УДК 539.3:534.1

КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ, ОБТЕКАЕМОЙ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

Р. АНВАРОВ, Э. И. ГЕГЕЛЬ

(Ташкент)

При помощи метода эквивалентного соответствия [1] исследуются на устойчивость вынужденные колебания вязкоупругой пластинки. Рассмотрены случаи изменения скорости потока газа в окрестности значения критической скорости, определяемого в упругом случае [2, 3]. Показано, что учет вязкости снижает критическую скорость потока газа. Этот факт согласуется с результатом, полученным методом усреднения [4]. Найдено аналитическое выражение для критической скорости с учетом вязкоупругих свойств материала пластинки.

Постановка задачи о колебаниях упругой пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, дана в [2]. В условиях плоской задачи в этой работе была найдена связь между характеристиками собственных колебаний пластинки и скоростью движущегося потока газа.

Позднее задачи о флаттере рассматривали многие исследователи (см., например, [5, 6]).

Влияние аэродинамического демпфирования на флаттер упругой пластинки изучено в [3]. В [4] методом усреднения исследован флаттер упруговязкой пластинки в линейной постановке. Нелинейный флаттер упруговязкой пластинки с учетом геометрической и аэродинамической нелинейности рассмотрен в [7].

Здесь, используя метод эквивалентного соответствия, предложенного в [1], исследуется устойчивость вынужденных колебаний вязкоупругой пластинки в плоском сверхзвуковом потоке газа. Получено аналитическое выражение для критической скорости потока газа с учетом вязкоупругих свойств материала пластинки.

Рассмотрим малые колебания плоской вязкоупругой пластинки бесконечной ширины, толщиной $2h$, длиной l, движущейся прямолинейно с большой сверхзвуковой скоростью U в некоторой газовой среде. Движение рассматриваемой пластинки относительно газа происходит без учета атаки. Введем в плоскости пластинки ось координат ox, направление которой совпадает с направлением движения пластинки. Полагая, что зависимость между напряжением и деформацией материала пластинки следует линейной теории вязкоупругости [8], а силы аэродинамического воздействия учитываются согласно поршневой теории [9], для описания малых прогибов пластинки $w(t, x)$ получим следующее уравнение:

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + B\left(\frac{\partial w}{\partial t} - U\frac{\partial w}{\partial x}\right) + D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = D\int_0^t \Gamma(t-\tau)\frac{\partial^4 w(\tau, x(\tau))}{\partial x^4}d\tau \tag{1}$$

$$D={}^2/_3Eh^3(1-\nu^2)^{-1}, \quad \Gamma(t)=-E^{-1}R'(t), \quad \mu=2h\rho, \quad B=p_0\varkappa c_0^{-1}$$

где E, ν, $R(t)$, ρ – мгновенный модуль упругости, коэффициент Пуассона (при $t=0$), функция релаксации и плотность материала пластинки; p_0 и c_0 – давление газа и скорость звука в газе на бесконечности, $\varkappa$ – показатель политропы.

Введем безразмерные величины x/l, w/h, $t/(\mu l^4 D^{-1})^{1/2}$, $\Gamma(t)\,(\mu l^4 D^{-1})^{1/2}$.

Тогда, сохраняя прежние обозначения x, w, t, $\Gamma(t)$, уравнение (1) запишем в виде

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - N_1\frac{\partial w}{\partial x} + N_2\frac{\partial w}{\partial t} = \int_0^t \Gamma(t-\tau)\frac{\partial^4 w(\tau, x(\tau))}{\partial x^4}d\tau \tag{2}$$

$$N_1=BUl^3D^{-1}, \quad N_2=Bl^2(\mu D)^{-1/2}$$

Рассмотрим случай, когда края пластинки шарнирно оперты, и будем искать решение уравнения (2) в виде

$$w(t, x)=f_1(t)\sin\pi x+f_2(t)\sin 2\pi x \tag{3}$$

После подстановки выражения (3) в уравнение (2) методом Бубнова – Галеркина получим относительно f_1 и f_2 следующую систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$f_1^{\bullet\bullet}+a_1f_1+bf_2+N_2f_1^{\bullet} = a_1\int\limits_0^t \Gamma(t-\tau)f_1(\tau)\,d\tau$$

$$f_2^{\bullet\bullet}+a_2f_2-bf_1+N_2f_2^{\bullet} = a_2\int\limits_0^t \Gamma(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau \qquad (4)$$

$$a_1=\pi^4,\quad a_2=16\pi^4,\quad b={}^8/_3N_1$$

Как показано в [10], где исследуется на сходимость метод Бубнова – Галеркина, ограничение решения уравнения (2) двучленной аппроксимацией по собственным функциям колебаний пластинки в виде (3) раскрывает механику рассматриваемого явления и дает практически приемлемые результаты.

Для применения метода эквивалентного соответствия систему (4) представим в векторно-матричной записи. Введем обозначения: $\mathbf{y}_1=f_1$, $\mathbf{y}_2=f_1^{\bullet}$, $\mathbf{y}_3=f_2$, $\mathbf{y}_4=f_2^{\bullet}$ и запишем систему (4) в виде

$$\mathbf{y}^{\bullet} = A\mathbf{y}+\varepsilon\int\limits_0^t K(s)\,\mathbf{y}(t-s)\,ds, \qquad \mathbf{y}(0)=\mathbf{y}_0 \qquad (5)$$

$$A=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ -a_1 & -N_2 & -b & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ b & 0 & -a_2 & -N_2\end{Vmatrix}, \qquad K(s)=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ a_1\Gamma(s) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_2\Gamma(s) & 0\end{Vmatrix}$$

где $\mathbf{y}$ – вектор-столбец, а $\mathbf{y}_0$ – заданный вектор-столбец.

В системе (5) ε – формально введенный малый параметр, подчеркивающий специфические свойства ядер армируемых полимерных материалов [8]. Следует отметить, что в окончательных результатах, получаемых методом эквивалентного соответствия, следует положить $\varepsilon=1$, так как малость интегральных слагаемых обеспечена свойствами ядра $\Gamma(t)$.

Исследование системы интегро-дифференциальных уравнений (5) сведем к исследованию системы дифференциальных уравнений

$$\xi^{\bullet} = \left(A+\varepsilon\int\limits_0^\infty K(s)\,Y(-s)\,ds\right)\xi-\varepsilon\int\limits_t^\infty K(s)\,Y(t-s)\,ds\,\mathbf{y}_0 \qquad (6)$$

$$\int\limits_0^\infty K(s)\,Y(-s)\,ds=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4\end{Vmatrix}, \qquad \begin{aligned}\alpha_i &= a_1\int\limits_0^\infty \Gamma(s)\,\mathbf{y}_{1i}(-s)\,ds\\ \beta_i &= a_2\int\limits_0^\infty \Gamma(s)\,\mathbf{y}_{3i}(-s)\,ds\end{aligned}$$

где $Y(t)=\mathbf{y}_{ij}(t)$, фундаментальная матрица системы

$$\mathbf{y}^{\bullet}=A\mathbf{y},\quad \mathbf{y}_{ij}(t)=\mathbf{y}_i(t,\,c_{1j},\,c_{2j},\,c_{3j},\,c_{4j}) \qquad (\overline{i,\,j=1,\,4})$$

а постоянные c_{ij} определяются из условия нормировки $Y(0)=I$, I – единичная матрица.

Система (6) получается из (5) методом эквивалентного соответствия в первом приближении. В [7] сформулированы условия, обеспечивающие близость решений систем (5) и (6). Эти же условия позволяют судить об устойчивости решения системы (5), если решение системы (6) устойчиво.

Коэффициенты α_i и β_i зависят от конкретного значения матрицы $Y(t)$, которая определяется собственными числами матрицы A:

$$\lambda_{1,2,3,4} = -\frac{N_2}{2}\pm i\left\{\frac{a_1+a_2}{2}-\frac{N_2^2}{4}\mp\frac{i}{2}\left[4b^2-(a_2-a_1)^2\right]^{1/2}\right\}^{1/2} \qquad (7)$$

Вид чисел (7), в свою очередь, определяется значением параметра b, который линейно связан со скоростью пластинки. При критическом значении параметра

$$b=b_*={}^1/_2\left[(a_2-a_1)^2+2N_2^2(a_1+a_2)\right]^{1/2} \qquad (8)$$

определяемого из условия равенства нулю наибольшей вещественной части чисел (7), $Y(t)$ состоит из периодических и экспоненциально затухающих элементов; при $b>b_*$, $Y(t)$ с течением времени неограниченно возрастает, а при $b<b_*$ — уменьшается.

Дальнейшая задача состоит в том, чтобы из системы (6) найти критическое значение параметра b с учетом интегральных слагаемых и исследовать решение данной системы на устойчивость.

Предполагается, что интегралы в коэффициентах α_i и β_i сходятся. Это предположение естественное, так как коэффициент N_2 — малая величина [3]. Для определения значения параметра b рассмотрим однородную часть системы (6), которой соответствует характеристическое уравнение

$$\lambda^4+d_1\lambda^3+d_2\lambda^2+d_3\lambda+d_4=0 \tag{9}$$

$$d_1=2N_2-\varepsilon(\alpha_2+\beta_4),\quad d_2=a_1+a_2+N_2^2-\varepsilon[\alpha_1+\beta_3+N_2(\alpha_2+\beta_4)]-\varepsilon^2(\alpha_2\beta_4-\beta_2\alpha_4)$$

$$d_3=N_2(a_1+a_2)+\varepsilon[b(\beta_2-\alpha_4)-(a_1\beta_4+a_2\alpha_2)-N_2(\alpha_1+\beta_3)]-\varepsilon^2(\alpha_3\beta_2+\beta_1\alpha_4-\alpha_1\beta_4-\beta_3\alpha_2)$$

$$d_4=a_1a_2+b^2+\varepsilon[b(\beta_1-\alpha_3)-a_1\beta_3-a_2\alpha_1]+\varepsilon^2(\alpha_1\beta_3-\beta_1\alpha_3)$$

Параметр b, входящий в уравнение (9), найдем, проверяя положительность определителей Гурвица

$$T_0=1>0,\quad T_1=2N_2-\varepsilon(\alpha_2+\beta_4),\quad T_3=-m_0b^2+m_1b+m_2$$

$$T_2=N_2(a_1+a_2)-\varepsilon(\alpha_2a_1+\beta_4a_2)-\varepsilon b(\beta_2-\alpha_4),\quad T_4=d_4T_3$$

$$m_0=\varepsilon^2(\beta_2-\alpha_4)^2+[2N_2-\varepsilon(\alpha_2+\beta_4)]^2,\quad m_1=\varepsilon^2(\beta_4-\alpha_2)(\alpha_4-\beta_2)(a_2-a_1)$$

$$m_2=\{\varepsilon^2\alpha_2\beta_4+N_2[N_2-\varepsilon(\alpha_2+\beta_4)]\}(a_2-a_1)^2$$

Здесь в T_2 оставлены члены порядка ε и N_2, в T_3 — члены порядка ε^2, εN_2 и N_2^2.

Ввиду того, что значения α_i и β_i определяются видом матрицы $Y(t)$, рассмотрим следующие случаи.

1. Матрица $Y(t)$ определяется значением параметра b, задаваемого выражением (8). В этом случае собственные числа матрицы A имеют вид

$$\lambda_{1,2}=\pm i\beta,\quad \lambda_{3,4}=-N_2\pm i\beta,\quad \beta=(a_1+a_2)^{1/2}/\sqrt{2}$$

а постоянные c_{ij} определяются из системы алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} c_{1i}+c_{3i}=\delta_{1i},\quad \beta c_{2i}-N_2c_{3i}+\beta c_{4i}=\delta_{2i} \\ (\beta^2-a_1)c_{1i}-N_2\beta c_{2i}+(\beta^2-a_1)c_{3i}+N_2\beta c_{4i}=b_*\delta_{3i} \\ N_2\beta^2c_{1i}+\beta(\beta^2-a_1)c_{2i}-N_2a_2c_{3i}+\beta[(\beta^2-a_1)-N_2^2]c_{4i}=b_*\delta_{4i} \end{gathered} \tag{10}$$

где $\delta_{ii}=1$, $\delta_{ij}=0$, если $i\neq j$ $(i,j=\overline{1,4})$.

Введем обозначения

$$\int_0^\infty \Gamma(s)\cos\beta s\exp(N_2s)\,ds=\sum_{k=0}^\infty N_2^kA_k,\qquad A_k=\frac{1}{k!}\int_0^\infty \Gamma(s)s^k\cos\beta s\,ds$$

$$\int_0^\infty \Gamma(s)\sin\beta s\exp(N_2s)\,ds=\sum_{k=0}^\infty N_2^kB_k,\qquad B_k=\frac{1}{k!}\int_0^\infty \Gamma(s)s^k\sin\beta s\,ds$$

Положим $N_2=\varepsilon N$; принимая во внимание решение системы (10) и пренебрегая слагаемыми порядка ε^2, найдем значения коэффициентов α_i, β_i:

$$\alpha_1=a_1[A_0+B_1(\beta^2-a_1)(2\beta)^{-1}],\quad \alpha_2=-a_1(\beta^2-a_1)(2\beta^3)^{-1}(B_0-A_1\beta)-a_1B_0\beta^{-1}$$

$$\alpha_3=-a_1B_1(\beta^2-a_1)(2\beta)^{-1},\quad \alpha_4=a_1(\beta^2-a_1)(2\beta^3)^{-1}(B_0-A_1\beta)$$

$$\beta_1=a_2B_1(\beta^2-a_1)(2\beta)^{-1},\quad \beta_2=-a_2(\beta^2-a_1)(2\beta^3)^{-1}(B_0-A_1\beta)$$

$$\beta_3=a_2[A_0-B_1(\beta^2-a_1)(2\beta)^{-1}],\quad \beta_4=-a_2[(\beta^2+a_1)(2\beta^3)^{-1}B_0+(\beta^2-a_1)(2\beta^2)^{-1}A_1]$$

Так как параметр b — положительная величина и $a_2>a_1$, то для найденных значений α_i, β_i нетрудно проверить, что T_1, T_2, T_4/T_3 — положительные величины, а $T_3>$ >0 при

$$b<{}^1/_2(a_2-a_1)k=b_{**} \tag{11}$$

$$k=\{\{(\beta_4-\alpha_2)^2(\beta_2-\alpha_4)^2+4[\alpha_2\beta_4+N(N-\alpha_2-\beta_4)][(\beta_2-\alpha_4)^2+$$

$$+(2N-\alpha_2-\beta_4)^2]\}^{1/2}-(\beta_4-\alpha_2)(\beta_2-\alpha_4)\}[(\beta_2-\alpha_4)^2+(2N-\alpha_2-\beta_4)^2]^{-1}$$

Величина b_{**}, зависящая от вязкоупругих свойств материала пластинки, будет определять критическое значение скорости вязкоупругой пластинки.

Допустим, что вязкое сопротивление пластинки не учитывается. Полагая $A_0=B_0=A_1=B_1=0$, находим $k=1$. Если учитывать вязкое сопротивление, то $k<1$. Действительно, полагая в $T_3>0$ величину $b_{**}=(a_2+a_1)/2+\eta$, относительно η получим следующее неравенство:

$$m_0\eta^2+[m_0(a_2-a_1)-m_1]\eta+m_0{}^1/_4(a_2-a_1)^2-m_1{}^1/_2(a_2-a_1)-m_2<0$$

Так как коэффициенты и дискриминант квадратного трехчлена положительны, то неравенство имеет место для отрицательных значений η, следовательно, $b_{**}<{}^1/_2(a_2-a_1)$, т. е. $k<1$.

Таким образом, можно сделать вывод, что учет вязкого сопротивления приводит к снижению критической скорости пластинки по сравнению с аналогичной задачей в упругой постановке. Данный вывод согласуется с результатами, полученными в [4], но в отличие от работы [4] критическая скорость вязкоупругого флаттера, определяемая из (11) $U_{**}=D({}^8/_3Bl^3)^{-1}b_{**}$, обладает большей наглядностью, характеризуя зависимость U_{**} от вязкоупругих свойств материала пластинки.

В силу полученного результата исследование случая, когда $b>b_*$, не представляет интереса, так как в этой области изменения параметра b решение системы (5) неустойчиво.

2. Матрица $Y(t)$ определяется значением параметра $b<b_*$. Для этого случая собственные числа матрицы A будут вида

$$\lambda_{1,2}=-\frac{N_2}{2}\pm ip_1,\qquad p_1=\left\{\frac{a_1+a_2}{2}-\frac{N_2{}^2}{2}-\frac{1}{2}[(a_2-a_1)^2-4b^2]^{1/2}\right\}^{1/2}$$

$$\lambda_{3,4}=-\frac{N_2}{2}\pm ip_2,\qquad p_2=\left\{\frac{a_1+a_2}{2}-\frac{N_2{}^2}{2}+\frac{1}{2}[(a_2-a_1)^2-4b^2]^{1/2}\right\}^{1/2}$$

Постоянные c_{ij} определяются из системы уравнений

$$c_{1i}+c_{3i}=\delta_{1i},\qquad -\frac{N_2}{2}(c_{1i}+c_{3i})+p_1c_{2i}+p_2c_{4i}=\delta_{2i},\qquad (p_1{}^2-a_1)c_{1i}+(p_2{}^2-a_1)c_{3i}=b\delta_{3i}$$

$$-\frac{N_2}{2}[(p_1{}^2-a_1)c_{1i}+(p_2{}^2-a_1)c_{3i}]+p_1(p_1{}^2-a_1)c_{2i}+p_2(p_2{}^2-a_1)c_{4i}=b\delta_{4i}$$

Коэффициенты α_i и β_i содержат искомый параметр b и принимают следующие значения, в которых отброшены члены порядка εN_2:

$$\alpha_1=a_1\frac{b_2A_1-b_1A_2}{b_2-b_1},\qquad \alpha_2=a_1\left[\frac{b_1B_2}{p_2(b_2-b_1)}-\frac{b_2B_1}{p_1(b_2-b_1)}\right],\qquad \alpha_3=a_1b\frac{A_2-A_1}{b_2-b_1}$$

$$\alpha_4=\frac{a_1b}{b_2-b_1}\left(\frac{B_1}{p_1}-\frac{B_2}{p_2}\right),\qquad \beta_1=a_2\frac{b_1b_2(A_1-A_2)}{b(b_2-b_1)}$$

$$\beta_2=a_2\frac{b_1b_2}{b(b_2-b_1)}\left(\frac{B_2}{p_2}-\frac{B_1}{p_1}\right)$$

$$\beta_3=a_2\frac{b_2A_2-b_1A_1}{b_2-b_1},\qquad \beta_4=a_2\left[\frac{b_1B_1}{p_1(b_2-b_1)}-\frac{b_2B_2}{p_2(b_2-b_1)}\right];\qquad b_1=p_1{}^2-a_1,\qquad b_2=p_2{}^2-a_1$$

$$A_i=\int_0^\infty\Gamma(s)\exp\left(\frac{N_2}{2}s\right)\cos p_is\,ds,\qquad B_i=\int_0^\infty\Gamma(s)\exp\left(\frac{N_2}{2}s\right)\sin p_is\,ds$$

При данных значениях α_i и β_i проведенные выше рассуждения справедливы и в этом случае, но отличие заключается в том, что условие $T_3>0$ определяет неравенство

$$b<{}^1/_2(a_2-a_1)k,\qquad k<1\tag{12}$$

в котором коэффициент k является функцией искомого параметра b.

Отметим, что найденное значение b_{**} можно рассматривать как первое приближение в определении критического значения параметра b из условия (12), которое может быть доопределено решением данного неравенства одним из итерационных методов.

Поступила 25 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гегель Э. И., Ларионов Г. С.* Метод эквивалентного соответствия в линейных динамических задачах теории вязкоупругости. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 5.
2. *Мовчан А. А.* О колебаниях пластинки, движущейся в газе. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.
3. *Мовчан А. А.* О влиянии аэродинамического демпфирования на сверхзвуковой флаттер обшивки. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1960, № 1.
4. *Матяш В. И.* Флаттер упруговязкой пластинки. Механика полимеров, 1971, № 6.
5. *Огибалов П. М., Колтунов М. А.* Оболочки и пластины. М., Изд-во МГУ, 1969.
6. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
7. *Ларионов Г. С.* Нелинейный флаттер упруговязкой пластинки. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 4.
8. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М., «Наука», 1970.
9. *Ильюшин А. А.* Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей. ПММ, 1956, т. 20, вып. 6.
10. *Hedgepeth J. M.* Flutter of rectangular simpley supported speeds. J. Aeronaut. Sci., 1957, vol. 24, No. 8. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1958, № 2.)

УДК 531/534:0.616

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ СЕМИНАРЫ

Семинар по аналитической механике под руководством В. В. Румянцева

14 IV 1978. В. Н. Богаевский, Л. А. Острер (Москва) *О быстром вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.*

Рассматривается быстрое вращение симметричного ($A=B$) тяжелого тела (кинетическая энергия велика по сравнению с потенциальной). Малый параметр ε, вводимый в уравнения, характеризует «быстроту» вращения, так, что за время $t\sim1$ тело совершает $\sim1/\varepsilon$ оборотов. Очевидно, что движение тела, наблюдаемое на любом интервале времени $[t_1, t_2]$ продолжительностью $\sim\varepsilon$, близко к эйлеровскому движению по инерции с начальными данными, задающими положение и скорость тела в момент t_1, но, вообще говоря, не близко к эйлеровскому движению с начальными условиями, заданными в момент $t=0$, если $t_1\geqslant\varepsilon$. В этом смысле можно говорить о переходе от одного состояния эйлеровского движения по инерции к другому.

Хорошо известным примером является быстрое вращение волчка, когда тело медленно, со скоростью $\sim\varepsilon$ (т. е. за промежутки времени $\sim1/\varepsilon$) переходит от одного состояния эйлеровского движения к другому (прецессия волчка).

В предлагаемой работе рассматриваются случаи, когда подобный переход происходит с конечной скоростью порядка единицы. Это – случай первых резонансов в начальном эйлеровском движении (см. В. И. Арнольд, Математические методы классической механики. М., «Наука», 1974).

Методом теории возмущений получены приближенные уравнения, описывающие движение с точностью $\sim\varepsilon$ за время $0\leqslant t\lesssim1$, и указан процесс построения приближений любого порядка.

Полученные уравнения легко интегрируются в квадратурах.

21 IV 1978. В. Г. Вильке (Москва) *О движении тяжелой гибкой нити в орбитальной системе координат.*

Рассматривается задача о движении тяжелой гибкой нити, привязанной к спутнику, движущемуся по круговой орбите в центральном ньютоновском поле сил. Уравнения движения получаются из принципа Гамильтона – Остроградского. Отыскиваются все относительные положения равновесия нити и исследуется их устойчивость вторым методом Ляпунова с использованием нормы фазового пространства системы.