УДК 531.383

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ДВУХРОТОРНЫХ ГИРОКОМПАСОВ НА КАЧАЮЩЕМСЯ ОСНОВАНИИ

А. Э. ПОТЕМКИН

(Одесса)

На основании математической модели, полученной методом идентификации по результатам испытаний двухроторного гирокомпаса на качающейся платформе в детермированном случае, проведено исследование его погрешностей в стохастическом случае. Получены формулы для вычисления интеркардинальных погрешностей гирокомпаса на регулярной и нерегулярной качке и приведены числовые примеры.

1. Погрешности двухроторных гирокомпасов на качке, рассчитанные по прецессионной теории без учета упругой податливости элементов конструкции, их инерции, перетекания жидкостей и возможных люфтов в осях подвеса гироскопов, отличаются от действительных значений погрешностей на два-три порядка. Учет указанных обстоятельств позволяет провести аналитический расчет реальных погрешностей гирокомпасов на качающемся основании [1–4]. Однако на практике ряд конструктивных параметров, необходимых для аналитического расчета погрешностей у конкретных приборов, известен не достаточно точно, что затрудняет возможность прогнозирования погрешностей приборов в условиях их эксплуатации. С другой стороны, имеется возможность построить математическую модель гироскопической системы на основе экспериментальных данных и определить значения ее параметров, с учетом которых расчетные значения погрешностей прибора будут близки к фактически наблюдающимся. При этом математическая модель должна учитывать совместное действие как известных, так и неизвестных факторов, вызывающих погрешность гироскопической системы [5, 6].

Одним из новых методов построения математических моделей систем являются методы идентификации, позволяющие построить математическую модель в условиях функционирования системы по ее входным и выходным переменным [7–9]. Математическая модель должна быть максимально простой, но учитывающей основные особенности системы. Как известно, под математической моделью системы понимают оператор Ω, указывающий совокупность математических действий, осуществление которых позволяет по заданной входной функции x найти выходную y_M; $y_M=\Omega x$.

В общем случае оператор системы может зависеть от времени. Критерием близости выходных переменных гироскопической системы y и ее модели y_M, в зависимости от конкретных условий, могут служить, например, абсолютная разность y и y_M и средняя абсолютная разность этих функций, среднеквадратическое отклонение y_M от y и др. Критерий минимума среднеквадратической ошибки является одним из часто используемых критериев для оценки оператора системы $M[(y-y_M)^2]=\min$.

Следует отметить, что определение структуры модели облегчается, если известны априорные сведения о динамике работы исследуемой системы. Допустим, известно, что между входом и выходом системы существует детерминированная связь и выходные сигналы являются результатом пропускания входного сигнала через инерционное звено с постоянной времени T. Если учесть эти сведения, то можно отказаться от предположения, что исследуемая гироскопическая система полностью неизвестна. В этом случае можно считать, что математические выражения (дифференциальные уравнения, передаточные функции и др.), описывающие процессы взаимодействия элементов в гироскопической системе, известны с точностью до некоторой группы параметров.

Все экспериментальные методы построения моделей базируются на предположении о сосредоточенности параметров объекта, стационарности во времени динамических свойств и линейности их при малых изменениях входных координат.

Построение модели сводится к следующим этапам: выбирают структуру модели из физических соображений; определяют критерии сравнения (оценивания) моделируемых и экспериментальных характеристик, которые будут зависеть от требований точности моделирования, объема и полноты экспериментальных данных; подгоняют параметры модели к имеющимся экспериментальным данным (оценивание); проверяют и подтверждают адекватность модели системы во всех диапазонах возможных внешних возмущений; используют модель по ее назначению.

2. Покажем применение методов идентификации к гироскопическим системам на следующем примере. Сохраняя условные обозначения работ [10, 11], движение гиросферы двухроторного компаса на бортовой качке в рамках прецессионной теории описывается системой уравнений

$$\beta^{\bullet}+U\alpha\cos\varphi=v_N/R+M_y/H$$

$$\alpha^{\cdot}+U\sin\varphi-lP\beta/H-C\lambda/H=lPW_2/Hg \qquad (2.1)$$

$$\lambda^{\cdot}+F\beta+F\lambda=-FW_2/g$$

$$W_1=\theta_0hp^2\sin pt\cos K,\qquad W_2=-\theta_0hp^2\sin pt\sin K,\qquad M_y=PW_2x/g$$

Здесь W_1 и W_2 горизонтальные составляющие ускорения точки опоры гирокомпаса на объекте вдоль параллели и меридиана соответственно; M_y – вертикальный момент инерционных сил, действующих на плече x; P – вес гиросферы с внутренними устройствами; x – отклонение центра масс гиросферы вдоль параллели (положительное к западу) при действии сил инерции. В системе уравнений (2.1) принято, что на качающемся основании за счет гироскопической стабилизации гиросферы все ее конструктивные элементы могут смещаться только за счет упругой податливости, люфтов или за счет перетекания жидкости. Это смещение элементов гиросферы вызывает отклонение ее центра масс на величину x.

Математическую модель отклонения центра масс гиросферы представим в виде

$$mx^{\cdot\cdot}+rx^{\cdot}+C_0x=mW_1 \qquad (2.2)$$

Здесь $m=P/g$ – масса гиросферы с внутренними устройствами; r – приведенный (эквивалентный) коэффициент вязкого сопротивления; C_0 – приведенный коэффициент упругой податливости элементов гиросферы.

Частота собственных (упругих) колебаний элементов гиросферы обычно во много раз больше частоты качки, поэтому инерционным моментом в уравнении (2.2) пренебрегаем. Пусть $T=r/C_0$ – постоянная времени смещения центра масс гиросферы. Тогда

$$Tx^{\cdot}+x=PW_1/gC_0 \qquad (2.3)$$

Структура и значения параметров T и C_0 выражения (2.3) получены путем минимизации невязок между рассчитанными на аналоговой вычислительной машине интеркардинальными погрешностями (ошибками) от качки α_- и экспериментальными (действительными) значениями интеркардинальных погрешностей α_+ гирокомпаса (более 6000) методом наименьших квадратов для одних и тех же данных качки

$$M[(\alpha_+-\alpha_-)^2]=\min,\qquad \alpha_-=-\frac{1}{C_0(1+p^2T^2)}\frac{P^2}{4H_1U\cos\varphi}\frac{\theta_0^2h^2p^4}{g^2}\sin 2K \qquad (2.4)$$

Выражение для определения α_- (постоянной погрешности гирокомпаса после погашения затухающих колебаний гиросферы) получено путем подстановки решения уравнения (2.3) в первое уравнение системы (2.1).

После выполнения условия (2.4) расчетные значения погрешности гирокомпаса α_- отличались от действительных значений α_+ не более чем на 0°,03, т. е. были соизмеримы с погрешностью эксперимента.

Пример 2.1. Вычислить погрешность α_-, если курс корабля (платформы) $K=200°$; амплитуда качки $A=\theta_0h=23.5$ см; период качки $\tau_k=6.4$ с; угловая частота качки $p=0{,}98$ c^{-1}; вес гиросферы $P=8.5\cdot10^6$ Г см с$^{-2}$; широта места $\varphi=46°30'$ (Одесса); $H=1.55\cdot10^8$ Г см с$^{-1}$; $C_0=13.5\cdot10^7$ Г с$^{-2}$; $T=0.44$ *с*. Решение

$$\alpha_-=-\frac{1}{13.5\cdot10^7(1+0.98^2\cdot0.44^2)}\frac{(8.5\cdot10^6)^2}{4\cdot1.55\cdot10^8\cdot7.3\cdot10^{-5}\cdot0.688}\frac{23.5^2\cdot0.98^4}{981^2}\sin 400°=$$

$$=-0.0049=-0°.28$$

Экспериментальное значение (среднее по модулю) интеркардинальной погрешности для этих параметров качки $\alpha_+=-0°{,}3$, т. е. расчетное значение хорошо согласуется с экспериментальным.

Система уравнений (2.1) выведена на основе законов механики, а система (2.3) – на основе методов идентификации с использованием экспериментальных данных погрешностей гирокомпаса. Полученная математическая модель гирокомпаса может быть применена для исследования влияния качки и маневрирования объекта для целого ряда приборов, имеющих аналогичное устройство.

3. Рассмотрим интеркардинальную погрешность гирокомпаса на нерегулярной качке.

Введем новые неизвестные: $x_1=\alpha-\alpha_*$, $x_2=\beta-\beta_*$; $x_3=\lambda-\lambda_*$, $x_4=x-x_*$, в которых положения динамического равновесия координат гирокомпаса и центра масс соответственно равны

$$\alpha_*=v_N/RU\cos\varphi,\quad \beta_*=-\lambda_*=HU\sin\varphi/(lP-C),\quad x_*=0$$

Тогда системы (2.1) и (2.3) можно переписать так:

$$x_2^{\bullet} + Ux_1 \cos\varphi = \frac{Ph \sin K}{Hg}\theta^{\bullet\bullet} x_4 \tag{3.1}$$

$$x_1^{\bullet} - \frac{lP}{H}x_2 - \frac{lP(1-\rho)}{H}x_3 = \frac{lPh\sin K}{Hg}\theta^{\bullet\bullet}$$

$$x_3^{\bullet} + Fx_2 + Fx_3 = -\frac{Fh\sin K}{g}\theta^{\bullet\bullet}$$

$$Tx_4^{\bullet} + x_4 = -\frac{Ph\cos K}{gC_0}\theta^{\bullet\bullet}, \qquad \rho = 1 - \frac{C}{lP}$$

Применим операцию математического ожидания к системе уравнений (3.1). Математические ожидания переменных обозначим так: $\langle x_i\rangle = M[x_i]$ $(i=1, \ldots, 4)$. Тогда

$$\langle x_2^{\bullet}\rangle + U\langle x_1\rangle \cos\varphi = \frac{Ph\sin K}{Hg}\langle\theta^{\bullet\bullet}x_4\rangle$$

$$\langle x_1^{\bullet}\rangle - \frac{lP}{H}\langle x_2\rangle - \frac{lP(1-\rho)}{H}\langle x_3\rangle = 0 \tag{3.2}$$

$$\langle x_3^{\bullet}\rangle + F\langle x_2\rangle + F\langle x_3\rangle = 0, \quad T\langle x_4^{\bullet}\rangle + \langle x_4\rangle = 0$$

В силу стационарности случайного процесса качки математические ожидания ускорений на качке равны нулю.

Для определения из первого уравнения азимутального ухода гирокомпаса на качке (погрешности) $\langle x_1\rangle$ необходимо вначале найти $\langle\theta^{\bullet\bullet}x_4\rangle = R_c(0)$, где $R_c(\tau)$ — взаимная корреляционная функция случайных процессов $\theta^{\bullet\bullet}$ и x_4.

Корреляционная функция углов качки судна θ будем считать имеет вид

$$K_\theta(\tau) = Ae^{-\mu|\tau|}\left(\cos\varepsilon\tau + \frac{\mu}{\varepsilon}\sin\varepsilon|\tau|\right) \tag{3.3}$$

Здесь A — дисперсия угла крена θ, μ — коэффициент затухания корреляционной функции, характеризующий степень нерегулярности качки; ε — преобладающая частота качки на нерегулярном волнении.

Тогда для спектральной плотности случайного процесса $\theta^{\bullet\bullet}$ — ускорения бортовой качки судна в соответствии с (3.3) имеем [10]

$$S(\omega) \approx \frac{2A\mu}{\pi}\frac{b^2\omega^4}{\omega^4 + 2a\omega^2 + b^4}, \qquad a = \mu^2 - \varepsilon^2, \qquad b^2 = \mu^2 + \varepsilon^2 \tag{3.4}$$

На основе четвертого уравнения системы (3.1)

$$x_4 = -\frac{Ph\cos K}{gC_0}\frac{1}{TD+1}, \qquad D = \frac{d}{dt} \tag{3.5}$$

Тогда взаимная спектральная плотность $S_c(\omega)$ случайных процессов $\theta^{\bullet\bullet}$ и x_4 может быть представлена в виде

$$S_c(\omega) = -\frac{Ph\cos K}{C_0 g\pi}\frac{2A\mu b^2\omega^4}{(1+j\omega T)(\omega^4 + 2a\omega^2 + b^4)} \tag{3.6}$$

Взаимная корреляционная функция, как известно, определяется по формуле

$$R_c(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_c(\omega)e^{j\omega\tau}\,d\omega$$

откуда

$$R_c(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_c(\omega)\,d\omega \tag{3.7}$$

Выражение для взаимной спектральной плотности можно переписать в виде

$$S_c(\omega)=-\frac{Ph\cos K}{C_0 g\pi}\frac{2A\mu b^2\omega^4(1-j\omega T)}{(1+\omega^2T^2)(\omega^4+2a\omega^2+b^4)} \tag{3.8}$$

Выражение (3.7) с учетом (3.8) в силу нечетности подынтегральной функции, содержащей ω^5, интеграл от которой будет равен нулю, принимает вид

$$R_c(0)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B\omega^4\,d\omega}{(1+\omega^2T^2)(\omega^4+2a\omega^2+b^4)},\quad B=\frac{2PhA\mu b^2\cos K}{C_0 g\pi} \tag{3.9}$$

Вычисление взаимной корреляционной функции (3.9) можно свести к нахождению интеграла [11]:

$$I_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G_n(j\omega)\,d\omega}{H_n(j\omega)H_n(-j\omega)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G_n(j\omega)\,d\omega}{|H_n(j\omega)|^2} \tag{3.10}$$

подынтегральное выражение которого представляет собой некоторые полиномы $H_n(j\omega)$ и $G_n(j\omega)$ комплексной переменной $j\omega$:

$$\begin{gathered} H_n(j\omega)=a_0(j\omega)^n+a_1(j\omega)^{n-1}+\ldots+a_n \\ G_n(j\omega)=b_0(j\omega)^{2n-2}+b_1(j\omega)^{2n-4}+\ldots+b_{n-1} \end{gathered} \tag{3.11}$$

Все корни ω_k полинома $H_n(j\omega)$ расположены в верхней полуплоскости. Полином $G_n(j\omega)$ содержит только четные степени. Наивысшую степень знаменателя обозначим $2n$. Наивысшая степень числителя в реальной системе может быть не выше $2n-2$.

В работе [12] даны таблицы значений интегралов I_n через коэффициенты a_0, a_1, ..., b_0, b_1, ... Чтобы воспользоваться этими таблицами, представим (3.9), следуя [10], в следующем виде:

$$R_c(0)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B\omega^4\,d\omega}{|(Tj\omega+1)(\omega^2-2\mu j\omega-b^2)|^2}. \tag{3.12}$$

Интеграл (3.12) можно свести к виду (3.10), полагая в (3.12) числитель равным $G_n(j\omega)$, а член, находящийся в знаменателе под знаком модуля,— равным $H_n(j\omega)$.

В установившемся режиме, когда $t\to\infty$, получим на основании системы (3.2)

$$\langle x_1\rangle=\frac{P}{HU\cos\varphi}\frac{h\sin K}{g}R_c(0),\quad \langle x_2\rangle=0,\quad \langle x_3\rangle=0,\quad \langle x_4\rangle=0 \tag{3.13}$$

Подставляя в выражение для $\langle x_1\rangle$ из (3.13) значение $R_c(0)=-I_n$ из (3.12), полученное на основе таблиц из работы [12], найдем после преобразований значение интеркардинальной погрешности $\alpha_\sim$ гирокомпаса при действии нерегулярной качки судна

$$\alpha_\sim=\langle x_1\rangle=-\frac{P^2}{4\pi HUC_0g^2}\frac{h^2Ab^2(2\mu+b^2T)}{T[T^2\varepsilon^2+(1+\mu T)^2]}\frac{\sin 2K}{\cos\varphi}$$

Пример 3.1. Вычислить погрешность $\alpha_\sim$ для параметров качки из [11], если $K=45°$, $h=3$ *м*, $A=3.0\cdot10^{-2}$, $\varepsilon=0.8$ c^{-1}; $\mu=0.1$ c^{-1}, $H=1.55\cdot10^8$ *Г см² с⁻¹*, $P=8.5\cdot10^6$ *Г см с⁻²*, $\varphi=60°$, $C_0=13.5\cdot10^7$ *Г с⁻²*, $T=0.44$ *с*, $b^2=\mu^2+\varepsilon^2=0.01+0.64=0.65$.

Решение

$$\alpha_\sim=-\frac{(8.5\cdot10^6)^2}{4\cdot3.14\cdot1.55\cdot10^8\cdot7.3\cdot10^{-5}\cdot13.5\cdot10^7\cdot981^2}\times$$

$$\times\frac{300^2\cdot3.0\cdot10^{-2}\cdot0.65(2\cdot0.1+0.65\cdot0.44)}{0.44[0.44^2\cdot0.8^2+(1+0.1\cdot0.44)^2]}\frac{1}{0.5}=-0.0131=-0°.75$$

Это значение интеркардинальной погрешности соответствует действительным величинам погрешностей для заданных параметров качки. Для одной из модификаций двухроторных гирокомпасов аналогичный результат расчета получен в работе [1].

Таким образом применение методов идентификации при математическом моделировании гироскопической системы позволяет получить более адекватную модель этой системы, учитывающую, кроме теоретических, некоторые конструктивные особенности исследуемой гироскопической системы, и прогнозировать более точно выходную ее координату при действии возмущений, например с помощью ЦВМ, установленной на объекте.

Поступила 10 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жбанов Ю. К.* Гирокомпас на качке. Инж. ж. МТТ, 1966, № 3.
2. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М., «Наука», 1976.
3. *Магнус К.* Гироскоп, теория и применение. М., «Мир», 1974.
4. *Никитин Е. А., Шестов С. А., Матвеев В. А.* Гироскопические системы, ч. 3. Элементы гироскопических приборов. М., «Высшая школа», 1972.
5. *Потемкин А. Э.* Исследование влияния вибраций на показания гирокомпаса. Тр. ЦНИИ. Мор. флота «Судовождение и связь», вып. 30. Л., «Морской транспорт», 1960.
6. *Ригли У., Холлистер У., Денхард У.* Теория, проектирование и испытания гироскопов. М., «Мир», 1972.
7. Идентификация динамических систем. Вильнюс, «Минтис», 1974.
8. *Эйкхофф Н.* Основы идентификации систем управления. М., «Мир», 1975.
9. *Сольнцев Р. И.* Вычислительные машины в судовой гироскопии. Л., «Судостроение», 1977.
10. *Ривкин С. С.* Теория гироскопических устройств, ч. 1–2. Л., «Судостроение», 1962–1964.
11. *Ройтенберг Я. Н.* Гироскопы. М., «Наука», 1966.
12. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического регулирования. М., «Наука», 1972.

УДК 531.383

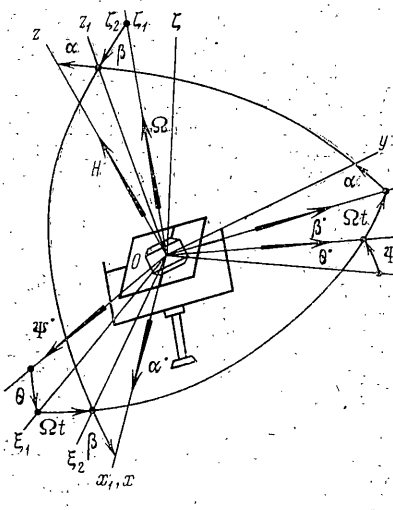
К ТЕОРИИ ГИРОСКОПА ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

В. Г. ТЕРЕШИН

(Уфа)

В работах [1–4] рассматривается поведение классического гироскопа во вращающемся кардановом подвесе. Основная цель данной работы – анализ возможностей гироскопа во вращающемся кардановом подвесе для определения параметров углового движения основания. Показано, что такой гироскоп может быть использован как вибрационный измеритель медленно меняющихся угловых скоростей.

Рассмотрим динамику гироскопа при принудительном равномерном вращении карданова подвеса (фигура). Будем считать, что конструкция подвеса реализована на упругих элементах, которые имеют бесконечно большую жесткость на изгиб и конечную жесткость на кручение. Свяжем с основанием систему осей $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, положение которой относительно инерциальной системы координат $O\xi\eta\zeta$ определяется углами Θ и Ψ. Положение главной оси гироскопа Oz определяется малыми углами α и β, отсчитываемыми от осей $O\xi_2\eta_2\zeta_2$, связанных с вспомогательным кольцом. Данное кольцо вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси $O\zeta_1$.



Заметим, что углы отклонения основания Θ и Ψ являются малыми, а угловая скорость вращения кольца Ω на порядок выше скоростей $\Theta^{\bullet}$ и $\Psi^{\bullet}$. Линеаризованные дифференциальные уравнения, описывающие движение гироскопа во вращающемся кардановом подвесе на подвижном основании, записываются следующим образом:

$$
\begin{gathered}
(I_x-I_{x2})\alpha^{\bullet\bullet}+[c_x+H\Omega+(I_z-I_y-I_{z2}+I_{y2})\Omega^2]\alpha+[H+(I_z-I_y-I_x-I_{z2}+I_{y2}+I_{x2})\Omega]\beta^{\bullet}= \\
=(I_{x2}-I_x)(\Theta^{\bullet\bullet}\sin\Omega t+\Psi^{\bullet\bullet}\cos\Omega t)-[H+(I_z-I_y+I_x-I_{z2}+I_{y2}-I_{x2})\Omega](\Theta^{\bullet}\cos\Omega t- \\
-\Psi^{\bullet}\sin\Omega t) \\
I_y\beta^{\bullet\bullet}+[c_y+H\Omega+(I_z-I_x)\Omega^2]\beta-[H+(I_z-I_y-I_x-I_{z2}+I_{y2}+I_{x2})\Omega]\alpha^{\bullet}= \\
=-I_y(\Theta^{\bullet\bullet}\cos\Omega t-\Psi^{\bullet\bullet}\sin\Omega t)+[H+(I_z+I_y-I_x)\Omega](\Theta^{\bullet}\sin\Omega t+\Psi^{\bullet}\cos\Omega t)
\end{gathered}
\tag{1}
$$

$$I_x=I_{x1}+I_{x2}+I_{x3},\quad I_y=I_{y1}+I_{y2}+I_{y3},\quad I_z=I_{z1}+I_{z2}+I_{z3}.$$