

ОБ ОДНОЙ БИФУРКАЦИИ В РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЕ

С. Д. КИНЯШИН

(Горький)

Рассмотрена новая бифуркация в релейной системе третьего порядка при изменении устойчивости состояния равновесия на пластинке скользящих движений с бесконечным числом не обычно расположенных предельных циклов.

1. Будем рассматривать релейную систему третьего порядка

$$x''' + (2a+1)x'' + (2a+b)x' + bx = Af(x + \alpha x' + \beta x'') \quad (1.1)$$

которая может быть записана в виде следующей системы трех уравнений первого порядка [1]:

$$\begin{aligned} x' &= 1/2(1+\rho)x + Af(z) \\ y' &= 1/2(1-\rho)y + Af(z) \\ z' &= gx - hy - az + Af(z) \end{aligned} \quad (1.2)$$

в которой $f(u)$ — простейшая релейная функция, $A < 0$
 $g = [1/2(1+\rho)(1+\gamma) + \sigma^{-1}/4b]\rho^{-1}$; $h = [1/2(1-\rho)(1+\gamma) + \sigma^{-1}/4b]\rho^{-1}$

$$\gamma = \alpha/\beta, \quad \sigma = \beta^{-1}, \quad \rho = \sqrt{1-b}$$

В этой системе возникает бифуркация, когда $a > 0$, $\sigma > 0$, $b < -4a(a+1)$, в окрестности частного значения обобщенного параметра Δ :

$$\Delta = \frac{g(2a+1-\rho)}{h(2a+1+\rho)}, \quad \Delta = \Delta^* - \varepsilon N$$

$$\Delta^* = \frac{(2a+1-\rho)[4\sigma + (1+\rho)^2]}{(2a+1+\rho)[4\sigma + (1-\rho)^2]}, \quad N = \frac{(2a+1-\rho)(4\sigma-b)}{(2a+1+\rho)[4\sigma + (1-\rho)^2]}$$

при котором изменяется устойчивость состояния равновесия, расположенного на пластинке скользящих движений. Именно при изменении устойчивости состояния равновесия $M(0, 0)$ ($\varepsilon=0$), расположенного на пластинке скользящих движений, в системе из сложного образования возникает и существует конечное число неустойчивых предельных циклов, области существования которых разделены областями, в которых рассматриваемое точечное преобразование не существует. Периоды соответствующих автоколебаний при этом равны приблизительно $\tau_n = n\tau_0 + \tau_1$, где $n=1, 2, 3, \dots$

Нетрудно показать [1], что исследование симметричных относительно начала координат систем (1.1) или (1.2) сводится к исследованию следующего точечного преобразования T части плоскости переключений в себя:

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_0 \exp\left(\frac{1+\rho}{2}\tau\right) - \frac{2A}{1+\rho} \left[\exp\left(\frac{1+\rho}{2}\tau\right) - 1 \right] \\ y_1 &= -y_0 \exp\left(\frac{1-\rho}{2}\tau\right) - \frac{2A}{1-\rho} \left[\exp\left(\frac{1-\rho}{2}\tau\right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (1.3)$$

где τ находится как первый положительный корень уравнения

$$\begin{aligned} & \left(x_0 + \frac{2A}{1+\rho}\right) \left[\exp\left(\frac{1+\rho}{2}\tau\right) - \exp(-a\tau) \right] - \\ & - \left(y_0 + \frac{2A}{1-\rho}\right) \left[\exp\left(\frac{1-\rho}{2}\tau\right) - \exp(-a\tau) \right] + d[1 - \exp(-a\tau)] = 0 \\ & d = \frac{A\sigma\Lambda}{ab(\sigma^{-1/4}b)}, \quad \Lambda = (1+\rho)(2a+1-\rho) - \Delta(1-\rho)(2a+1+\rho) \end{aligned} \quad (1.4)$$

или к исследованию точечного преобразования, записанного в параметрическом виде¹ через время переключения τ :

$$y_0 = \Delta x_0 \Phi_0 + \frac{2A}{1+\rho} \Delta \Phi_0 - \frac{2A}{1-\rho} + df_0 \quad (1.5)$$

$$y_1 = \Delta x_1 \Phi_1 - \frac{2A}{1+\rho} \Delta \Phi_1 + \frac{2A}{1-\rho} - df_1 \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_0 \exp(-\rho\tau), \quad f_1 = f_0 \exp^{1/2}(1-\rho)\tau \\ \Phi_0 &= \frac{\exp[1/2(2a+1+\rho)\tau] - 1}{\exp[1/2(2a+1-\rho)\tau] - 1}, \quad f_0 = \frac{\exp(a\tau) - 1}{\exp[1/2(2a+1-\rho)\tau] - 1} \end{aligned}$$

Движение изображающей точки на пластинке скользящих движений определяется следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(\frac{1+\rho}{2} - G\right)x + Hy \\ \dot{y} &= -Gx + \left(\frac{1-\rho}{2} + H\right)y \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$G = 2\Lambda^{-1}\Delta(\sigma^{-1/4}b)(2a+1+\rho), \quad H = 2\Lambda^{-1}(\sigma^{-1/4}b)(2a+1-\rho)$$

Из формул (1.5) и (1.6) видно, что при фиксированном параметре τ точки $M_0(x_0, y_0)$, лежащие на прямой (1.5), переходят в точки $M_1(x_1, y_1)$, лежащие на прямой (1.6). При всевозможных изменениях параметра τ прямые омегают соответственно области:

1) область, которая подлелжит преобразованию (V_0) , и область, в которую она переходит (V_1) . На фиг. 1 показана картина преобразования этих областей и поведение фазовых траекторий на пластинке скользящих движений в случае $\varepsilon=0$. Прямая $\Gamma(\Gamma')$ на фиг. 1:

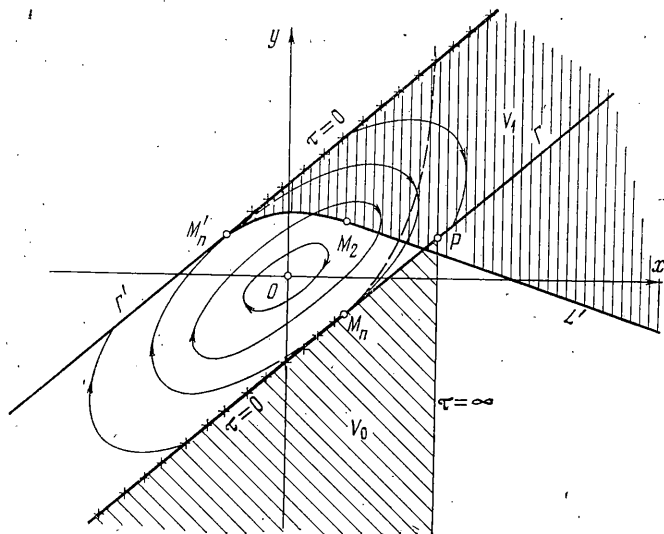
$$y = \frac{(2a+1+\rho)\Delta}{2a+1-\rho} x \pm \frac{A\Lambda}{2(\sigma^{-1/4}b)(2a+1-\rho)} \quad (1.8)$$

¹ Точечное преобразование системы (1.1) или (1.2) в силу симметрии допускает упрощения, поскольку $T^+T^- = T^2$, что дает возможность рассматривать только T (точечное преобразование (1.3) или (1.5)), которое получается из формул точечного преобразования $T^+(f(u) = +1)$, $x_1 = f(x_0, y_0)$, $y_1 = g(x_0, y_0)$ с дальнейшим отождествлением $x_1 \rightarrow -x_1$, $y_1 \rightarrow -y_1$.

является одной из границ пластинки скользящих движений, прямая $L(L')$

$$y = \Delta x \pm \frac{A[a(1+\rho) + 2\sigma - \Delta(a(1-\rho) + 2\sigma)]}{2a(\sigma^{-1/4}b)} \quad (1.9)$$

— пересечение инвариантной плоскости седло-узла (соответствующая плоскости S_{λ_1} [1]) с плоскостью переключений $z=0$ для полупространства, где $f(u) = \pm 1$ (-1). Ометание областей происходит следующим образом. Полупрямая Γ ($\tau=0$) ниже и левее точки M_n , отмеченная крестиками, переходит в полупрямую Γ' ($\tau=0$) выше и правее точки M_n' (тоже помеченная крестиками). При увеличении τ прямые (1.5), немного поворачи-



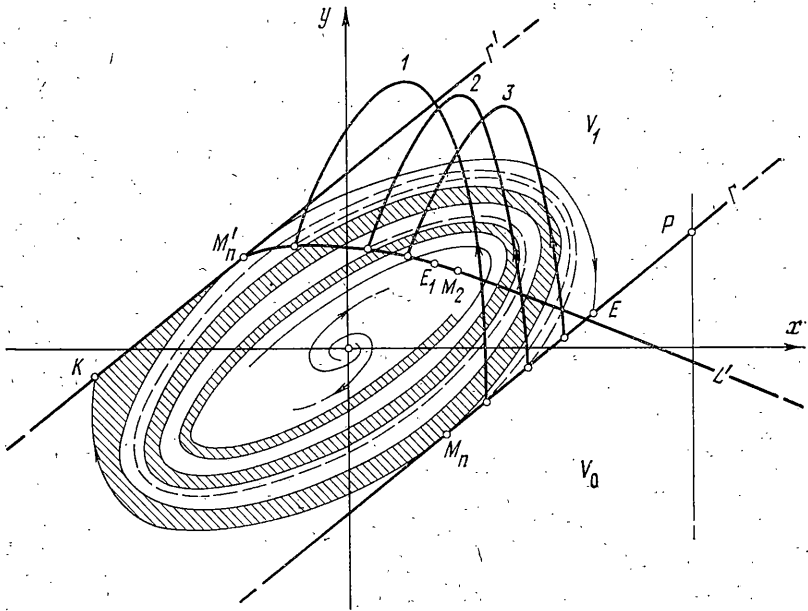
Фиг. 1

чиваясь против часовой стрелки от прямой, помеченной крестиками, и одновременно перемещаясь слева направо, ометают последовательно всю бесконечную треугольную область V_0 , ограниченную полупрямой Γ , помеченной крестиками, отрезком $M_n P \in \Gamma$ и полупрямой $x = -2A/(1+\rho)$ при $y \leq -2A(1-\rho)^{-1}$ ($\tau = \infty$). При $\tau \neq 0$ ($0 \leq \tau \leq +\infty$) прямые (1.5) переходят соответственно в прямые (1.6), которые от полупрямой Γ' , помеченной крестиками, поворачиваясь по часовой стрелке и немного смещаясь слева направо по огибающей семейства прямых (1.6) $M_n' M_2$, ометают область V_1 , ограниченную отмеченной полупрямой Γ' ($\tau=0$), огибающей $M_n' M_2$ и полупрямой L' , расположенной правее точки $M_2(2A(1+\rho)^{-1} + d\Delta^{-1}, 2A(1-\rho)^{-1})$ ($\tau = \infty$). При $\varepsilon = 0$ на пластинке скользящих движений состояние равновесия $M(0, 0)$ типа центра. Найдя уравнения фазовых траекторий системы (1.7) в этом случае, нетрудно убедиться, что точка M_2 расположена либо внутри области, состоящей из замкнутых траекторий, когда $\sigma < \sigma^*$, либо вне этой области, когда $\sigma > \sigma^*$.

Рассмотрим более подробно случай $\sigma < \sigma^*$.

Пусть малый параметр ε проходит через нуль и становится положительным, тогда состояние равновесия $M(0, 0)$ на пластинке скользящих движений становится неустойчивым фокусом (см. фиг. 2). При этом фазовая траектория, проходящая через M_n' , уже не придет в точку M_n как раньше, а придет в некоторую точку E , расположенную правее точки M_n на отрезке $M_n P$.

Весь отрезок $M_n P$ по точечному преобразованию (1.5), (1.6) переходит в огибающую семейства прямых (1.6), т. е. в кривую $M_n' M_2$, точки которой в свою очередь по траекториям скользящих движений либо приходят на отрезок $M_n P$, если они лежат на не заштрихованных на фиг. 2 участках раскручивающейся спирали, либо приходят на участок $K M_n'$, если они лежат на заштрихованных участках раскручивающейся спирали. Согласно точечному преобразованию (1.5), (1.6); все точки, приходящие на отрезок $K M_n'$, затем уходят в фазовое пространство, лежащее ниже пло-



Фиг. 2

скости переключения $z=0$, т. е. уходят из области определения рассматриваемого точечного преобразования. Таким образом, благодаря тому факту, что «внутренность» спирали разделена самой системой на две разные области с разным поведением траекторий, точечное преобразование точек отрезка $M_n P$ в себя суть произведение двух точечных преобразований $W=T_1 T_2$, где T_1 — непрерывное преобразование точек отрезка $M_n P$ в точки кривой $M_n' M_2$, осуществляемое точечным преобразованием (1.5), (1.6) (траекториями, идущими в трехмерном пространстве), и T_2 — разрывное преобразование точек кривой $M_n' M_2$ в точки отрезка $M_n P$, совершаемое по траекториям скользящих движений (1.7) (см. фиг. 2.).

Нетрудно видеть, что точки, примыкающие к точке M_n справа, и точки, примыкающие к точке P слева по точечному преобразованию W , преобразуются внутрь отрезка $M_n P$. Следовательно, если бы W не было разрывно, то на отрезке $M_n P$ был бы элемент притяжения (устойчивый предельный цикл, что и имеет место в случае $\sigma > \sigma^*$). Очевидно, что характер бифуркации зависит, с одной стороны, от того, как близко один к другому при данном ε находятся соседние витки раскручивающейся спирали, а, с другой стороны, как и куда преобразуется точка E по точечному преобразованию (1.5), (1.6) (или (1.3)).

2. Для выяснения близости соседних витков спирали при данном ε перепишем уравнения (1.7), которые в рассматриваемом случае с точ-

ностью до членов третьего порядка малости по ε записываются в виде

$$\begin{aligned}x^{\cdot} &= a_{11}x + a_{12}y = P(x, y) \\y^{\cdot} &= -a_{21}x + a_{22}y = Q(x, y) \\a_{11} &= -\left(l + \frac{1-\rho}{2}\right) + \frac{\varepsilon(1+\rho)}{2\rho}l - \frac{\varepsilon^2 b}{4\rho^2}l + \dots \\a_{12} &= l - \frac{\varepsilon(1-\rho)}{2\rho}l + \frac{\varepsilon^2(1-\rho)^2}{4\rho^2}l + \dots \\a_{21} &= l + 1 - \frac{\varepsilon(1+\rho)}{2\rho}l + \frac{\varepsilon^2 b}{4\rho^2}l + \dots \\a_{22} &= l + \frac{1-\rho}{2} - \frac{\varepsilon(1-\rho)}{2\rho}l + \frac{\varepsilon^2(1-\rho)^2}{4\rho^2}l + \dots \\l &= [4\sigma + (1-\rho)^2]/4\rho\end{aligned}\quad (2.1)$$

или в полярных координатах r и φ ($x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ — положительное направление угла φ — против часовой стрелки) в виде

$$\begin{aligned}r^{\cdot} &= \frac{Px + Qy}{r} = -\frac{r}{2}[A' - \varepsilon l(1-C)] \\ \varphi^{\cdot} &= \frac{Qx - Py}{r^2} = -\frac{1}{2}[B - \varepsilon lD]\end{aligned}\quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}A' &= (2l+1-\rho)\cos 2\varphi + \sin 2\varphi \\ B &= 2l+1+\cos 2\varphi - (2l+1-\rho)\sin 2\varphi \\ C &= \rho^{-1}\cos 2\varphi + \sin 2\varphi, \quad D = \rho^{-1} + \cos 2\varphi - \rho^{-1}\sin 2\varphi\end{aligned}$$

Легко показать, что $\varphi^{\cdot}|_{\varepsilon=0} < 0$ и, следовательно, и для $\varepsilon \neq 0$ изменение угла φ соответствует вращению по часовой стрелке. Деля первое уравнение (2.2) на второе, имеем

$$\frac{dr}{d\varphi} = r \frac{A' - \varepsilon lC - \varepsilon l + \dots}{B - \varepsilon lD + \dots}\quad (2.3)$$

Интегрируя уравнение (2.3), получим (c_0 — константа интегрирования)

$$\begin{aligned}r^2 &= \frac{c_0}{B} \left\{ 1 - \varepsilon l \left[\frac{D}{B} - \Phi(\varphi) \right] + \dots \right\} \\ \Phi(\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \operatorname{arctg} \frac{l \operatorname{tg} \varphi - (4\sigma - b)(4\rho)^{-1}}{\sqrt{\sigma}}\end{aligned}\quad (2.4)$$

Подчеркнем, что все функции A' , B , C , D и $\Phi(\varphi)$, входящие в решение (2.4), — периодические функции φ .

3. Общее решение системы (2.1) после нахождения корней

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\sigma} + \frac{1}{2}l\varepsilon - \varepsilon^2 \left[\frac{l(1-\rho)}{4\rho} \pm i \frac{l^2}{8\sqrt{\sigma}} \right] + \dots\quad (3.1)$$

характеристического уравнения системы

$$\lambda^2 - \frac{[4\sigma + (1-\rho)^2]\varepsilon}{4\rho + 2\varepsilon(1-\rho)}\lambda + \sigma = 0\quad (3.2)$$

получается обычным способом:

$$\begin{aligned} x &= \exp(\alpha t) (x_0 \cos \omega t + c_1 \sin \omega t) \\ y &= \exp(\alpha t) (y_0 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$c_1 = \frac{x_0(a_{11}-\alpha) + a_{12}y_0}{\omega}, \quad c_2 = \frac{-a_{21}x_0 + (a_{22}-\alpha)y_0}{\omega}$$

$$\alpha = \frac{l\varepsilon}{2} \left[1 - \varepsilon \frac{1-\rho}{2\rho} + \dots \right], \quad \omega = \sqrt{\sigma - \varepsilon^2} \frac{l^2}{8\sqrt{\sigma}} + \dots$$

В том случае, когда траектория на пластинке скользящих движений проходит через точку M_n^1 , переменные x_0 , y_0 , c_1 и c_2 определяются выражениями

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{2A}{\rho m} \left\{ \rho(1+\rho) - \frac{2\sigma n}{m} \varepsilon - \frac{2\sigma(4\sigma-b)n}{m^2} \varepsilon^2 + \dots \right\} \\ y_0 &= \frac{2A}{\rho n} \{ \rho(1-\rho) - 2\sigma\varepsilon \} \\ c_1 &= \frac{2A}{m\rho\sqrt{\sigma}} \left\{ -2\sigma\rho - \frac{n(1+\rho)[12\sigma+(1+\rho)^2]}{8m} \varepsilon + \dots \right\} \\ c_2 &= \frac{2A}{n\rho\sqrt{\sigma}} \left\{ -2\sigma\rho - \frac{(1-\rho)[12\sigma+(1-\rho)^2]}{8} \varepsilon + \dots \right\} \\ m &= 4\sigma + (1+\rho)^2, \quad n = 4\sigma + (1-\rho)^2 \end{aligned}$$

Найдем координаты точки E , т. е. координаты точки пересечения найденной траектории с прямой Γ , уравнение которой записывается в виде

$$y = \frac{m - \varepsilon(4\sigma - b)}{n} x + \frac{2A[2\rho + \varepsilon(1-\rho)]}{n} \quad (3.4)$$

Подставляя в уравнение (3.4) вместо x и y выражения (3.3), получим

$$\begin{aligned} & \left(y_0 - \frac{m - \varepsilon(4\sigma - b)}{n} x_0 \right) \cos \omega t + \\ & + \left(c_2 - \frac{m - \varepsilon(4\sigma - b)}{n} c_1 \right) \sin \omega t = \frac{2A}{n} [2\rho + \varepsilon(1-\rho)] \exp(-\alpha t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Воспользовавшись формулами выражений x_0 , y_0 , c_1 и c_2 , выписанными выше, раскладывая $\exp(-\alpha t)$ в ряд, делая элементарные преобразования и деля левую и правую части уравнения (3.5) на $2A[2\rho + \varepsilon(1-\rho)]n^{-1}$, получим

$$(1 + \cos \omega t) - \frac{\varepsilon n}{8\rho\sqrt{\sigma}} \sin \omega t = \frac{n\varepsilon}{8\rho} t + \dots \quad (3.6)$$

В случае, когда $\varepsilon = 0$, имеем $\cos \omega t = -1$ и $t = \pi/\omega = \pi/\sqrt{\sigma}$. В случае, когда $\varepsilon \neq 0$, будем искать решение в виде $\omega t = \pi - \kappa\sqrt{\varepsilon} + \dots$. После подстановки соответствующих значений в (3.6) разложения в ряды по малому параметру $\sqrt{\varepsilon}$ и т. д. получим, что $\kappa^2 = n\pi(4\rho\sqrt{\sigma})^{-1}$. Подставляя полученные

значения ωt , α , ω в формулы (3.3), найдем координаты точки E

$$\begin{aligned} x_E &= -x_0 - \frac{4A\sigma\kappa\sqrt{\varepsilon}}{m\sqrt{\sigma}} - \frac{\pi n\varepsilon}{8\rho\sqrt{\sigma}} x_0 + \dots \\ y_E &= -y_0 - \frac{4A\sigma\kappa\sqrt{\varepsilon}}{n\sqrt{\sigma}} - \frac{\pi n\varepsilon}{8\rho\sqrt{\sigma}} y_0 + \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для того чтобы найти $TE = E_1(x_E', y_E') \in M_n' M_2$, нужно найти время переключения τ^* как первый положительный корень уравнения (1.4). Так как точка M_n по точечному преобразованию T переходит в точку M_n' при $\tau=0$ (см. примечание), то близкая к ней точка E перейдет в точку E_1 при малых τ . Поэтому считая, что $\tau = \mu\sqrt{\varepsilon} + \dots$, подставляя значения x_E и y_E в уравнение (1.4) и раскладывая все выражения до порядка ε^2 включительно, будем иметь

$$\begin{aligned} & \left\{ -(1+\rho) + \frac{m}{1+\rho} - \frac{2\sigma\kappa\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sigma}} + \frac{\varepsilon}{m} \left[\frac{2\sigma n}{\rho} + (4\sigma - b)(1+\rho) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{m(4\sigma - b)}{1+\rho} \right] \right\} \left(1 + \frac{2a+1+\rho}{4} \mu\sqrt{\varepsilon} + \frac{(2a+1+\rho)^2}{24} \mu^2\varepsilon + \dots \right) + \\ & + \left[1 - \rho - \frac{n}{1-\rho} + \frac{2\sigma\kappa\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sigma}} - \frac{2\sigma\varepsilon}{\rho} \right] \left(1 + \frac{(2a+1-\rho)}{4} \mu\sqrt{\varepsilon} + \right. \\ & \left. + \frac{(2a+1-\rho)^2}{24} \mu^2\varepsilon + \dots \right) + \frac{4\sigma[2\rho + \varepsilon(1-\rho)]}{b} \left(1 + \frac{a\mu\sqrt{\varepsilon}}{2} + \frac{a^2\mu^2\varepsilon}{6} + \dots \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Нетрудно проверить, что нулевой коэффициент, коэффициент при степени $\sqrt{\varepsilon}$ и ε равны нулю, а коэффициент при степени $\varepsilon\sqrt{\varepsilon}$ равен

$$\frac{1}{3}\mu\sigma\rho(\mu - 3\kappa/\sqrt{\sigma}) \quad (3.9)$$

и, следовательно, $\tau^* = 3\kappa\sqrt{\varepsilon}/\sigma + \dots$. Подставляя теперь значения x_E , y_E и полученное значение τ^* в уравнение (1.3), после несложных алгебраических вычислений получим, что

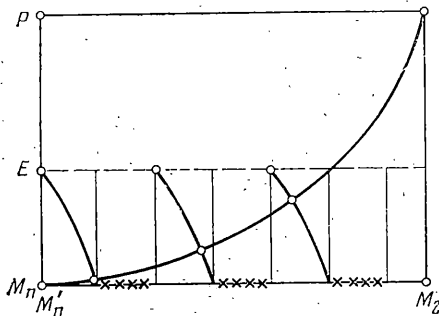
$$x_E' = x_0 - \frac{8\sigma A\kappa}{m\sqrt{\sigma}} \sqrt{\varepsilon} + \dots, \quad y_E' = y_0 - \frac{8\sigma A\kappa}{n\sqrt{\sigma}} \sqrt{\varepsilon} + \dots \quad (3.10)$$

Таким образом установлено, что длина отрезка $M_n'E_1$ порядка $\sqrt{\varepsilon}$.

Проведем из состояния равновесия $M(0, 0)$ ось, проходящую через точку E_1 . Этой оси соответствует некоторое $\varphi = k\sqrt{\varepsilon}$, где k — некоторая постоянная. Эту ось выше точки E_1 обязательно будут пересекать витки раскручивающейся спирали ($\sigma < \sigma^*$). Расстояние между соседними витками, согласно (2.4), в силу периодичности входящих в нее функций будет по крайней мере не более чем $\varepsilon\sqrt{\varepsilon}$. Очевидно, что все эти траектории пересекут и отрезок $M_n'E_1$. При этом спираль пересечет отрезок $M_n'E_1$ более чем в

$$N_1 = \sqrt{\varepsilon}/\varepsilon\sqrt{\varepsilon} = 1/\varepsilon \quad (3.11)$$

точках (1). На фиг. 2, 3 изображены диаграмма точечных преобразований $W=T_1T_2$ и соответствующая ей картина существования конечного числа предельных циклов для случая $\varepsilon > 0$, т. е. после того, как состояние равновесия $M(0, 0)$ уже изменило свою устойчивость и сложное образование перешло в более простое. Как обычно для бифуркации, в релейных системах первый предельный цикл состоит из траектории, проходящей в трехмерном пространстве и замыкающего куска траектории скользящих движений (фиг. 2); второй предельный цикл хотя и состоит из тех же элементов траекторий, но замыкающая траектория скользящих движений делает предварительно полный оборот вокруг точки $M(0, 0)$ (пунктирная линия на фиг. 2), третий предельный цикл имеет замыкающую траекторию, уже дважды обходящую точку $M(0, 0)$ и т. д. Теперь всю бифуркацию можно описать следующим образом. При изменении устойчивости состояния равновесия $M(0, 0)$, расположенного на пластинке скользящих движений, устойчивый фокус через состояние равновесия типа центра делается неустойчи-



Фиг. 3

вым. Одновременно с этим из замыкающей траектории, соединяющей точки M_n и M_n' , через странное образование, состоящее из бесконечного числа неустойчивых предельных циклов с исчезающими областями притяжения, рождается конечное число неустойчивых предельных циклов, области существования которых перемежаются областями, в которых рассматриваемое точечное преобразование не существует. При $\varepsilon \rightarrow 0$ периоды предельных циклов стремятся к

$$\tau_n = n\tau_0 + \tau_1 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (3.12)$$

где τ_0 — время полного оборота замкнутой траектории, проходящей через точки M_n' и M_n , а $\tau_1 \rightarrow 0$ как $\sqrt{\varepsilon}$. При увеличении ε неподвижные точки последовательно приходят на границу области определения точечного преобразования T' и пропадают. Одна из таких картинок и приведена на фиг. 2. Однако когда остается только одна неподвижная точка, то она устойчива. Точечное преобразование в этом случае уже непрерывно и отрезок $M_n P^n$ преобразуется строго в себя. По-видимому, имеет место более сложная картина. В частности, имеются многократные устойчивые неподвижные точки. Так, в последнем случае две двукратные устойчивые неподвижные точки, сливаясь с однократной неустойчивой неподвижной точкой, пропадают и передают ей свою устойчивость. При всех изменениях, происходящих в системе, рассматриваемая область остается областью притяжения соседних траекторий. В связи с этим стоит обратить внимание, что здесь имеет место так называемый «странный аттрактор». Несмотря на сложную и казалась бы не грубую картину бифуркации в релейной системе, эта картина сохраняется и в случае кусочно-линейной системы третьего порядка, близкой к релейной [2].

Поступила 6 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Киняпин С. Д. Об одной релейной неустойчивой системе. Автоматика и телемеханика, 1974, № 12.
2. Киняпин С. Д. Об одной бифуркации. Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 3.