(t)$  — малый угол отклонения маятника от вертикального положения,

$\omega_0$  — собственная частота маятника,  $\gamma$  — безразмерная характеристика демпфирования,  $\mu$  — коэффициент параметрического возбуждения, связанный с амплитудой  $a$  и частотой  $\omega$  колебаний точки подвеса соотношением  $\mu = a\omega^2/2g$ ,  $g$  — ускорение силы тяжести. Если частотное отношение



Фиг. 1

$\nu = \omega/\omega_0$  и коэффициент возбуждения  $\mu$  достаточно велики по сравнению с единицей, а параметр демпфирования  $\gamma$  достаточно мал по сравнению с единицей, то метод усреднения дает приближенное условие параметрической стабилизации

$$\nu < \sqrt{2}\mu \quad (2.2)$$

При  $\gamma = 0$  область параметрической стабилизации может быть найдена непосредственно из соотношений для собственных значений уравнения Матье

$$\frac{d^2 q}{dz^2} + (\lambda + 2\sigma \cos 2z) q = 0 \quad (2.3)$$

Явление параметрической стабилизации описывается уравнением (2.3) при  $\lambda < 0$ . На границах области стабилизации уравнение (2.3) имеет решения, совпадающие с функциями Матье  $se_0(z, \sigma)$  и  $se_1(z, \sigma)$ . Для соответствующих собственных значений при не слишком больших  $\sigma$  имеем разложения [4]:

$$\lambda_0 = -\frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{7}{128}\sigma^4 - \frac{29}{2304}\sigma^6 + \frac{68\,687}{18\,874\,368}\sigma^8 + O(\sigma^{10}) \quad (2.4)$$

$$\lambda_1 = 1 + \sigma - \frac{1}{8}\sigma^2 + \frac{1}{64}\sigma^3 - \frac{1}{1536}\sigma^4 + \frac{11}{36\,864}\sigma^5 + O(\sigma^6)$$

При больших  $\sigma$  можно пользоваться асимптотическими формулами

$$\lambda_0 \sim \lambda_1 \sim -2\sigma + 2\sigma^{1/2} \quad (2.5)$$

Область стабилизации определяется неравенствами  $\lambda_0(\sigma) < \lambda < \lambda_1(\sigma)$ . Для перехода к уравнению (2.1) при  $\gamma=0$  следует положить  $2z = \omega t$ ,  $\lambda = -\omega_0^2/\omega^2$ ,  $\sigma = \mu\omega_0^2/\omega^2$ . Область стабилизации на плоскости параметров  $\mu, \nu$  показана на фиг. 1 (заштрихована).

Верхняя граница области определяется по методу усреднения, причем первое приближение этого метода соответствует удержанию в правой части первой формулы (2.4) одного члена ряда. Граница стабилизации по условию (2.2) нанесена на фиг. 1 штриховой линией. При достаточно больших  $\mu$  и  $\nu$  эта граница удовлетворительно согласуется с точным решением. Действительно, решения вблизи этой границы могут быть интерпретированы как результат наложения быстрых движений на медленные движения, что объясняет успех метода усреднения. Для нахождения нижней границы метод усреднения [2] непригоден. На фиг. 2 показано, как изменяется характер решений при пересечении области параметрической стабилизации. Реализации решений получены на аналоговой машине; нумерация решений соответствует положению точек на фиг. 1. Точка 1 получена для области неустойчивости вблизи верхней границы, точка 2 — для области стабилизации, точка 3 — для области неустойчивости после пересечения нижней границы области стабилизации. В дальнейшем верхнюю на фиг. 2 границу будем условно называть границей медленной неустойчивости, нижнюю — границей быстрой неустойчивости.

Тонкими линиями на фиг. 1 нанесены границы области параметрической стабилизации при наличии демпфирования. Эти границы рассчитаны численным методом [3], который, будучи машинно-точным, все же не позволяет уловить устойчивость при слишком тесном смыкании границ области стабилизации. За исключением области очень низких частот демпфирование практически не влияет на границу медленной неустойчивости. Более существенно влияние демпфирования на границу быстрой неустойчивости. Но даже при весьма большом демпфировании ( $\gamma=1$ ) не наблюдается качественных изменений области стабилизации.

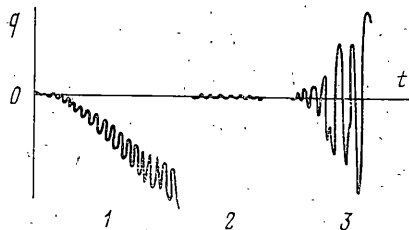
Применительно к маятнику с колеблющейся опорой коэффициент возбуждения  $\mu$  пропорционален амплитуде ускорения основания, так что он зависит от частоты  $\omega$ . Поэтому более естественно обсуждать условия стабилизации в переменных  $\mu_0, \nu$ , где  $\mu_0$  — параметр в соотношении  $\mu = \mu_0 \nu^2$ . При этом  $\mu = a/2l$  ( $l$  — длина маятника). Приближенное условие стабилизации (2.2) принимает вид

$$\nu > 1/\mu_0 \sqrt{2} \quad (2.6)$$

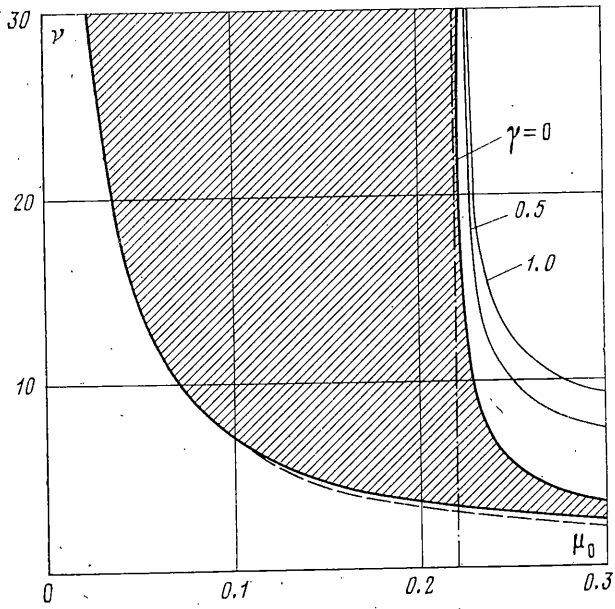
и дает для частоты  $\omega$  ограничение снизу, которое в точности совпадает с условием стабилизации из [2]:

$$a^2 \omega^2 > 2gl \quad (2.7)$$

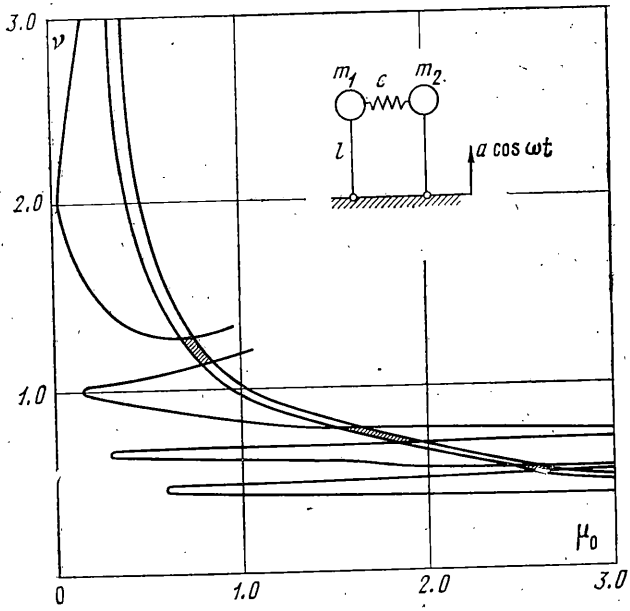
Область стабилизации маятника на плоскости  $\mu_0, \nu$  показана на фиг. 3. Нижняя по параметру частоты граница является границей медленной неустойчивости, т. е. соответствует верхней границе на фиг. 1. При малых и умеренно больших значениях относительной амплитуды  $a/l$  стабилизация маятника определяется условием (2.6), т. е. решением, которое дает метод усреднения. Граница быстрой неустойчивости реализуется лишь при достаточно больших значениях относительной амплитуды  $a/l$ .



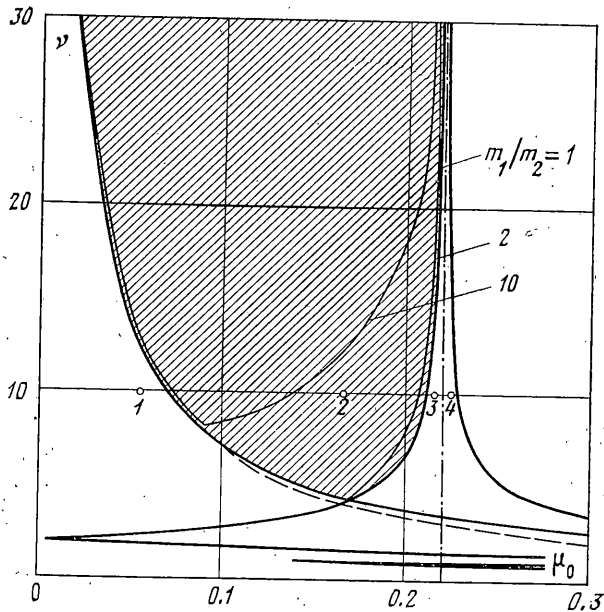
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

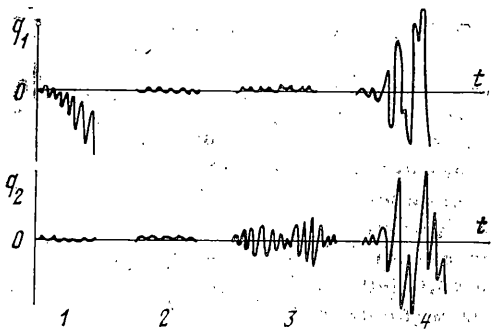
3. Для примера системы с двумя степенями свободы возьмем скрепленные пружиной перевернутые маятники на основании, совершающем вертикальные колебания по закону  $a \cos \omega t$  (фиг. 4). Пусть все параметры маятников — массы  $m_1 = m_2 = m$ , длины  $l$ , коэффициент демпфирования  $\varepsilon$  одинаковы, а коэффициент жесткости пружины  $c$  удовлетворяет условию  $c > mg/l$ . Формы движения системы разделяются на симметричные и антисимметричные, причем степень неустойчивости  $r=1$ : антисимметричная форма неустойчива, симметричная — устойчива. Уравнения для каждой из форм имеют вид

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dq_1}{dt} - \omega_1^2 (1 - 2\mu \cos \omega t) q_1 = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dq_2}{dt} + \omega_2^2 (1 + 2\mu \cos \omega t) q_2 = 0$$

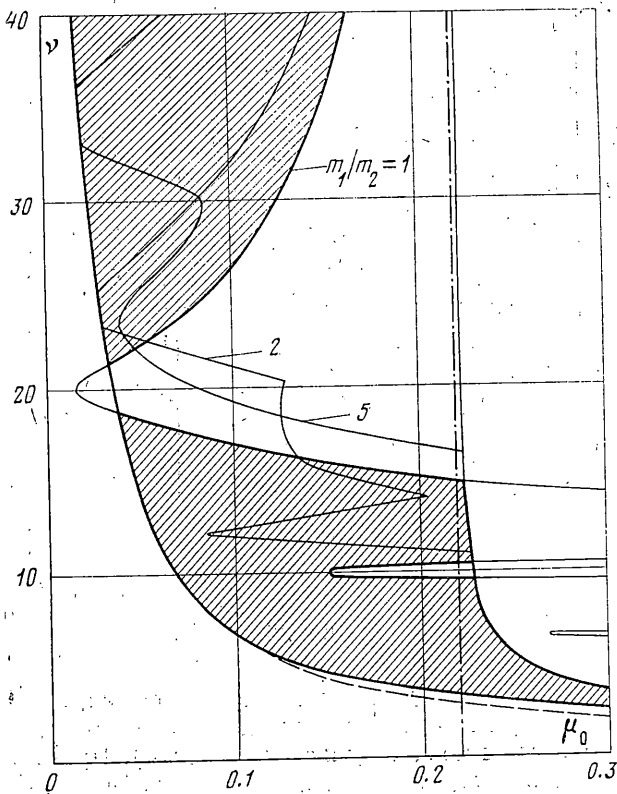
$$\omega_1^2 = g/l, \quad \omega_2^2 = 2c/m - g/l$$

$$\mu = a\omega^2/2g \quad (3.2)$$



Фиг. 6

Первое уравнение (3.1) соответствует уравнению (2.3) при  $\lambda < 0$ , второе — при  $\lambda > 0$ . Область параметрической стабилизации получается наложением областей устойчивости для обоих уравнений. Результаты вычислений для случая  $c = mg/l$ ,  $\omega_2 = \omega_1$ ,  $\gamma = \varepsilon/\omega_1 = 0.01$  представлены на фиг. 4 и 5; при этом фиг. 4 соответствует низкочастотной области, фиг. 5 — высокочастотной области. Здесь  $\nu = \omega/\omega_1$ ,  $\mu_0 = a/2l$ . Области параметрической стабилизации заштрихованы. Как видно из фиг. 4, узкая область стабилизации антисимметричных форм почти целиком накрывается областями



Фиг. 7

параметрического резонанса по отношению к симметричным формам колебаний (на диаграмме показаны лишь первые четыре области параметрического резонанса). Область параметрической стабилизации при высоких частотах (фиг. 5) с одной стороны ограничивается условием стабилизации по отношению к антисимметричной форме, с другой — границей области главного параметрического резонанса по отношению к симметричной форме. Последняя граница имеет общую асимптоту с границей быстрой неустойчивости по отношению к симметричной форме.

На фиг. 6 показаны реализации решений, полученные моделированием на аналоговой машине; нумерация решений соответствует нумерации точек на фиг. 5. Неустойчивое решение 1 получено для точки вблизи границы медленной неустойчивости; симметричная форма колебаний при этом устойчива. Точка 2 находится в области параметрической стабилизации, точка 3 — в области, где симметричная форма неустойчива, а антисимметричная форма — устойчива. Наконец, точка 4 соответствует полной неустойчивости.

Конфигурация областей устойчивости в существенной степени зависит от соотношения между парциальными частотами системы. На фиг. 7 показана область стабилизации для системы двух упругоскрепленных маятников при коэффициенте упругости пружины  $c=101mg/2l$ . При этом соотношение между парциальными частотами будет  $\omega_2=10\omega_1$ . Безразмерная характеристика демпфирования взята  $\gamma=\varepsilon/\omega_1=0.01$ . Область стабилизации по отношению к антисимметричной форме пересекается областью главного параметрического резонанса по отношению к симметричной

форме и еще одной областью побочного резонанса.

Если  $m_1 \neq m_2$ , то обобщенные координаты, вообще говоря, не разделяются. Матрицы коэффициентов в уравнениях (1.1) принимают вид

$$A = E, B = 2\epsilon E, \mu F(t) = \\ = \text{diag} \{ 2\mu\omega^2 \cos \omega t, 2\mu\omega^2 \cos \omega t \}$$

$$C = \begin{vmatrix} \Omega_1^2 - \Omega_0^2 & -\Omega_1^2 \\ -\Omega_2^2 & \Omega_2^2 - \Omega_0^2 \end{vmatrix}$$

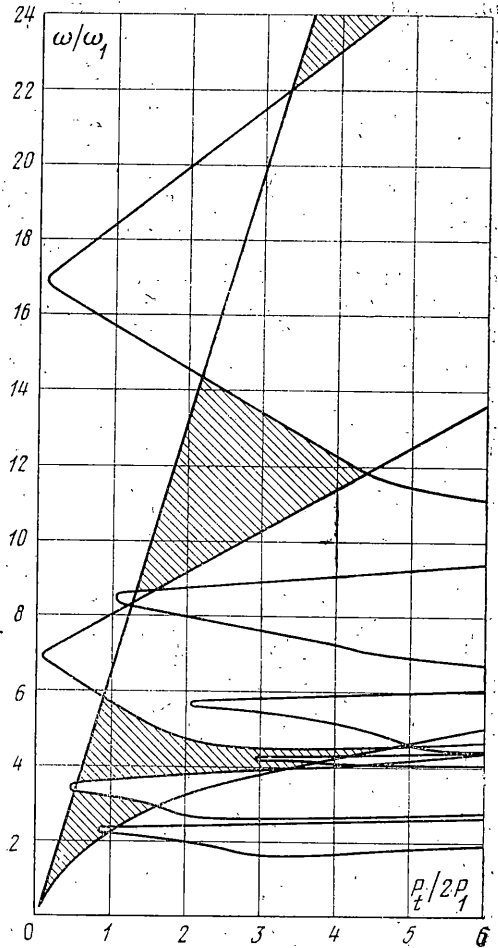
$$\Omega_0^2 = g/l, \Omega_j^2 = c/m_j, \mu = a/2l$$

Результаты вычислений для случая  $m_1 = 2m_2$  и  $m_1 = 5m_2$  показаны на фиг. 5 и 7 тонкими линиями. Остальные параметры системы оставлены прежними. Заметные изменения области стабилизации наблюдаются лишь вблизи границы параметрического резонанса по отношению к форме колебаний, устойчивой при одних консервативных силах. Приближенные достаточные условия стабилизации по методу усреднения для этой системы совпадают с условием (2.7). Соответствующая граница нанесена на фиг. 5 и 7 штриховыми линиями. Как и в предыдущей задаче, в той части пространства параметров, где выполнены условия применимости метода усреднения [2], последний дает удовлетворительное приближение для границы области параметрической стабилизации. При этом существенно, чтобы все собственные частоты системы были малы по сравнению с частотами параметрического воздействия.

4. Сформулированные выводы в полной мере применимы к распределенным системам с точечным спектром [5, 6]. В качестве примера рассмотрим задачу о параметрической стабилизации прямолинейной формы упругого стержня, сжатого осевой силой  $P_0$ , которая превышает критическое эйлерово значение  $P_1$ . Для стабилизации прямолинейной формы добавим к силе  $P_0$  периодическую составляющую  $P_t \cos \omega t$ . Линеаризованное уравнение возмущенного движения стержня имеет вид

$$EIw^{IV} + (P_0 + P_t \cos \omega t)w'' + 2m\epsilon w' + mw'' = 0 \quad (4.1)$$

где  $w(x, t)$  — прогиб стержня,  $EI$  — изгибная жесткость,  $m$  — масса, отнесенная к единице длины,  $\epsilon$  — характеристика демпфирования. Штрихами обозначено дифференцирование по осевой координате  $x$ . Граничные усло-



Фиг. 8



вия для опертого стержня будут  $w=w''=0$  при  $x=0, x=l$  ( $l$  — длина стержня). Стандартной подстановкой

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

уравнение (4.1) приводится к последовательности разделяющихся обыкновенных дифференциальных уравнений типа (2.1) относительно обобщенных координат  $q_k(t)$ . Дальнейший анализ проводится, как и выше. На фиг. 8 заштрихованы области параметрической стабилизации при  $P_0 = 1.05P_1$ ,  $\gamma = \varepsilon/\omega_1 = 0.01$ ,  $\omega_1$  — основная собственная частота ненагруженного стержня. Область параметрической стабилизации по отношению к основной собственной форме покрывается областями параметрического резонанса по отношению к остальным собственным формам. На фиг. 8 нанесены по три области параметрического резонанса для второй и третьей собственных форм, т. е. при  $k=2, 3$ . Таким образом, возможности параметрической стабилизации в этой задаче оказываются ограниченными из-за возможности возбуждения параметрических колебаний относительно высших собственных форм.

Поступила 10 XI 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса. ЖЭТФ, 1951, т. 21, вып. 5.
2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958.
3. Болотин В. В. Численный анализ устойчивости линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. В сб. Избранные проблемы прикладной механики. (К 60-летию акад. В. Н. Челомея), М., Изд-во ВИНТИ, 1974, стр. 155–166.
4. Мак Лаглан Н. В. Теория и приложения функций Матье. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
5. Челомей В. Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций. Докл. АН СССР, 1956, т. 110, № 3.
6. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1956.