

бенности исследуемой гироскопической системы, и прогнозировать более точно выходную ее координату при действии возмущений, например с помощью ЦВМ, установленной на объекте.

Поступила 10 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Жбанов Ю. К. Гироскопас на качке. Инж. ж. МТТ, 1966, № 3.
2. Ишлинский А. Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М., «Наука», 1976.
3. Магнус К. Гироскоп, теория и применение. М., «Мир», 1974.
4. Никитин Е. А., Шестов С. А., Матвеев В. А. Гироскопические системы, ч. 3. Элементы гироскопических приборов. М., «Высшая школа», 1972.
5. Потемкин А. Э. Исследование влияния вибраций на показания гироскопаса. Тр. ЦНИИ. Мор. флота «Судоходство и связь», вып. 30. Л., «Морской транспорт», 1960.
6. Ригли У., Холлистер У., Денхард У. Теория, проектирование и испытания гироскопов. М., «Мир», 1972.
7. Идентификация динамических систем. Вильнюс, «Минтис», 1974.
8. Эйхкофф Н. Основы идентификации систем управления. М., «Мир», 1975.
9. Сольницев Р. И. Вычислительные машины в судовой гироскопии. Л., «Судостроение», 1977.
10. Ривкин С. С. Теория гироскопических устройств, ч. 1-2. Л., «Судостроение», 1962-1964.
11. Ройтенберг Я. Н. Гироскопы. М., «Наука», 1966.
12. Бесеверский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. М., «Наука», 1972.

УДК 531.383

К ТЕОРИИ ГИРОСКОПА ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

В. Г. ТЕРЕШИН

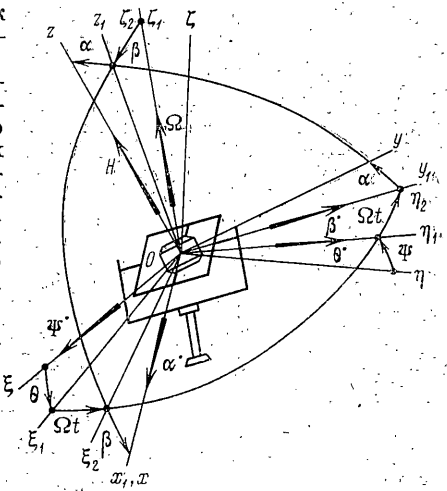
(Уфа)

В работах [1-4] рассматривается поведение классического гироскопа во вращающемся кардановом подвесе. Основная цель данной работы — анализ возможностей гироскопа во вращающемся кардановом подвесе для определения параметров углового движения основания. Показано, что такой гироскоп может быть использован как вибродиагностический измеритель медленно меняющихся угловых скоростей.

Рассмотрим динамику гироскопа при придательном равномерном вращении карданова подвеса (фигура). Будем считать, что конструкция подвеса реализована на упругих элементах, которые имеют бесконечно большую жесткость на изгиб и конечную жесткость на кручение. Свяжем с основанием систему осей $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, положение которой относительно инерциальной системы координат $O\xi\eta\zeta$ определяется углами Θ и Ψ . Положение главной оси гироскопа Oz определяется малыми углами α и β , отсчитываемыми от осей $O\xi_2\eta_2\zeta_2$, связанных с вспомогательным кольцом. Данное кольцо вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси $O\xi_1$.

Заметим, что углы отклонения основания Θ и Ψ являются малыми, а угловая скорость вращения кольца Ω на порядок выше скоростей Θ и Ψ . Линеаризованные дифференциальные уравнения, описывающие движение гироскопа во вращающемся кардановом подвесе на подвижном основании, записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & (I_x - I_{x2})\alpha'' + [c_x + H\Omega + (I_z - I_y - I_{z2} + I_{y2})\Omega^2]\alpha + [H + (I_z - I_y - I_x - I_{z2} + I_{y2} + I_{x2})\Omega]\beta'' = \\
 & = (I_{x2} - I_x)(\Theta'' \sin \Omega t + \Psi'' \cos \Omega t) - [H + (I_z - I_y + I_x - I_{z2} + I_{y2} - I_{x2})\Omega](\Theta' \cos \Omega t - \\
 & \quad - \Psi' \sin \Omega t) \\
 & I_y\beta'' + [c_y + H\Omega + (I_z - I_x)\Omega^2]\beta - [H + (I_z - I_y - I_x - I_{z2} + I_{y2} + I_{x2})\Omega]\alpha'' = \\
 & = -I_y(\Theta'' \cos \Omega t - \Psi'' \sin \Omega t) + [H + (I_z + I_y - I_x)\Omega](\Theta' \sin \Omega t + \Psi' \cos \Omega t) \\
 & I_x = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3}, \quad I_y = I_{y1} + I_{y2} + I_{y3}, \quad I_z = I_{z1} + I_{z2} + I_{z3}.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$



Здесь I_{x1}, I_{y1}, I_{z1} — моменты инерции ротора; I_{x2}, I_{y2}, I_{z2} — моменты инерции наружного кольца карданова подвеса; I_{x3}, I_{y3}, I_{z3} — моменты инерции внутреннего кольца; H — кинетический момент гироскопа; c_x, c_y — коэффициенты жесткости упругих элементов карданова подвеса.

Введем комплексную переменную

$$z = \alpha + i\beta \quad (2)$$

Тогда вместо уравнений (1) будем иметь

$$\begin{aligned} z^{*-1/2} i (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) z^{*+1/2} i (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \bar{z}^{*+1/2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) z^{*+1/2} (\omega_1^2 - \omega_2^2) \bar{z} = \\ = - (\Theta^{*+} i + \Psi^{*+}) e^{-i\Omega t} - 1/2 (d_1 + d_2) (\Theta^* - i\Psi^*) e^{-i\Omega t} - 1/2 (d_1 - d_2) (\Theta^* + i\Psi^*) e^{i\Omega t} \\ \varepsilon_1 = [H + (I_z - I_{z2} - I_y + I_{y2} - I_x + I_{x2}) \Omega] (I_x - I_{x2})^{-1}, \quad \varepsilon_2 = [H + (I_z - I_{z2} - I_y + I_{y2} - I_x + I_{x2}) \Omega] I_y^{-1} \\ \omega_1^2 = [c_x + H \Omega + (I_z - I_{z2} - I_y + I_{y2}) \Omega^2] (I_x - I_{x2})^{-1}, \quad \omega_2^2 = [c_y + H \Omega + (I_z - I_x) \Omega^2] I_y^{-1} \\ d_1 = [H + (I_z - I_{z2} - I_y + I_{y2} + I_x - I_{x2}) \Omega] (I_x - I_{x2})^{-1}, \quad d_2 = [H + (I_z + I_y - I_x) \Omega] I_y^{-1} \end{aligned}$$

Данное уравнение содержит позиционные члены, являющиеся функцией от угловой скорости принудительного вращения карданова подвеса. Частное решение, характеризующее установившееся движение главной оси гироскопа во вращающейся системе координат при постоянных Θ^* и Ψ^* , ищем в виде

$$z_+ = [A + C + i(F + B)] \cos \Omega t + [F - B + i(A - C)] \sin \Omega t$$

где A, B, C, F — коэффициенты, подлежащие определению. Пропедев необходимые математические выкладки, найдем

$$\begin{aligned} z_+ = \frac{d_2 (\omega_1^2 - \Omega^2 - \Omega \varepsilon_1) - d_1 (\omega_2^2 - \Omega^2 - \Omega \varepsilon_2)}{2 [(\omega_1^2 - \Omega^2) (\omega_2^2 - \Omega^2) - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Omega^2]} (\Theta^* + i\Psi^*) e^{i\Omega t} + \\ + \frac{d_2 (\omega_1^2 - \Omega^2 + \Omega \varepsilon_1) + d_1 (\omega_2^2 - \Omega^2 + \Omega \varepsilon_2)}{2 [(\omega_1^2 - \Omega^2) (\omega_2^2 - \Omega^2) - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Omega^2]} (i\Psi^* - \Theta^*) e^{-i\Omega t} \end{aligned}$$

Используя соотношение (2), получим два соответствующих уравнения

$$\begin{aligned} \alpha_+ = \frac{d_1 (\omega_2^2 - \Omega^2) + d_2 \Omega \varepsilon_1}{[(\omega_1^2 - \Omega^2) (\omega_2^2 - \Omega^2) - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Omega^2]} (\Psi^* \sin \Omega t - \Theta^* \cos \Omega t) \\ \beta_+ = \frac{d_2 (\omega_1^2 - \Omega^2) + d_1 \Omega \varepsilon_2}{[(\omega_1^2 - \Omega^2) (\omega_2^2 - \Omega^2) - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Omega^2]} (\Psi^* \cos \Omega t + \Theta^* \sin \Omega t) \end{aligned}$$

В качестве полезного сигнала, несущего информацию о Θ^* и Ψ^* , следует считать амплитуду и фазу отгибающейся угловых колебаний колец гироскопа, происходящих с частотой принудительного вращения вспомогательного кольца. Данные угловые колебания зависят от обеих измеряемых скоростей Θ^* и Ψ^* одновременно. Но углы α и β не характеризуют движение главной оси гироскопа относительно неподвижной системы координат. Необходимо установить, как изменяются углы γ и δ . Для перехода к невращающейся системе координат воспользуемся подстановкой $z_+ = (\gamma_+ + i\delta_+) e^{-i\Omega t}$, где γ_+, δ_+ — установившиеся значения углов отклонения колец гироскопа в невращающейся системе координат. Тогда окончательный закон движения гироскопа для случая съема сигнала в невращающейся системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma_+ = \frac{d_1 (\omega_2^2 - \Omega^2 - \Omega \varepsilon_2) - d_2 (\omega_1^2 - \Omega^2 - \Omega \varepsilon_1)}{2 [(\omega_1^2 - \Omega^2) (\omega_2^2 - \Omega^2) - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Omega^2]} (\Psi^* \sin 2\Omega t - \Theta^* \cos 2\Omega t) - \\ - \frac{d_1 (\omega_2^2 - \Omega^2 + \Omega \varepsilon_2) + d_2 (\omega_1^2 - \Omega^2 + \Omega \varepsilon_1)}{2 [(\omega_1^2 - \Omega^2) (\omega_2^2 - \Omega^2) - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Omega^2]} \Theta^* \quad (3) \\ \delta_+ = \frac{d_2 (\omega_1^2 - \Omega^2 - \Omega \varepsilon_1) - d_1 (\omega_2^2 - \Omega^2 - \Omega \varepsilon_2)}{2 [(\omega_1^2 - \Omega^2) (\omega_2^2 - \Omega^2) - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Omega^2]} (\Psi^* \cos 2\Omega t + \Theta^* \sin 2\Omega t) + \\ + \frac{d_1 (\omega_2^2 - \Omega^2 + \Omega \varepsilon_2) + d_2 (\omega_1^2 - \Omega^2 + \Omega \varepsilon_1)}{2 [(\omega_1^2 - \Omega^2) (\omega_2^2 - \Omega^2) - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Omega^2]} \Psi^* \end{aligned}$$

Из выражений (3) видно, что полезными сигналами являются амплитуда и фаза отгибающейся угловых колебаний, происходящих с двойной частотой принудительного вращения, а также постоянные отклонения главной оси гироскопа. Постоянные отклонения по углу γ зависят от угловой скорости Θ^* , а по углу δ — от угла Ψ^* . Отги-

бающая угловых колебаний, как и для случая съема сигнала во вращающейся системе координат, зависит от обеих измеряемых скоростей Θ^* и Ψ^* одновременно.

Рассмотрим теперь случай, когда конструктивным путем обеспечено бесконечно большое значение коэффициента жесткости c_y , а $H=0$. Поведение такого гироскопа относительно неподвижной системы координат характеризуется следующим комплексным дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(I_{x1}+I_{x3})z^{**} - i\Omega(I_{x1}+I_{x3})z^* + \frac{1}{2}[c_x + H\Omega + (I_{z1}+I_{z3}-I_{y1}-I_{y3}-I_{x1}-I_{x3})\Omega^2]z + \\ & + \frac{1}{2}(I_{x1}+I_{x3})\bar{z}^{**} e^{2i\Omega t} + i\Omega(I_{x1}+I_{x3})\bar{z}^* e^{2i\Omega t} + \frac{1}{2}[c_x + H\Omega + (I_{z1}+I_{z3}-I_{y1}-I_{y3}-I_{x1}- \\ & - I_{x3})\Omega^2]\bar{z} e^{2i\Omega t} = -\frac{1}{2}(I_{x1}+I_{x3})[(\Psi^{**} - i\Theta^{**})e^{2i\Omega t} + \Psi^{**} + i\Theta^{**}] - \frac{1}{2}[H + (I_{z1}+I_{z3}-I_{y1}-I_{y3} + \\ & + I_{x1}+I_{x3})\Omega][(\Theta^* + i\Psi^*)e^{2i\Omega t} + \Theta^* - i\Psi^*] \end{aligned}$$

Полученное дифференциальное уравнение совпадает с уравнениями П. Сейвета [5], если последние привести к комплексной переменной z .

Таким образом гироскоп во вращающемся кардановом подвесе является обобщенной динамической моделью вибрационных датчиков параметров углового движения основания. Данный гироскоп может быть использован для одновременного измерения медленно меняющихся угловых скоростей Θ^* и Ψ^* , причем независимо от того, по углу поворота какой рамки и в какой системе координат производится съем сигнала.

Поступила 30 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутенин Н. В., Луцк Я. Л. О движении свободного гироскопа при равномерном вращении основания. Изв. вузов. Приборостроение, 1963, т. 6, № 5.
2. Ильчанинов В. П. Влияние принудительного вращения карданова подвеса на движение астатического гироскопа. Изв. вузов. Приборостроение, 1970, т. 13, № 12.
3. Луцк Я. Л. Ошибки гироскопических приборов. Л., «Судостроение», 1968.
4. Смолицкий Х. Л. Ошибки гироскопа в кардановом подвесе, находящегося на подвижном основании. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 3.
5. Savet P. H. Dynamics of ideal suspensions applied to rotating bodies in space. J. Spacecraft, 1966, vol. 3, No. 9. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев. М., «Мир», 1967, № 5.)

УДК 534

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩЕНИЯ НЕСБАЛАНСИРОВАННОГО РОТОРА НА ГИБКОМ ВАЛУ

В. А. САМСОНОВ

(Москва)

Известно [1, 2], что исследование движения механической системы с циклическими координатами, находящейся под действием потенциальных сил, может быть сведено к исследованию движения некоторой приведенной системы, находящейся под действием потенциальных сил, производных от измененной силовой функции W , и сил гироскопических, если исходная система была гироскопически связанной. Приведенная система может иметь положение равновесия, отвечающее стационарному движению исходной системы, в котором силовая функция W не имеет максимума, но которое стабилизировано гироскопическими силами. Известно также, что включение в приведенную систему диссипативных сил с полной диссипацией (это эквивалентно введению в исходную сил с частичной диссипацией) разрушает устойчивость указанного равновесия (стационарного движения).

Именно таким образом Н. Г. Четаев показал [3] дестабилизирующее влияние «внутреннего» трения в задаче о стационарном движении ротора, эксцентрисно закрепленного на гибком валу. Повторим вкратце рассуждения Н. Г. Четаева, используя лишь иной набор обобщенных координат, традиционный для теории гибкого вала.

Предположим, что ротор совершает плоскопараллельное движение. В плоскости движения выберем начало подвижной системы координат в точке O пересечения этой плоскости с прямой, соединяющей подшипники вала. Ось x направим параллельно отрезку GP , соединяющему центр тяжести ротора G и точку P его закрепления на валу. Обозначим через x, y координаты точки G , φ — угол между осью x и некоторым неподвижным направлением.

Кинетическая энергия ротора и силовая функция упругого (в линейном приближении) воздействия вала имеют вид

$$\begin{aligned} T &= 0.5m[x'^2 + y'^2 + 2\varphi'(xy' - yx') + \varphi'^2(x^2 + y^2)] + 0.5I\varphi'^2 \\ U &= -0.5c[y^2 + (x+e)^2] \end{aligned}$$