

## НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ДИНАМИЧЕСКОЕ НАГРУЖЕНИЕ ОБОЛОЧКИ С РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

А. М. МИХАЙЛОВ

(Новосибирск)

В предположении, что ребра работают только на растяжение – сжатие, а материал оболочки – только на сдвиг, получено точное решение упругой динамической задачи при условии, что к одному из ребер внезапно приложено напряжение. Приведены график распределения напряжений вдоль ребер в различные моменты времени для случая оболочки с шестью ребрами.

Пусть покоящаяся полубесконечная цилиндрическая тонкостенная оболочка усилена  $N$  ребрами жесткости. В момент времени  $t=0$  к одному из ребер прикладывается продольное напряжение  $Q\delta_0(t)$  ( $\delta_0(t)$  – функция Хевисайда единичного скачка), а остальные ребра не нагружаются. Рассмотрим процесс передачи усилия на остальные ребра. Будем учитывать лишь продольные смещения оболочки, пренебрегая изгибом и окружными перемещениями. Кроме того, примем следующие допущения о характере работы конструкции: ребра жесткости воспринимают только продольные усилия растяжения – сжатия, т. е. работают как одномерные стержни, сама же тонкостенная оболочка воспринимает лишь сдвиговые усилия на площадках, параллельных ребрам.

Такая идеализация работы конструкции будет, по-видимому, тем лучше соответствовать реальности, чем меньшей жесткостью на растяжение – сжатие в направлении ребер обладает стенка оболочки по сравнению с жесткостью самих ребер. Будем учитывать инерцию как ребер, так и самой оболочки. Сформулированные допущения применяются при изучении однонаправленных армированных сред [1], причем ребрами жесткости считаются высокомодульные армирующие нити, а тонкостенной оболочкой – связующее. В [1] решена задача, равносильная случаю  $N=1$ , или, что то же самое, одновременному нагружению всех ребер.

1. Для удобства вместо цилиндрической оболочки будем рассматривать верхнюю полуплоскость ( $y \geq 0$ ), состоящую из равноотстоящих ребер жесткости, пронумерованных индексами  $j$  ( $-\infty < j < +\infty$ ) и соединяющих эти ребра тонких панелей, работающих на сдвиг. Размеры поперечного сечения ребра в плоскости конструкции  $h$ , в перпендикулярном направлении  $b_1$ ; размеры панели соответственно  $H$  и  $b_2$ . Нагрузка, приложенная к ребрам при  $y=0$ , является периодической функцией номера ребра с периодом  $N$ . Координата  $x$  отсчитывается для  $j$ -й панели, лежащей между  $j$  и  $(j+1)$ -м ребрами, от  $j$ -го ребра (т. е.  $0 \leq x \leq H$ ).

Нетрудно показать, что смещения  $v_j(x, y, t)$   $j$ -й панели удовлетворяют волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} = 0, \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho_2} \quad (1.1)$$

которое описывает распространение волн сдвига в направлении оси  $x$  ( $G$  – модуль сдвига,  $\rho_2$  – плотность панели). Краевые условия для (1.1) выражают сцепление панели с ребром

$$v_j(0, y, t) = u_j(y, t), \quad v_j(H, y, t) = u_{j+1}(y, t) \quad (1.2)$$

где  $u_j(y, t)$  – смещение  $j$ -го ребра.

Напишем уравнение, описывающее поведение  $j$ -го ребра. Ребро – это одномерный стержень, подверженный воздействию нагрузки, распреде-

ленной вдоль его длины (касательная нагрузка, действующая со стороны примыкающих панелей). Погонная плотность этой нагрузки равна

$$Gb_2(-\partial v_{j-1}(H, y, t)/\partial x + \partial v_j(0, y, t)/\partial x)$$

Поэтому для смещения  $u_j(y, t)$  ребра жесткости имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \frac{\beta^2}{h} \left( \frac{\partial v_j(0, y, t)}{\partial x} - \frac{\partial v_{j-1}(H, y, t)}{\partial x} \right)$$

$$c_1^2 = \frac{E}{\rho_1}, \quad \beta^2 = \frac{Gb_2}{Eb_1} \quad (1.3)$$

где  $E$  — модуль Юнга ребра,  $\rho_1$  — его плотность,  $c_1$  — скорость продольных волн в стержне. Величина  $Gb_2/b_1$  в рассматриваемой модели играет роль эффективного модуля сдвига панели, который тем меньше, чем меньше отношение размеров  $b_2/b_1$ .

Итак, имеются уравнения (1.1)–(1.3), которые должны быть решены после добавления начальных условий и краевых условий по  $y$ . В дальнейшем будем считать, что начальные условия нулевые.

2. Применяем к задаче (1.1)–(1.3) преобразование Лапласа по переменной  $t$ , считая начальные условия нулевыми. Преобразованные величины отмечаем верхним индексом  $L$ , параметр преобразования обозначим через  $p$ .

Из (1.1), (1.2) получаем

$$\frac{d^2 v_j^L(x, y, p)}{dx^2} - \frac{p^2}{c_2^2} v_j^L(x, y, p) = 0$$

$$v_j^L(0, y, p) = u_j^L(y, p), \quad v_j^L(H, y, p) = u_{j+1}^L(y, p)$$

Решив это обыкновенное линейное уравнение с постоянными коэффициентами и двумя краевыми условиями, находим нужные величины

$$\frac{\partial v_j^L(0, y, p)}{\partial x} = \frac{\lambda}{H} \frac{(-u_j^L \operatorname{ch} \lambda + u_{j+1}^L)}{\operatorname{sh} \lambda}$$

$$\frac{\partial v_{j-1}^L(H, y, p)}{\partial x} = \frac{\lambda}{H} \frac{(u_{j-1}^L - u_j^L \operatorname{ch} \lambda)}{\operatorname{sh} \lambda}, \quad \lambda = \frac{pH}{c_2}$$

Подставим эти выражения в уравнение (1.3), преобразовав его предварительно по Лапласу

$$\frac{d^2 u_j^L}{dy^2} + \frac{\beta^2}{Hh} \frac{\lambda}{\operatorname{sh} \lambda} (u_{j+1}^L - 2 \operatorname{ch} \lambda u_j^L + u_{j-1}^L) = \frac{p^2}{c_1^2} u_j^L \quad (2.1)$$

Бесконечная система линейных дифференциальных уравнений (2.1) содержит только смещения ребер  $u_j^L$ . Для ее решения применяем дискретное преобразование Фурье. Умножаем каждое уравнение на  $\exp(ijs)$  ( $i$  — мнимая единица,  $s$  — вещественный параметр преобразования) и складываем все уравнения

$$\frac{d^2}{dy^2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j^L \exp(ijs) + \frac{\beta^2}{Hh} \frac{\lambda}{\operatorname{sh} \lambda} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (u_{j+1}^L \exp[is(j+1-1)] +$$

$$+ u_{j-1}^L \exp[is(j-1+1)]) - \left( \frac{2\beta^2 \lambda \operatorname{ch} \lambda}{Hh} + \frac{p^2}{c_1^2} \right) \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j^L \exp(isj) = 0$$

Вводя обозначение  $u^{LF}$  для суммы ряда Фурье, получим уравнение

$$\frac{d^2 u^{LF}}{dy^2} - \left( \frac{p^2}{c_1^2} + \frac{2\beta^2 \lambda \operatorname{ch} \lambda}{Hh \operatorname{sh} \lambda} - \frac{2\beta^2 \lambda \cos s}{Hh \operatorname{sh} \lambda} \right) u^{LF} = 0$$

$$u^{LF}(y, p, s) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j^L \exp(ijs)$$

решение которого, обращающееся в нуль при  $y \rightarrow +\infty$ , имеет вид

$$u_j^{LF} = c(p, s) \exp \left\{ -y \left[ \frac{p^2}{c_1^2} + \frac{2\beta^2 \lambda}{Hh \operatorname{sh} \lambda} (\operatorname{ch} \lambda - \cos s) \right]^{1/2} \right\}$$

Произвольная постоянная  $c(p, s)$  должна определяться из условий при  $y=0$ . В данном случае ( $k$  — целое число)

$$E \frac{du_j(0, t)}{dy} = Q \delta_0(t) \quad \text{если } j=Nk$$

$$E \frac{du_j(0, t)}{dy} = 0 \quad \text{если } j \neq Nk$$

Отсюда находим

$$\frac{du^{LF}(0, p, s)}{dy} = \frac{Q}{Ep} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(iNks) = \frac{2\pi Q}{EpN} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_1 \left( s - \frac{2\pi k}{N} \right) \quad (2.2)$$

где  $\delta_1$  — дельта-функция Дирака. При помощи граничного условия (2.2) определяем  $c(p, s)$ ,  $\sigma_j^{LF}(y, p, s) = E du_j^{LF}/dy$  и по формулам Эйлера — Фурье находим трансформанту Лапласа напряжения в  $j$ -м ребре

$$\sigma_j^L(y, p) = E \frac{du_j^L}{dy} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E \frac{du^{LF}}{dy} e^{-ijs} ds = \quad (2.3)$$

$$= \frac{Q}{pN} \sum_{k=-[1/2N]}^{[1/2N]} \exp \left\{ -i \frac{2\pi k j}{N} - y \left[ \frac{p^2}{c_1^2} + \frac{2\beta^2 \lambda}{Hh \operatorname{sh} \lambda} \left( \operatorname{ch} \lambda - \cos \frac{2\pi k}{N} \right) \right]^{1/2} \left( 1 - \frac{1}{2} \delta_{k, 2[1/2N]} \right) \right\}$$

3. Далее нужно восстановить оригиналы  $\sigma_j(y, t)$  по преобразованию Лапласа (2.3). Задача сводится к нахождению оригинала для следующей функции:

$$\frac{F(p)}{p} = \frac{1}{p} \exp \left\{ -y \left[ \frac{p^2}{c_1^2} + \frac{2\beta^2 \lambda}{Hh \operatorname{sh} \lambda} \left( \operatorname{ch} \lambda - \cos \frac{2\pi k}{N} \right) \right]^{1/2} \right\}$$

Обозначим  $\exp(-\lambda) = \mu$ ,  $-\cos(2\pi k/N) = \delta$ . Введем безразмерную координату вдоль ребра жесткости  $\eta = \beta^2 c_1 y / hc_2$ , безразмерное время  $\theta = \beta^2 c_1^2 t / hc_2$ , безразмерный параметр преобразования Лапласа  $P = hc_2 p / \beta^2 c_1^2$  и безразмерный параметр  $\gamma = \beta^2 H c_1^2 / hc_2^2 = \rho_2 b_2 H / \rho_1 b_1 h$ . Тогда вместо  $F(p)$  получим новую функцию

$$\Phi(P) = \exp(-\eta \sqrt{P^2 + 2Pf(\mu)}), \quad f(\mu) = \frac{1 + \delta\mu + \mu^2}{1 - \mu^2}$$

Разложим  $\Phi(P)$  в ряд по степеням  $\mu$  с коэффициентами, зависящими от  $P$ . Эти коэффициенты окажутся достаточно простыми функциями от  $P$ , для которых удастся найти оригиналы. По теореме запаздывания операционного исчисления умножение на  $\mu^n = \exp(-P\gamma n)$  соответствует сдвигу найденного оригинала по времени  $\theta$  на величину  $\gamma n$  [2]. Параметр  $\gamma$  показывает величину безразмерного времени, потребного для пробега волны сдвига между ребрами.

Таким образом, каждый член степенного ряда описывает волны, возникающие за счет многократных отражений от других ребер. В частности, свободный член ряда Тейлора (соответствующий случаю  $\mu=0$ , т. е.  $H=\infty$  или  $c_2=0$ ) описывает решение для моментов времени  $0 \leq t \leq H/c_2$ , пока волна сдвига, излученная ребром жесткости, не успевает достигнуть ближайших ребер. Следовательно, разложение  $\Phi$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $\mu=0$  соответствует разложению оригинала в сумму отраженных волн.

По формуле Тейлора

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n \Phi}{d\mu^n} \right|_{\mu=0} \mu^n$$

Представим функцию  $\Phi$  в виде

$$\Phi = \exp(-\eta \sqrt{P^2 + 2P\epsilon f(\mu)})$$

где  $\epsilon$  — вспомогательный безразмерный параметр, который в окончательном результате будет положен равным единице. Нахождение  $n$ -й производной сложной функции осуществляется по следующему правилу ([3], формула 0.430)

$$\frac{d^n \Phi}{d\mu^n} = \sum_{r=1}^n \frac{1}{r!} \frac{d^r \Phi}{df^r} U_r$$

$$U_r = \sum_{m=0}^{r-1} (-1)^{m+r} C_r^m f^{r-m} \frac{d^{n-fm}}{d\mu^n}$$

где  $C_r^m$  — биномиальные коэффициенты. Все величины в этих формулах должны быть вычислены при  $\mu=0$ ,  $\epsilon=1$ . Очевидно, что

$$\left. \frac{\partial^r \Phi}{\partial f^r} \right|_{\epsilon=1, \mu=0} = \left. \frac{\partial^r \Phi}{\partial \epsilon^r} \right|_{\epsilon=1, \mu=0}$$

Вычислим  $U_r$ :

$$U_r \Big|_{\mu=0} = \frac{d^n}{d\mu^n} \sum_{m=0}^{r-1} C_r^m (-f(0))^{r-m} f^m(\mu) \Big|_{\mu=0} = \frac{d^n}{d\mu^n} (-f(0) + f(\mu))^r \Big|_{\mu=0} =$$

$$= \frac{d^n}{d\mu^n} \left( \frac{2\mu^2 + \delta\mu}{1 - \mu^2} \right)^r \Big|_{\mu=0} = \sum_{m=0}^n \frac{C_n^m r! \delta^{2r-m} m!}{(2r-m)! (m-r)!} \frac{1 + (-1)^{n-m}}{2} \times$$

$$\times \frac{(r+1/2 n - 1/2 m - 1)! (n-m)!}{(r-1)! [1/2 (n-m)]!}$$

Последнее равенство получено с помощью формулы Лейбница взятия  $n$ -й производной от произведения  $(2\mu^2 + \delta\mu)^r (1 - \mu^2)^{-r}$  в точке  $\mu=0$ . Запишем коэффициент при  $\mu^n$  в ряде Тейлора

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n \Phi}{d\mu^n} \Big|_{\varepsilon=1, \mu=0} = \sum_{r=1}^n a_{rn\delta} \frac{\partial^r \Phi}{\partial \varepsilon^r} \Big|_{\mu=0, \varepsilon=1}$$

$$a_{rn\delta} = \sum_{m=0}^n \frac{\delta^{2r-m} (r+1/2)_m (n-1)!}{2^{r-m+1} (2r-m)! (m-r)!} \frac{[1+(-1)^{n-m}]}{(r-1)! (1/2)_{n-1/2} m!} \quad (3.4)$$

Итак, будем иметь

$$\frac{1}{p} \Phi = \frac{1}{p} \Phi \Big|_{\mu=0, \varepsilon=1} + \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \sum_{r=1}^n a_{rn\delta} \frac{\partial^r \Phi}{\partial \varepsilon^r} \Big|_{\mu=0, \varepsilon=1}$$

Поскольку параметр  $\varepsilon$  не зависит от  $p$ , достаточно найти оригинал для  $p^{-1} \Phi \Big|_{\mu=0}$ , а затем дифференцировать по  $\varepsilon$  результат.

Вычислим нулевой член ряда Тейлора и соответствующий оригинал

$$\Phi \Big|_{\mu=0} = \exp(-\eta \sqrt{P^2 + 2P\varepsilon}) = \exp(-\eta \sqrt{(P+\varepsilon)^2 - \varepsilon^2}) \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{p} \Phi \Big|_{\mu=0} = \frac{hc_2}{c_1^2} \frac{1}{P} \Phi(P) \Big|_{\mu=0} =$$

$$= \delta_0(\theta - \eta) \left\{ e^{-\varepsilon\eta} + \varepsilon\eta \int_{\eta}^{\theta} e^{-\varepsilon\xi} \frac{I_1(\varepsilon \sqrt{\xi^2 - \eta^2})}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} d\xi \right\}$$

символ  $\doteq$  означает соответствие по Лапласу,  $I_1$  — функция Бесселя мнимого аргумента индекс — единица. При нахождении последнего оригинала использовалось известное соотношение ([4]; формула 23.157)

$$\frac{\exp(-\eta \sqrt{p^2 - \varepsilon^2})}{\sqrt{p^2 - \varepsilon^2}} \doteq I_0(\varepsilon \sqrt{t^2 - \varepsilon^2}) \delta_0(t - \eta)$$

с последующим дифференцированием по  $\eta$  и применением элементарных теорем операционного исчисления о сдвиге по  $p$  и об изменении масштаба  $p$ .

Для нахождения следующих членов ряда Тейлора необходимо выполнить дифференцирование по  $\varepsilon$  оригинала из (3.2).

Используя рекуррентные формулы для цилиндрических функций, получаем

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{1}{p} \Phi \Big|_{\mu=0} \doteq -\eta e^{-\varepsilon\theta} I_0(\varepsilon \sqrt{\theta^2 - \eta^2})$$

где  $I_0$  — функция Бесселя мнимого аргумента нулевого индекса. Следовательно

$$\frac{\partial^r}{\partial \varepsilon^r} \frac{\Phi}{p} \Big|_{\mu=0} \doteq -\eta \frac{\partial^{r-1}}{\partial \varepsilon^{r-1}} [e^{-\varepsilon\theta} I_0(\varepsilon \sqrt{\theta^2 - \eta^2})]$$

Окончательно будем иметь

$$\frac{1}{p} \Phi \doteq \delta_0(\theta - \eta) \left( e^{-\eta} + \eta \int_{\eta}^{\theta} e^{-\varepsilon\xi} \frac{I_1(\sqrt{\xi^2 - \eta^2})}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} d\xi \right) - \eta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^n a_{rn\delta} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^{r-1}}{\partial \varepsilon^{r-1}} [e^{-\varepsilon(\theta - n\gamma)} I_0(\varepsilon \sqrt{(\theta - n\gamma)^2 - \eta^2})] \Big|_{\varepsilon=1} \delta_0(\theta - n\gamma - \eta)$$

Как видно из (3.3), в каждый момент времени  $\theta$  в двойной сумме отлично от нуля лишь конечное число слагаемых, так как  $\delta_0(\theta - n\gamma - \eta)$  равно нулю при достаточно больших значениях  $n$ . При желании можно было бы выписать в явной форме нормальные напряжения во всех ребрах, при не слишком больших временах  $\theta$ , используя (2.3), (3.1), (3.3). Фактически же вычисление напряжений по этим формулам осуществлялось на ЭВМ для  $N=6$ ,  $\gamma=1, 2, \dots, 16$ ,  $0 \leq \eta \leq \theta$ .

Программируя вычисления по формуле (3.3), нужно учесть следующее. При вычислении элементов  $a_{rnb}$  трехмерного массива может случиться, что некоторые выражения, стоящие под знаком факториала в знаменателе, становятся отрицательными. Такие факториалы, как следует из теории гамма-функции, равны  $\infty$ , поэтому соответствующие слагаемые в суммах следует считать равными нулю. При написании программы это учитывалось должным сужением пределов суммирования. Те слагаемые, в которых под знаком факториала появляется дробное число, равны нулю благодаря множителю  $(1+(-1)^{n-m})$ .

Наконец, операция взятия  $r$ -й производной по  $\varepsilon$  невыполнима для ЭВМ. Ниже приводится процесс, позволяющий находить нужные производные при помощи алгебраических действий, без применения операций предельного перехода.

Обозначим

$$q_r(\eta, \theta) = \frac{\partial^r}{\partial \varepsilon^r} [e^{-\varepsilon\theta} I_0(\varepsilon\sqrt{\theta^2 - \eta^2})]_{\varepsilon=1} \quad (3.4)$$

$$m_r(\eta, \theta) = \frac{\partial^r}{\partial \varepsilon^r} [e^{-\varepsilon\theta} I_1(\varepsilon\sqrt{\theta^2 - \eta^2})]_{\varepsilon=1}$$

получим

$$q_0(\eta, \theta) = e^{-\theta} I_0(\sqrt{\theta^2 - \eta^2}), \quad m_0(\eta, \theta) = e^{-\theta} I_1(\sqrt{\theta^2 - \eta^2})$$

Учитывая, что  $I_0' = I_1$ , имеем

$$\begin{aligned} q_r(\eta, \theta) &= \frac{\partial^{r-1}}{\partial \varepsilon^{r-1}} [e^{-\varepsilon\theta} \theta I_0(\varepsilon\sqrt{\theta^2 - \eta^2}) + e^{-\varepsilon\theta} \sqrt{\theta^2 - \eta^2} I_1(\varepsilon\sqrt{\theta^2 - \eta^2})]_{\varepsilon=1} = \\ &= -\theta q_{r-1} + \sqrt{\theta^2 - \eta^2} m_{r-1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Аналогичные выкладки дают

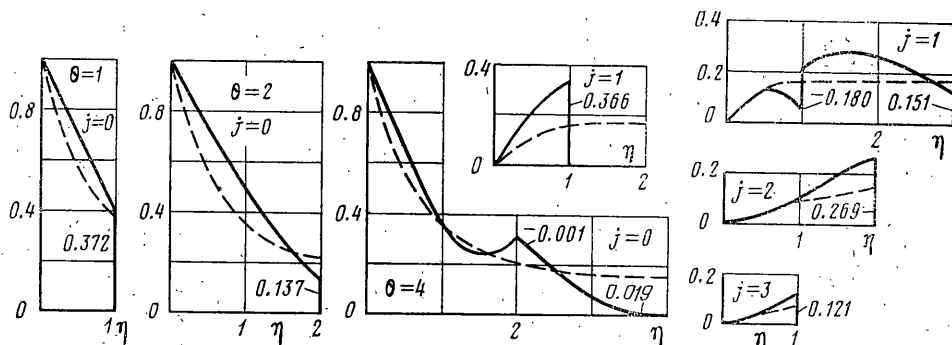
$$m_r(\eta, \theta) = -\theta m_{r-1} + \sqrt{\theta^2 - \eta^2} q_{r-1} - \sum_{l=0}^{r-1} \frac{(r-1)!}{l!} (-1)^{r-l-1} m_l \quad (3.6)$$

Теперь (3.3) примет окончательную форму, приспособленную для вычислений на ЭВМ

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \Phi &= \delta_0(\theta - \eta) \left\{ e^{-\eta} + \eta \int_{\eta}^{\theta} e^{-\xi} \frac{I_1(\sqrt{\xi^2 - \eta^2})}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} d\xi \right\} - \\ &- \eta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^n a_{nr} \delta q_{r-1}(\eta, \theta - n\gamma) \delta_0(\theta - n\gamma - \eta) \end{aligned}$$

причем  $a_{nr}$  вычисляются по формуле (3.1), а функции  $q_r$ ,  $m_r$  вычисляются при помощи рекуррентных формул (3.4), (3.5), (3.6).

4. На фиг. 1-3 сплошными линиями изображены графики распределения нормального безразмерного напряжения вдоль ребра, на котором приложена нагрузка ( $j=0$ ), и вдоль остальных ребер; причем ребро с номером  $j=3$  является диаметрально противоположным тому, где действует внешняя сила (число ребер  $N=6$ ). В моменты времени  $0 \leq \theta \leq 1$  волна нагрузки распространяется вдоль ребра с номером  $j=0$ , приводя в движение соединенные с ним панели.



Фиг. 1

Из-за излучения волн в стороны напряжение является убывающей функцией координаты  $\eta$ , в отличие от случая изолированного ребра. Распределение напряжения определяется формулой

$$\frac{\sigma_0(\eta, \theta)}{Q} = \delta_0(\theta - \eta) \left\{ e^{-\eta} + \eta \int_{\eta}^{\theta} e^{-\xi} \frac{I_1(\sqrt{\xi^2 - \eta^2})}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} d\xi \right\} \quad (4.1)$$

На фронте волны ( $\eta = \theta$ ) напряжение равно  $Qe^{-\theta}$  и, следовательно, довольно быстро затухает по мере проникания волны в глубь конструкций. На остальных ребрах в это время напряжения отсутствуют, так как до них еще не дошла волна сдвига, излучаемая нулевым ребром. Напряжения в нулевом ребре описываются формулой (4.1) вплоть до  $\theta = 2$ , когда от ближайших соседних ребер приходят отраженные волны; но и в последующие моменты времени (4.1) описывает распределение напряжений в области, прилегающей к фронту волны, а именно при  $\theta - 2\gamma < \eta < \theta$ , так как все прочие слагаемые в (3.3) исчезают (ибо  $\delta_0(x) = 0$  при  $x \leq 0$ ).

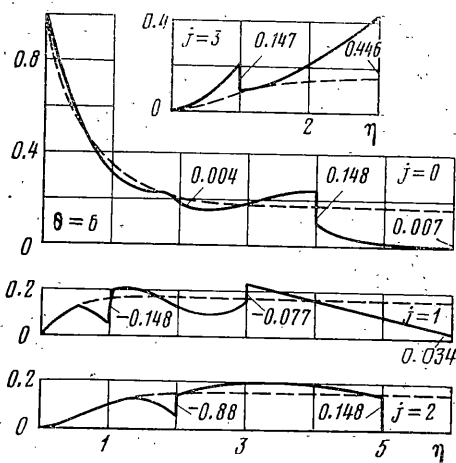
В моменты времени  $1 < \theta < 2$  возникают напряжения в первом ребре, а остальные ребра пока не нагружены. Дальнейшее развитие процесса видно из остальных графиков. При каждом приходе волны сдвига от соседних ребер на графике появляется скачок, который продвигается вдоль по стержню со скоростью продольной волны  $c_1$  (величины скачков указаны на графиках). При беспредельном удалении от начала координат величины скачков стремятся к нулю, но, вообще говоря, не монотонно, так как из рекуррентных формул (3.4)–(3.6) видно, что

$$q_r(\theta - n, \theta - n) = (n - \theta)^r e^{-(r+1)(\theta - n)}$$

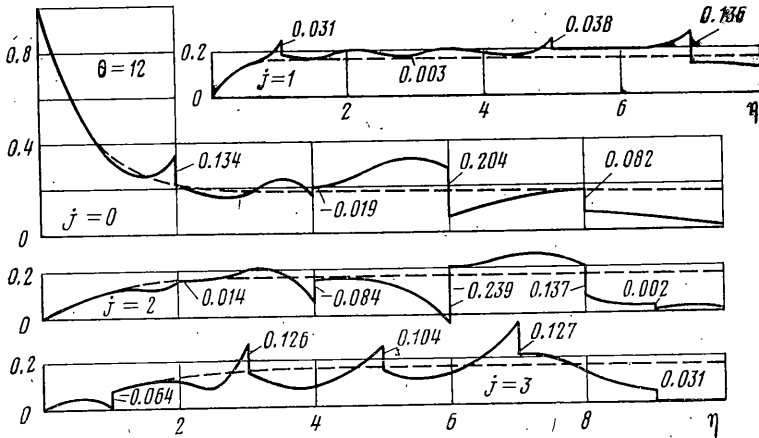
где  $n = 0, 1, \dots$  — номера скачков.

На первый взгляд, появление разрывов в нормальном напряжении при падении волны сдвига на ребро жесткости невозможно, так как ограниченная (хотя бы даже и разрывная) внешняя нагрузка, казалось бы, должна приводить к непрерывным напряжениям. Это, однако, не верно в том случае, если внешняя разрывная нагрузка сама движется вдоль стержня со скоростью продольной волны  $c_1$ . Именно такой (резонансный) случай и имеет место в рассматриваемой задаче (волна сдвига излучается за счет продольного волнового процесса в соседних ребрах, а такой процесс распространяется со скоростью  $c_1$ ).

На основании известной теоремы операционного исчисления о предельном значении ([2], гл. VI) можно показать, что нормальные напряжения в ребрах жесткости при  $t \rightarrow \infty$  могут стремиться только к решению статической задачи о равновесии рассматриваемой оболочки при условии, что на бесконечности все ребра на-



Фиг. 2



Фиг. 3

гружены одинаковым напряжением  $\sigma_j = Q/N$ . Это решение изображено на фиг. 1–3 пунктирными линиями (для случая  $N=6$ ). Однако существование предела остается невыясненным. По-видимому, стремление к этим предельным статическим напряжениям имеет место. В пользу этого утверждения свидетельствует пример изолированного полубесконечного стержня, нагруженного постоянной силой на торце ( $\lim \sigma/Q=1$ ), а также наличие предела при  $\theta \rightarrow \infty$  у выражения (4.1) (изолированный стержень, соединенный с бесконечно протяженными панелями).

Существование предела (4.1) следует из асимптотической формулы

$$I_1(\sqrt{\xi^2 - \eta^2}) \sim \exp(\sqrt{\xi^2 - \eta^2}) / (\xi^2 - \eta^2)^{1/4}$$

Она гарантирует сходимость интеграла. Так как (4.1) – это оригинал для

$$\frac{1}{p} \Phi|_{\mu=0} = \frac{1}{p} \exp(-\eta\sqrt{p^2 + 2p})$$

то предел (4.1) при  $\theta \rightarrow \infty$  по упомянутой выше теореме операционного исчисления равен

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \left[ \frac{1}{p} \exp(-\eta\sqrt{p^2 + 2p}) \right] = 1$$

Итак, будем иметь

$$e^{-\eta} + \eta \int_{\eta}^{\infty} e^{-\xi} \frac{I_1(\sqrt{\xi^2 - \eta^2})}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} d\xi = 1$$

В результате получим следующую формулу для интеграла:

$$\int_{\eta}^{\infty} e^{-\xi} \frac{I_1(\sqrt{\xi^2 - \eta^2})}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} d\xi = \int_0^{\infty} I_1(\xi) \frac{\exp(-\sqrt{\xi^2 + \eta^2})}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} d\xi = \frac{1 - e^{-\eta}}{\eta}$$

Поступила 4 I 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов А. М. Динамика однонаправленного стеклопластика. ПМТФ, 1974, № 4.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1965.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
4. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., «Высшая школа», 1965.