МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1979

УДК 539.3:534.1

НАЧАЛЬНОЕ ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

В. И. БАБЕНКО

(Харьков)

Излагается метод построения асимптотических представлений для критической нагрузки P_* и для форм равновесия в начальной послекритической стадии развертывающихся оболочек при внешнем давлении P. Метод иллюстрируется при исследовании потери устойчивости замкнутой цилиндрической оболочки строго выпуклого поперечного сечения. Оболочка считается достаточно тонкой, средней длины, линейно-упругой и шарнирно-опертой вдоль края ∂F.

По существу, предлагаемый метод подобен [1]. Его основу составляют известные результаты скоростной киносъемки процесса потери устойчивости (выпучивания) цилиндрической оболочки [2].

Предполагается, что форма равновесия в начальной послекритической стадии развертывающейся оболочки при внешнем давлении существенно отличается от докритической (близкой к безмоментной) лишь в малой окрестности некоторой образующей γ срединной поверхности F рассматриваемой оболочки (выпучивание начинается с образования одной вмятины, вытянутой вдоль γ). Таким образом, при данном подходе задачи об определении критической нагрузки и об описании периодичности строения послекритических деформаций цилиндрических оболочек считаются несвязанными и рассматриваются независимо одна от другой в отличие от классического подхода и метода игнорирования форм В. З. Власова [2].

1. За исходные берутся нелинейные уравнения теории «среднего изгиба» пологих оболочек [2] в следующей безразмерной форме:

$$\begin{gathered}\varepsilon^2\Delta\Delta W+\frac{1}{r(x_2)}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2}-\varepsilon L[\Psi,W]=-p\\ \varepsilon^2\Delta\Delta\Psi-\frac{1}{r(x_2)}\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}+\frac{1}{2}\varepsilon L[W,W]=0\end{gathered}\qquad(1.1)$$

$$\Psi=\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}=W=\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}=0 \text{ на } \partial F$$

$$L[W,\Psi]=\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_2^2}-2\frac{\partial^2 W}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2}$$

$$\varepsilon^2=\frac{\delta R}{L^2\sqrt{12(1-\nu^2)}}\qquad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\qquad P=p\frac{E\varepsilon}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}\left(\frac{\delta}{R}\right)^2$$

где $\Psi E\varepsilon^3\delta L^4R^{-2}$ – функция усилий; $W\varepsilon L^2R^{-1}$ – нормальный прогиб; E,ν – модуль Юнга, коэффициент Пуассона материала оболочки; δ – толщина оболочки; L – длина образующей F; на срединной поверхности F введена ортогональная криволинейная система координат (Lx_1, Lx_2), которая переходит в декартову при разворачивании F на плоскость; за линии x_1 взяты образующие F; линии $x_1=\pm{}^1/_2$ совпадают с краем ∂F; линия $x_2=0$ совмещена с γ-образующей F, в окрестности которой по предположению локализуются значительные послекритические деформации; $Rr(x_2)>0$ – радиус кривизны поперечного сечения F, а R – его наибольшее значение; $\max r(x_2)=1$, $\varepsilon\ll1$, $r(x_2)\sim1$, $RL^{-1}\gg\varepsilon^{1/2}$.

Асимптотическое представление решения системы (1.1) по малому параметру относительной тонкостенности ε производится следующим образом. Разобъем F на две области F_i $(i=1, 2)$, каждую из которых в свою очередь разобьем на две подобласти $F_{i\beta}$ $(\beta=1, 2)$ так, что

$$F_1=\{|x_2|\leqslant\varepsilon^{\mu/2}\},\ F_2=F\diagdown F_1,\ F_{i2}=F_i\diagdown\{|x_1|\leqslant{}^1/_2-\varepsilon^{\mu}\}$$
$$F_{i1}=F_i\diagdown F_{i2}\quad (0<\mu<1)$$

Введем вектор-функцию $U=(W, \Psi)$. В каждой из областей $F_{i\beta}$ построим асимптотическое представление для U в виде ряда по $\varepsilon^{1/2}$ $(\delta_1^2=0, \delta_2^2=1)$:

$$U=\sum_{k=0}\varepsilon^{k/2}(U_{i1}^k+\delta_\beta^2U_{i2}^k),\quad U_{11}^k(x_1, \xi_2)$$
$$U_{12}^k(\xi_1, \xi_2),\ U_{21}^k(x_1, x_2),\ U_{22}^k(\xi_1, x_2) \tag{1.2}$$
$$\xi_1=({}^1/_2-|x_1|)\varepsilon^{-1},\ \xi_2=x_2\varepsilon^{-1/2}$$

Вектор-функции $U_{i1}^k(W_{i1}^k, \Psi_{i1}^k)$ и $U_{i2}^k(W_{i2}^k, \Psi_{i2}^k)$ являются решениями уравнений k-го приближения, получаемых в F_i из системы (1.1), записанной в соответствующих координатах при помощи итерационных процессов метода М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [3] подобно тому, как это делалось в [1]. Дополнительные условия, необходимые для однозначного определения функций $U_{i\beta}^k$, получаем из условия сращивания [3] частичных сумм ряда (1.2), построенных в областях F_1 и F_2, на общих границах последних.

В основном приближении $(k=0)$ находим $U_{12}^0=U_{22}^0=W_{21}^0\equiv0$, $\Psi_{21}^0=-p_0r(x_2)[x_1^2/2-{}^1/_8]$, $p_0=p|_{\varepsilon=0}$.

Функция U_{11}^0 определяется из решения следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial^4W_{11}^\circ}{\partial\xi_2^4}+\frac{1}{r(0)}\frac{\partial^2\Psi_{11}^\circ}{\partial x_1^2}-L[W_{11}^\circ, \Psi_{11}^\circ]=-p_0 \tag{1.3}$$
$$\frac{\partial^4\Psi_{11}^\circ}{\partial\xi_2^4}-\frac{1}{r(0)}\frac{\partial^2W_{11}^\circ}{\partial x_1^2}+\frac{1}{2}L[W_{11}^\circ, W_{11}^\circ]=0$$
$$W_{11}^0|_{|x_1|=1/2}=\Psi_{11}^0|_{|x_1|=1/2}=0,\ U_{11}^0|_{|\xi_2|=\infty}=U_{21}^0|_{x_2=0}$$

Система (1.3) имеет тривиальное решение $U_{11}^0=U_{21}^0|_{x_2=0}$, описывающее докритические деформации. Послекритическим деформациям соответствуют нетривиальные решения системы (1.3), близкие к тривиальным. Основная асимптотика критического давления p_* определяется наименьшим значением p_0, в окрестности которого существует нетривиальное решение системы (1.3), близкое к $U_{21}^0|_{x_2=0}$. Линеаризуя в окрестности последнего (1.3), определяем p_* как наименьшее значение p_0, при котором имеет тождественно не равное нулю решение линеаризованная система (1.3) с ослабленным условием сращивания: $U_{11}^0|_{|\xi_2|=\infty}<\infty$. Решая линеаризованную систему методом разделения переменных, находим

$$p_*=4\pi3^{-3/4},\ W_{11}^\circ=-\sqrt{3}\Psi_{11}^\circ=\rho^\circ\cos\pi x_1\cos[\omega(\xi_2+\xi_2^\circ)]$$
$$\omega^2=\pi3^{1/4};\ \rho^\circ,\ \xi_2^\circ\equiv\mathrm{const} \tag{1.4}$$

Тогда P_* будет определяться по известной формуле П. Ф. Папковича [2].

2. Переходим к построению асимптотического представления нетривиального решения системы (1.3), вырождающегося в (1.4) при $p_0\to p_*$.

Перепишем систему (1.3) в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
3\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-4(1-\beta^q)\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}+\beta^h L[\psi, w]=0\\
\frac{\partial^4\psi}{\partial \xi^4}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-\frac{1}{2}\beta^h L[w, w]=0\\
w=\psi=0 \text{ при } |z|=\pi/2 \text{ и при } \xi=\infty\\
\frac{\partial w}{\partial \xi}=\frac{\partial \psi}{\partial \xi}=\frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3}=\frac{\partial^3\psi}{\partial \xi^3}=0 \text{ при } \xi=0\\
w=\omega^2\beta^{-h}W_{11}{}^\circ,\ \psi=-\omega^2\sqrt{3}\beta^{-h}(\Psi_{11}{}^\circ-\Psi_{21}{}^\circ|_{x_2=0})\\
\xi=\omega\xi_2,\ z=x_1\pi,\ \varepsilon\ll\beta^q\equiv 1-p_0/p_*\ll 1
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

Предполагается, что искомое решение $u=(w, \psi)$ есть четная вектор-функция по переменным ξ и z, поэтому решение строится в полуполосе $\xi\geqslant 0$, $|z|\leqslant\pi/2$; h и q — целочисленные постоянные, подлежащие определению: q определяет порядок близости к p_* нагрузки p_0, при которой строится нетривиальное решение $u(\xi, z)$, описывающее начальные послекритические деформации оболочки в области вмятины; порядок близости искомого решения к тривиальному (докритическому) определяет постоянная h. Построение асимптотических разложений $u(\xi, z)$ по малому параметру β производилось так.

При интегрировании (2.1) по ξ используется идея двухмасштабных разложений [3]. Искомое решение представляется в виде ряда

$$
u(\xi, z)\sim\sum_{k=0}\beta^k u_k(s, \varphi, z),\qquad s=\beta\xi,\qquad \varphi=\left(1+\sum_{i=0}\beta^i\varphi_i\right)\xi \tag{2.2}
$$

где φ_i — постоянные, подлежащие определению.

Подставляя (2.2) в уравнения (2.1) и приравнивая в них коэффициенты при одинаковых степенях β, получим для определения w_k, ψ_k цепочку линейных неоднородных краевых задач A_k с дифференциальными уравнениями в частных производных по независимым переменным φ, z, для интегрирования которых по z применяется метод Бубнова — Галеркина, причем за координатные берутся функции $Z_\lambda(z)=\sqrt{2/\pi}\cos(2\lambda-1)z$. Представляя вектор-функции $u_k(w_k, \psi_k)$ в виде рядов

$$
u_k(s, \varphi, z)=\sum_{\lambda=1}^{\infty}u_{k\lambda}(s, \varphi)Z(z) \tag{2.3}
$$

и применяя к A_k процедуру метода Бубнова — Галеркина, для $u_{k\lambda}(w_{k\lambda}, \psi_{k\lambda})$ получаем цепочку линейных неоднородных краевых задач

$$
\begin{gathered}
3\frac{\partial^4 w_{k\lambda}}{\partial\varphi^4}+(2\lambda-1)^2\psi_{k\lambda}+4\frac{\partial^2 w_{k\lambda}}{\partial\varphi^2}=W_{k\lambda}\\
\frac{\partial^4\psi_{k\lambda}}{\partial\varphi^4}-(2\lambda-1)^2 w_{k\lambda}=\Psi_{k\lambda}
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

с краевыми условиями

$$
\begin{gathered}
w_{k\lambda}|_{s=\infty}=\psi_{k\lambda}|_{s=\infty}=0\\
\frac{\partial^3 w_{k\lambda}}{\partial\omega^3}+\sum_{l+r=k}\partial_{l3}w_{r\lambda}=\frac{\partial^3\psi_{k\lambda}}{\partial\omega^3}+\sum_{l+r=k}\partial_{l3}\psi_{r\lambda}=0
\end{gathered}
$$

$$\frac{\partial w_{k\lambda}}{\partial\varphi}+\sum_{l+r=k}\partial_{l1}w_{r\lambda}=\frac{\partial\psi_{k\lambda}}{\partial\varphi}+\sum_{l+r=k}\partial_{l1}\psi_{r\lambda}=0 \quad \text{при} \quad s=0$$

$$W_{k\lambda}=-\left\{\sum_{l+r=k}[3\partial_{l4}+4\partial_{l2}-4\partial_{(l-q)2}]w_{r\lambda}-4\frac{\partial^2 w_{(k-q)\lambda}}{\partial\varphi^2}+\sum_{h+f+l+r=k}L_{f\lambda}[w_l,\psi_r]\right\}$$

$$\Psi_{k\lambda}=-\left\{\sum_{l+r=k}\partial_{l4}\psi_{r\lambda}-\frac{1}{2}\sum_{h+j+l+r=k}L_{f\lambda}[w_l,w_r]\right\}$$

$$L_{0\lambda}[w_l,\psi_r]=Z_{\lambda\mu\nu''}\frac{\partial^2 w_{l\mu}}{\partial\varphi^2}\psi_{r\nu}-2Z_{\lambda\mu'\nu'}\frac{\partial w_{l\mu}}{\partial\varphi}\frac{\partial\psi_{r\nu}}{\partial\varphi}+Z_{\lambda\mu''\nu}w_{l\mu}\frac{\partial^2\psi_{r\nu}}{\partial\varphi^2}$$

$$L_{i\lambda}[w_l,\psi_r]=Z_{\lambda\mu\nu''}\partial_{i2}w_{l\mu}\psi_{r\nu}+Z_{\lambda\mu''\nu}w_{l\mu}\partial_{i2}\psi_{r\nu}-2Z_{\lambda\mu'\nu'}\left[\frac{\partial w_{l\mu}}{\partial\varphi}\partial_{i1}\psi_{r\nu}+\right.$$

$$\left.+\partial_{i1}w_{l\mu}\frac{\partial\psi_{r\nu}}{\partial\varphi}+\sum_{\varkappa+j=i}\partial_{\varkappa1}w_{l\mu}\partial_{j1}\psi_{r\nu}\right] \quad (i\geqslant 1)$$

$$Z_{\lambda\mu\nu''}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}Z_\lambda Z_\mu Z_\nu''\,dz=-(2\nu-1)^2 Z_{\lambda\mu\nu}$$

$$Z_{\lambda\mu''\nu}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}Z_\lambda Z_\mu'' Z_\nu\,dz=-(2\mu-1)^2 Z_{\lambda\mu\nu}$$

$$Z_{\lambda\mu\nu}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}Z_\lambda Z_\mu Z_\nu\,dz, \qquad Z_{\lambda\mu'\nu'}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}Z_\lambda Z_\mu' Z_\nu'\,dz$$

$$\partial_{11}=\frac{\partial}{\partial s}, \qquad \partial_{j1}=\varphi_j\frac{\partial}{\partial\varphi} \quad (j\geqslant 2)$$

$$\partial_{i2}=2\partial_{i1}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\sum_{m+n=i}\partial_{m1}\partial_{n1}$$

$$\partial_{i3}=\partial_{i2}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\partial_{i1}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\sum_{p+q=i}\partial_{p1}\partial_{q2}$$

$$\partial_{i4}=2\partial_{i2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\sum_{p+q=i}\partial_{p2}\partial_{q2} \quad (i\geqslant 1)$$

$$\frac{\partial^n}{\partial s^n}=\frac{\partial^n}{\partial\varphi^n}+\sum_{i=1}\beta^i\partial_{in} \quad (n=1,2,3,4)$$

Построение асимптотических представлений начнем с основного приближения. Решение однородных уравнений системы (2.4) обозначим через $u_{k\lambda}^{(+)}=(\psi_{k\lambda}^{(+)},w_{k\lambda}^{(+)})$:

$$w_{k\lambda}^{(+)}=\sum_{l=1}^{4}w_{k\lambda}{}^l e^{\omega_{\lambda l}\varphi}, \qquad \psi_{k\lambda}^{(+)}=\sum_{l=1}^{4}\psi_{k\lambda}{}^l e^{\omega_{\lambda l}\varphi}$$

$$\psi_{k\lambda}{}^{l}(s)=\frac{(2\lambda-1)^2}{\omega_{\lambda l}{}^4}w_{k\lambda}{}^{l}(s) \qquad (l=1,2,3,4) \tag{2.5}$$

где $w_{k\lambda}{}^{l}(s)$ — функции, подлежащие определению; $\omega_{\lambda l}$ — корни характеристического уравнения однородной системы (2.4):

$$3\omega^8+4\omega^6+(2\lambda-1)^4=0$$

При $\lambda=1$ это уравнение имеет два двукратных мнимых корня $\pm i$, остальные корни при $\lambda=1$ и $\lambda>1$ — комплексные с $\operatorname{Re}\omega\neq 0$. Полагаем $\omega_{11}=i$, $\omega_{12}=-i$; остальные корни при $\lambda=1$ и при каждом $\lambda>1$ выбираем так, чтобы $\operatorname{Re}\omega_{\lambda l}<0$.

Каждая из задач $A_{0\lambda}$ — однородная, ее решение определяется формулами (2.5): $u_{0\lambda}=u_{0\lambda}^{(+)}$. Краевые условия в (2.4) приводятся к следующим:

$$w_{01}{}^{1}(0)=w_{01}{}^{2}(0),\quad w_{01}{}^{1}(\infty)=w_{01}{}^{2}(\infty)$$

$$w_{0\lambda}{}^{l}(0)=0 \text{ при } \lambda=1 \;(l=3,4) \text{ и } \lambda>1 \;(l=1-4) \tag{2.6}$$

Пусть зависимость некоторой функции $f(s,\varphi)$ от φ представляется в виде ряда

$$f(s,\varphi)=\sum_{m,n,\mu,\nu,i,k} f_{\mu\nu ik}^{mn}(s)\,e^{(m\omega_{\mu i}+n\omega_{\nu i})\varphi} \tag{2.7}$$

Выделим из (2.7) все слагаемые, зависимость которых от φ выражается экспонентой $e^{\omega_{\lambda l}\varphi}$, обозначим их $f^{\{+\lambda l\}}$:

$$f^{\{+\lambda l\}}=f_{\lambda l}(s)\,e^{\omega_{\lambda l}\varphi},\qquad f^{\{+\lambda\}}=\sum_{l}f^{\{+\lambda l\}} \tag{2.8}$$

$$f^{\{-\lambda l\}}=f-f^{\{+\lambda l\}},\quad f^{\{-\lambda\}}=f-f^{\{+\lambda\}}$$

Решения $u_{0\lambda}$, $W_{1\lambda}$, $\Psi_{1\lambda}$ представляют собой ряды типа (2.7). Аналогичные представления будут и для $W_{k\lambda}$, $\Psi_{k\lambda}$ $(k>1)$, если $u_{i\lambda}$ $(i<k)$ имеет вид (2.7). В дальнейшем будем строить искомые решения $u_{i\lambda}$ в виде рядов (2.7).

Разобьем общее решение $u_{k\lambda}$ системы (2.4) на три части $u_{k\lambda}=u_{k\lambda}^{(+)}+u_{k\lambda}^{[+]}+u_{k\lambda}^{\{-\lambda\}}$, где $u_{k\lambda}^{[+]}$ — частное решение, соответствующее слагаемым $W_{k\lambda}^{\{+\lambda\}}$, $\Psi_{k\lambda}^{\{+\lambda\}}$. Потребуем, чтобы $u_{k\lambda}^{(+)}$ имело вид (2.8.1), т. е. чтобы оно не содержало «секулярных» членов. Для этого необходимо, чтобы $(W_{k\lambda}, \Psi_{k\lambda})$ удовлетворяли следующим четырем условиям:

$$\Psi_{k\lambda}^{\{+\lambda l\}}=W_{k\lambda}^{\{+\lambda l\}}\omega_{\lambda l}{}^4/(2\lambda-1)^2 \qquad (l=1,2,3,4) \tag{2.9}$$

Эти уравнения вместе с граничными условиями из (2.4) определяют $w_{k\lambda}^{l}(s)$. Слагаемое $u_{k\lambda}^{[+]}$ определяется с точностью до решений однородных уравнений. Для определенности полагаем $w_{k\lambda}^{[+]}(s)\equiv 0$, тогда

$$\psi_{k\lambda}^{[+]}=\sum_{l=1}\frac{1}{\omega_{\lambda l}{}^4}\Psi_{k\lambda}^{\{+\lambda l\}} \tag{2.10}$$

Слагаемое $u_{k\lambda}^{[-\lambda]}$ — частные решения системы

$$3\frac{\partial^4 w_{k\lambda}^{\{-\lambda\}}}{\partial\varphi^4}+(2\lambda-1)^2\psi_{k\lambda}^{\{-\lambda\}}+4\frac{\partial^2 w_{k\lambda}^{\{-\lambda\}}}{\partial\varphi^2}=W_{k\lambda}^{\{-\lambda\}}$$

$$\frac{\partial^4\psi_{k\lambda}^{\{-\lambda\}}}{\partial\varphi^4}-(2\lambda-1)^2 w_{k\lambda}^{\{-\lambda\}}=\Psi_{k\lambda}^{\{-\lambda\}} \tag{2.11}$$

Выпишем решения уравнений задач $A_{1\lambda}$. Условия (2.9) при $k=1$ сводятся к следующей системе:

$$6(\omega_{\lambda l}^2+1)\frac{\partial w_{0\lambda}^l}{\partial s}=\delta_1^q\omega_{\lambda l}w_{0\lambda}^l \qquad (l=1,2,3,4)$$

где $\delta_m^n=1$ при $m=n$ и $\delta_m^n=0$ при $m\neq n$. С граничными условиями (2.6) данная система имеет тождественно не равное нулю решение только тогда, когда $q>1$; при этом все функции $w_{0\lambda}^l\equiv0$, кроме w_{01}^1 и w_{01}^2, которые остаются пока не определенными. Далее из уравнений (2.4), (2.9)—(2.11) последовательно находим

$$\psi_{1\lambda}^{[+]}=\delta_1^\lambda\sum_{l=1,2}4\omega_{1l}\frac{dw_{01}^l}{ds}e^{\omega_{1l}\varphi}$$

$$u_{1\lambda}^{\{-\lambda\}}=\delta_1^h\{u_{1\lambda0}w_{01}^1w_{01}^2+u_{1\lambda2}[(w_{01}^1)^2e^{2i\varphi}+(w_{01}^2)^2e^{-2i\varphi}]\}$$

$$w_{1\lambda}^l(0)=0 \text{ при } \lambda=1 \ (l=3,4) \text{ и } \lambda>1 \ (l=1-4)$$

$$w_{11}^1(0)=w_{11}^2(0),\qquad \left(\frac{dw_{01}^1}{ds}+\frac{dw_{01}^2}{ds}\right)\bigg|_{s=0}=0 \tag{2.12}$$

$$u_{h\lambda m}=(w_{h\lambda m},\psi_{h\lambda m}),\qquad u_{1\lambda}^{\{-\lambda\}}=(w_{1\lambda}^{\{-\lambda\}},\psi_{1\lambda}^{\{-\lambda\}})$$

$$w_{1\lambda0}=\frac12\psi_{1\lambda0}=-\frac{2\pi_\lambda}{(2\lambda+1)(2\lambda-3)},\qquad \pi_\lambda=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2}\frac{2(-1)^\lambda}{2\lambda-1}$$

$$w_{1\lambda2}=\pi_\lambda\frac{(2\lambda-1)^2+32}{(2\lambda-1)^4+512},\qquad \psi_{1\lambda2}=2\pi_\lambda\frac{(2\lambda-1)^2-16}{(2\lambda-1)^4+512}$$

Рассмотрим краевые задачи $A_{2\lambda}$. Условия (2.9) и первое условие из (2.12) дают

$$w_{1\lambda}^l(s)\equiv0 \text{ при } \lambda=1 \ (l=3,4) \text{ и при } \lambda>1 \ (l=1-4)$$

$$\left[-24\frac{d^2}{ds^2}+\delta_2^q-\delta_1^h4L_{01}'w_{01}^1w_{01}^2\right]w_{01}^l=0,\qquad L_{01}'\cong0.6833 \qquad (l=1,2)$$

Данная система с первым и третьим условиями из (2.6) и третьим условием из (2.12) имеет тождественно не равное нулю решение, если $q=2$, $h=1$. Считая, что эти равенства имеют место, находим $w_{01}^1=w_{01}^2=\rho/2$, где $\rho(s)$ — решение краевой задачи

$$\rho_0''+(-1+2\rho_0^2)\rho_0=0,\quad \rho_0'(0)=\rho_0(\infty)=0$$

$$\rho(s)=\rho(0)\rho_0(x),\quad x=s/\sqrt6,\quad d/dx(\ )=(\ )',\quad \rho(0)=-\sqrt{8/L_{01}'}=-3.421$$

Из последних уравнений получаем $\rho_0(x)=1/\mathrm{ch}\,x$.

На этом заканчивается построение асимптотического представления в основном — нулевом приближении.

Отыскивая последовательно решения уравнений задач $A_{2\lambda}$, $A_{3\lambda}$, приходим к следующему выражению для асимптотического представления $u_{(1)}(\xi, z)$ в первом приближении:

$$u(\xi, z)\sim u_{(1)}(\xi, z)\equiv u_{011}\rho\cos\varphi Z_1+\beta\left[u_{111}\frac{d\rho}{ds}\sin\varphi Z_1+\right.$$

$$\left.+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{\rho^2}{4}(u_{1\lambda 0}+2u_{1\lambda 2}\cos 2\varphi)Z_\lambda\right] \qquad (2.13)$$

$$\psi_{111}=w_{111}-4, \quad \varphi=\left(1-\frac{7}{36}\beta^2\right)\xi, \quad w_{011}=\psi_{011}=1$$

$$w_{111}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{9\rho^2(0)}{4\pi^3}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(16\frac{(2\nu-1)^2+32}{(2\nu-1)[(2\nu-1)^4+512]}\right)^3\right]=-0.0209$$

Основное приближение (1.4) решения (2.13) по форме совпадает с классическим решением в случае круговых цилиндрических оболочек. Предельной (при $\beta\ll 1$) частоте осцилляции по x_2 решения (1.4) $\omega^{1/2}/(L\varepsilon^{1/2})$ в классическом решении соответствует величина n/R, где параметр волнообразования n считается целочисленным. В данном случае подобного условия нет.

Методом математической индукции устанавливаются следующие утверждения о свойствах асимптотических представлений $u_k(\xi, z)$ искомых решений $u(\xi, z)$ в k-м ($1<k<K$) приближении. Решения $u_{k\lambda}(s, \varphi)$, $W_{k\lambda}(s, \varphi)$, $\Psi_{k\lambda}(s, \varphi)$ — четные функции по переменной ξ, их зависимость от φ представляется в виде конечных рядов типа (2.7) с $n=0$, $\mu=1$ ($i=1, 2$), т. е. конечных тригонометрических рядов. Ряды (2.3) сходятся абсолютно.

Структура уравнений и их решений задач $A_{K\lambda}$, $A_{(K+1)\lambda}$, $A_{(K+2)\lambda}$ K-го приближения такова:

$$w_{K\lambda}{}^l\equiv 0 \text{ при } \lambda=1 \ {}_{(l=3,4)} \text{ и } \lambda>1 \ {}_{(l=1-4)}$$

$$\psi_{(K+1)\lambda}^{[+]}=\delta_1^\lambda\left[\sum_{l=1,2}4\omega_{1l}\frac{dw_{K1}{}^l}{ds}-2\rho\varphi_{K+1}+(*)\right]e^{\omega_{1l}\varphi}$$

$$u_{(K+1)\lambda}^{\{-\lambda\}}=\rho\left[u_{1\lambda 0}\frac{\rho_K}{2}+u_{1\lambda 2}(w_{K1}{}^1e^{2i\varphi}+w_{K1}{}^2e^{-2i\varphi})\right]+(*)$$

$$\rho_K=w_{K1}{}^1+w_{K1}{}^2, \quad r_K=w_{K1}{}^1-w_{K1}{}^2$$

где $\rho_K(x)$ и $r_K(x)$ — решения следующих краевых задач:

$$\rho_K''+(-1+6\rho_0^2)\rho_K=(*), \quad \rho_K'(0)=\rho_K(\infty)=0$$

$$r_K''+(-1+2\rho^2)r_K=2\sqrt{6}\rho_0'\varphi_{K+1}+(*), \quad r_K(0)=r_K(\infty)=0 \qquad (2.14)$$

Решение систем (2.14) представимо в виде

$$\rho_K=\rho_0'(x)F_K'(0)+F_K(x), \quad r_K=-\rho_0(x)\Phi_K(0)+\Phi_K(x)$$

Здесь символом (*) обозначены слагаемые, которые не содержат искомых функций K-го приближения и выражаются только через функции, найденные в предыдущем приближении; ρ_K и r_K — погранслойные функции. При необходимости скорость их убывания при $x\to\infty$ можно усилить соответствующим выбором константы φ_{K+1}. Так, при $K=1$ величина $\rho_1=0$ и, полагая $\varphi_2=-{}^7/_{36}$, находим, что $r_1=w_{111}\rho'$. Функции F_K и Φ_K — частные решения системы (2.14). Запишем систему (2.1) в операторной форме $Au=0$, тогда $Au_{(K)}=B\beta^{K+1}$, причем $\lim\limits_{\beta\to 0}|B|<\infty$.

Полученное выше асимптотическое представление (2.13) приводит к следующим асимптотическим зависимостям изменения объема:

$$\Delta V=-\varepsilon L^4R^{-1}\iint\limits_{(F)} W\,dx_1\,dx_2$$

и максимального прогиба $W^\circ=\varepsilon L^2R^{-1}\max W$ от действующего на оболочку давления P в начальном послекритическом равновесном состоянии

$$\Delta V=0.346L^4R^{-1}\varepsilon^{3/2}[\beta+O(\beta^3,\ \varepsilon^{1/2})],\quad W^\circ=0.660L^2R^{-1}\varepsilon[\beta+O(\beta^2,\ \varepsilon^{1/2})]$$

Полученная зависимость «максимальный прогиб — давление» качественно согласуется с выводами теории В. Т. Койтера [4].

Поступила 24 XI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабенко В. И.* Асимптотическое представление решений уравнений теории непологих оболочек при нагрузках, близких к критическим. Математическая физика и функциональный анализ, вып. 5. Харьков, 1974.
2. *Григолюк Э. И., Кабанов В. В.* Устойчивость круговых цилиндрических оболочек. Итоги науки. Сер. Механика. Механика твердых деформируемых тел, 1967. М., ВИНИТИ, 1969.
3. *Найфэ А. Х.* Метод возмущений. М., «Мир», 1976.
4. *Budiansky B., Amazigo J. C.* Initial post-buckling behavoir of cylindrical shells under external pressure. J. Math. and Phys. 1968, vol. 47, No. 3, p. 223–235.