бающая угловых колебаний, как и для случая съема сигнала во вращающейся системе координат, зависит от обеих измеряемых скоростей $\Theta^\bullet$ и $\Psi^\bullet$ одновременно.

Рассмотрим теперь случай, когда конструктивным путем обеспечено бесконечно большое значение коэффициента жесткости c_y, а $H=0$. Поведение такого гироскопа относительно неподвижной системы координат характеризуется следующим комплексным дифференциальным уравнением:

$$\begin{gathered}
{}^1/_2(I_{x1}+I_{x3})z^{\bullet\bullet}-i\Omega(I_{x1}+I_{x3})z^\bullet+{}^1/_2[c_x+H\Omega+(I_{z1}+I_{z3}-I_{y1}-I_{y3}-I_{x1}-I_{x3})\Omega^2]z+\\
+{}^1/_2(I_{x1}+I_{x3})\bar{z}^{\bullet\bullet}e^{2i\Omega t}+i\Omega(I_{x1}+I_{x3})\bar{z}^\bullet e^{2i\Omega t}+{}^1/_2[c_x+H\Omega+(I_{z1}+I_{z3}-I_{y1}-I_{y3}-I_{x1}-\\
-I_{x3})\Omega^2]\bar{z}c^{2i\Omega t}=-{}^1/_2(I_{x1}+I_{x3})[(\Psi^{\bullet\bullet}-i\Theta^{\bullet\bullet})e^{2i\Omega t}+\Psi^{\bullet\bullet}+i\Theta^{\bullet\bullet}]-{}^1/_2[H+(I_{z1}+I_{z3}-I_{y1}-I_{y3}+\\
+I_{x1}+I_{x3})\Omega][(\Theta^\bullet+i\Psi^\bullet)e^{2i\Omega t}+\Theta^\bullet-i\Psi^\bullet]
\end{gathered}$$

Полученное дифференциальное уравнение совпадает с уравнениями П. Сейвета [5], если последние привести к комплексной переменной z.

Таким образом гироскоп во вращающемся кардановом подвесе является обобщенной динамической моделью вибрационных датчиков параметров углового движения основания. Данный гироскоп может быть использован для одновременного измерения медленно меняющихся угловых скоростей $\Theta^\bullet$ и $\Psi^\bullet$, причем независимо от того, по углу поворота какой рамки и в какой системе координат производится съем сигнала.

Поступила 30 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бутенин Н. В., Лунц Я. Л.* О движении свободного гироскопа при равномерном вращении основания. Изв. вузов. Приборостроение, 1963, т. 6, № 5.
2. *Ильчанинов В. П.* Влияние принудительного вращения карданова подвеса на движение астатического гироскопа. Изв. вузов. Приборостроение, 1970, т. 13, № 12.
3. *Лунц Я. Л.* Ошибки гироскопических приборов. Л., «Судостроение», 1968.
4. *Смолицкий Х. Л.* Ошибки гироскопа в кардановом подвесе, находящегося на подвижном основании. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 3.
5. *Savet P. H.* Dynamics of ideal suspensions applied to rotating bodies in space. J. Spacecraft, 1966, vol. 3, No. 9. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев. М., «Мир», 1967, № 5.)

УДК 534

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩЕНИЯ НЕСБАЛАНСИРОВАННОГО РОТОРА НА ГИБКОМ ВАЛУ

В. А. САМСОНОВ

(Москва)

Известно [1, 2], что исследование движения механической системы с циклическими координатами, находящейся под действием потенциальных сил, может быть сведено к исследованию движения некоторой приведенной системы, находящейся под действием потенциальных сил, производных от измененной силовой функции W, и сил гироскопических, если исходная система была гироскопически связанной. Приведенная система может иметь положение равновесия, отвечающее стационарному движению исходной системы, в котором силовая функция W не имеет максимума, но которое стабилизировано гироскопическими силами. Известно также, что включение в приведенную систему диссипативных сил с полной диссипацией (это эквивалентно введению в исходную сил с частичной диссипацией) разрушает устойчивость указанного равновесия (стационарного движения).

Именно таким образом Н. Г. Четаев показал [3] дестабилизирующее влияние «внутреннего» трения в задаче о стационарном движении ротора, эксцентрично закрепленного на гибком валу. Повторим вкратце рассуждения Н. Г. Четаева, используя лишь иной набор обобщенных координат, традиционный для теории гибкого вала.

Предположим, что ротор совершает плоскопараллельное движение. В плоскости движения выберем начало подвижной системы координат в точке O пересечения этой плоскости с прямой, соединяющей подшипники вала. Ось x направим параллельно отрезку GP, соединяющему центр тяжести ротора G и точку P его закрепления на валу. Обозначим через x, y координаты точки G, φ – угол между осью x и некоторым неподвижным направлением.

Кинетическая энергия ротора и силовая функция упругого (в линейном приближении) воздействия вала имеют вид

$$T=0.5m[x^{\bullet 2}+y^{\bullet 2}+2\varphi^\bullet(xy^\bullet-yx^\bullet)+\varphi^{\bullet 2}(x^2+y^2)]+0.5I\varphi^{\bullet 2}$$
$$U=-0.5c[y^2+(x+e)^2]$$

Здесь m – масса ротора, I – его центральный момент инерции, e – длина отрезка GP, c – коэффициент упругости вала.

Угол φ – циклическая координата, ей отвечает первый интеграл

$$I\dot\varphi+m\dot\varphi(x^2+y^2)+m(x\dot y-y\dot x)=\gamma=\mathrm{const}$$

При игнорировании циклической координаты I получаем функцию Рауса R приведенной системы в виде

$$R=T+U-\gamma\dot\varphi=0.5m(\dot x^2+\dot y^2)-m^2(y\dot x-x\dot y)^2\Phi(x,y)+$$
$$+2m\gamma(x\dot y-y\dot x)\Phi(x,y)-\gamma^2\Phi(x,y)+U$$
$$\Phi(x,y)=-[I+0.5m(x^2+y^2)]/[I+m(x^2+y^2)]^2$$

Нетрудно заметить, что измененная силовая функция $W=-\gamma^2\Phi(x,y)+U$ при достаточно больших значениях $|\gamma|$ имеет изолированный минимум [1] в окрестности начала координат, отвечающий положению равновесия приведенной системы. Анализ уравнений возмущенного движения, линеаризованных около этого положения [3], показал, что в рассматриваемой задаче имеет место гироскопическая стабилизация равновесия при достаточно больших значениях $|\gamma|$.

Такая стабилизация в силу теорем Кельвина – Четаева разрушается диссипативными силами, вводимыми в приведенную систему. Именно такими являются силы внутреннего трения, возникающие при деформации вала. Вывод о дестабилизирующем влиянии сил внутреннего трения относится к разряду «грубых» свойств, таких, которые не зависят от формы аналитической записи этих сил [2].

Аналогичный вывод можно сделать и в том случае, когда координата φ является регулируемой, т. е. когда к ротору приложена пара сил, момент которой подбирается таким, чтобы во все время движения было $\dot\varphi=\omega=\mathrm{const}$.

В этом случае измененная силовая функция $W'=U-m\omega^2(x^2+y^2)0.5$ также имеет изолированный минимум в окрестности начала координат при $\omega^2\gg c/m$.

Вывод о разрушении гироскопической стабилизации соответствующего равновесия силами внутреннего трения неоднократно иллюстрировался результатами анализа уравнений движения приведенной системы с использованием некоторых аналитических моделей этих сил (см., например, [5, 6] и приведенную в этих работах библиографию).

Одной из центральных задач теории гибкого вала является задача о возможности стабилизации вращения ротора с помощью сил «внешнего» трения. Показано [5, 6], что в том случае, когда внутреннее трение принимается пропорциональным скорости деформирования вала, внешнее трение, линейно-зависящее от скорости центра ротора, расширяет диапазон угловых скоростей устойчивого вращения ротора, но этот диапазон все же конечен [3].

Наряду с традиционной моделью регулирования представляет интерес и такой способ компенсации трения, при котором во все время движения сохраняется постоянным и заданным момент количества движения ротора $\gamma=\gamma_0=\mathrm{const}$.

Предположим, что внутреннее трение вала линейно и что к ротору в точке P приложена внешняя диссипативная сила, моделирующая трение вала об воздух. Величину этой силы примем пропорциональной скорости точки P.

Уравнения для определения положения равновесия приведенной системы имеют вид (b – коэффициент внешнего трения)

$$\begin{aligned}&\gamma_0^2\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial x}+by\frac{\gamma_0}{I+m(x^2+y^2)}=0\\&\gamma_0^2\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\frac{\partial U}{\partial y}-b(x+e)\frac{\gamma_0}{I+m(x^2+y^2)}=0\end{aligned}\tag{1}$$

Нетрудно заметить, что с увеличением $|\gamma_0|$ решения уравнений (1) приближаются к экстремумам функции Φ. Поскольку начало координат является максимумом Φ, то при достаточно больших $|\gamma_0|$ существует решение уравнений (1) $x_0(\gamma_0)$, $y_0(\gamma_0)$, такое, что $x_0^2+y_0^2\to0$ при $|\gamma_0|\to\infty$.

---

[1] Функция W имеет и другие экстремумы, однако с практической точки зрения наибольший интерес представляет анализ указанного равновесия, отвечающего «самоцентрированному» вращению ротора.

[2] В работе [4] результат Н. Г. Четаева ошибочно отнесен к случаю, когда в роторе действуют силы с полной диссипацией, а потери на трение при установившемся вращении компенсируются постоянными управляющими силами.

[3] В работе [4] построена модель ротора, вращение которого устойчиво при любых угловых скоростях. Однако из этой модели исключено внутреннее трение – основной дестабилизирующий фактор.

Проведем качественный анализ устойчивости этого положения равновесия. В коэффициентах уравнений, описывающих малые движения приведенной системы около положения равновесия, будем пренебрегать величинами x_0, y_0. Получим

$$\begin{aligned} &m\eta^{\cdot\cdot} - 4m\frac{\gamma_0}{I}\zeta^{\cdot} + (a+b)\eta^{\cdot} + \left(c - 3m\frac{\gamma_0^2}{I^2}\right)\eta - b\frac{\gamma_0}{I}\zeta = 0 \\ &m\zeta^{\cdot\cdot} + 4m\frac{\gamma_0}{I}\eta^{\cdot} + (a+b)\zeta^{\cdot} + \left(c - 3m\frac{\gamma_0^2}{I^2}\right)\zeta + b\frac{\gamma_0}{I}\eta = 0 \\ &\eta = x - x_0, \qquad \zeta = y - y_0 \end{aligned} \tag{2}$$

Заметим, что уравнения (2) описывают движение системы, в которой наряду с консервативными, гироскопическими и диссипативными силами присутствуют также позиционные неконсервативные силы, порожденные внешним трением. Такая комбинация, как показывают примеры [7], может создавать возможности для стабилизации равновесия даже при $c-3m\gamma_0^2I^{-2}<0$.

Условие затухания малых движений (условие асимптотической устойчивости исследуемого равновесия) имеет вид

$$\gamma_0^2 < \frac{I^2c(a+b)^2}{m(3a^2+2ab)}$$

Действительно, с ростом параметра b (при фиксированных остальных) диапазон для изменения параметра γ_0, отвечающего устойчивому вращению ротора, расширяется.

Однако условие устойчивости и предположение о малости величин x_0, y_0 совместны лишь при $b/a\gg1$.

В частности, при $a=0$ (отсутствие внутренней диссипации) вращение ротора устойчиво и при сколь угодно больших значениях параметра γ_0.

Приведенные здесь выводы аналогичны выводам работы [5]. Из них следует, что чем больше отношение коэффициентов внешнего и внутреннего трения, тем с большей угловой скоростью может устойчиво вращаться ротор. Однако и эти выводы полностью не объясняют значения внешнего трения при стабилизации вращения ротора со сколь угодно большой угловой скоростью.

Поступила 10 XI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Routh E. J.* The advanced part of a treatise on the dinamics of a system of rigid bodies. London, Dover Publ. Inc., 1905.
2. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
3. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.– Л., Гостехиздат, 1946, стр. 25–28, 107–108.
4. *Малаховский Е. Е., Позняк Э. Л.* Об устойчивости равномерного вращения неуравновешенного гибкого ротора. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 6.
5. *Диментберг Ф. М.* Изгибные колебания вращающихся валов. М., Изд-во АН СССР, 1959, стр. 22–36.
6. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
7. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М., «Наука», 1971.