

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ОРТОТРОПНЫХ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН

А. Н. УЛЬЯШИНА

(Москва)

Использование классической теории пластин, основанной на гипотезе жесткой нормали, предусматривающей неограниченную трансверсальную жесткость, для расчета ортотропных слоистых пластин может привести к существенным погрешностям.

Указанное обстоятельство вызывает необходимость построения уточненных теорий с привлечением гипотез менее жестких, чем гипотезы Кирхгофа-Лява, и позволяющих учесть поперечные сдвиговые и нормальную деформации [1-5].

В случае пластин, выполненных из большого числа слоев, представляется целесообразным построение уточненной теории, основанной на гипотезах, вводимых для всего пакета, и позволяющей получить систему уравнений ограниченного порядка. Теории такого рода сформулированы в основном для однородных пластин и оболочек и учитывают, как правило, деформации поперечного сдвига [6-9].

В настоящей работе сформулирована уточненная теория ортотропных слоистых пластин, учитывающая поперечные сдвиговые и нормальную деформации.

1. Выпишем основные соотношения теории упругости в декартовой системе координат x, y, z .

Уравнения равновесия элемента пластины имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Деформации пластины определяются равенствами

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Свяжем напряжения с деформациями законом Гука. Считая материал пластины ортотропным и пренебрегая коэффициентом Пуассона по толщине, что практически не сказывается на напряженно-деформированном состоянии при сильной анизотропии материала $E_{x,y}/E_z > 10$ и малой относительной толщине, будем иметь

$$\sigma_x = E_x^\circ (\varepsilon_x + \mu_{yx} \varepsilon_y), \quad \sigma_y = E_y^\circ (\varepsilon_y + \mu_{yx} \varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = G_{xy} \varepsilon_{xy} \quad (1.3)$$

$$E_{x,y}^{\circ} = E_{x,y} / (1 - \mu_{xy}\mu_{yx}), \quad E_x \mu_{xy} = E_y \mu_{yx} \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_z = \sigma_z / E_z, \quad \varepsilon_{xz} = \tau_{xz} / G_{xz}, \quad \varepsilon_{yz} = \tau_{yz} / G_{yz}$$

Предполагается, что упругие постоянные являются произвольными (для слоистых пластин — разрывными) функциями переменной z .

Для построения уточненного варианта теории сведем трехмерную задачу, определяемую уравнениями (1.1)–(1.4), к двумерной. С этой целью введем кинематические гипотезы, определяющие распределение перемещений по толщине пластины.

Интегрируя соотношение для ε_z по z , получим

$$u_z = w_0(x, y) + \int_0^z \frac{\sigma_z}{E_z} dz \quad (1.5)$$

Здесь w_0 — прогиб исходной поверхности $z=0$.

Подставляя в равенства (1.2) деформации $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$ и u_z , согласно (1.4), (1.5), и интегрируя полученные выражения по z , найдем

$$u_x = u_0(x, y) + \int_0^z \frac{\tau_{xz}}{G_{xz}} dz - \int_0^z \frac{\partial w_0}{\partial x} dz - \int_0^z dz \int_0^z \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} \frac{dz}{E_z} \quad (1.6)$$

$$u_y = v_0(x, y) + \int_0^z \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}} dz - \int_0^z \frac{\partial w_0}{\partial y} dz - \int_0^z dz \int_0^z \frac{\partial \sigma_z}{\partial y} \frac{dz}{E_z}$$

где u_0, v_0 — смещения координатной поверхности в направлении x, y .

Для построения кинематической модели примем в равенствах (1.5), (1.6) напряжения $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ равными их значениям на начальной поверхности $z=0$, т. е.

$$\sigma_z = \sigma_0(x, y), \quad \tau_{xz} = \tau_0(x, y), \quad \tau_{yz} = s_0(x, y)$$

где величины с нулевым индексом соответствуют $z=0$.

Тогда соотношения (1.5), (1.6) примут вид

$$u_z = w_0 + \sigma_0 \int_0^z \frac{dz}{E_z} \quad (1.7)$$

$$u_x = u_0 + \tau_0 \int_0^z \frac{dz}{G_{xz}} - \frac{\partial w_0}{\partial x} z - \frac{\partial \sigma_0}{\partial x} \int_0^z dz \int_0^z \frac{dz}{E_z}$$

$$u_y = v_0 + s_0 \int_0^z \frac{dz}{G_{yz}} - \frac{\partial w_0}{\partial y} z - \frac{\partial \sigma_0}{\partial y} \int_0^z dz \int_0^z \frac{dz}{E_z}$$

Подставляя перемещения (1.7) в соответствующие геометрические соотношения (1.2) и в равенства (1.3), получим выражения для напряжений

$$\sigma_x = E_x^{\circ} \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \mu_{xy} \frac{\partial v_0}{\partial y} + \lambda_{ix} \frac{\partial \tau_0}{\partial x} + \mu_{xy} \lambda_{iy} \frac{\partial s_0}{\partial y} - \right.$$

$$\begin{aligned} & -[L_1(w_0) + \mu_{xy}L_2(w_0)]z - [L_1(\sigma_0) + L_2(\sigma_0)]\lambda^{2z} \Big\} \\ \sigma_y = E_y^\circ & \left\{ \mu_{yx} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \mu_{yx}\lambda^{1x} \frac{\partial \tau_0}{\partial x} + \lambda^{1y} \frac{\partial s_0}{\partial y} - \right. \\ & \left. - [L_2(w_0) + \mu_{yx}L_1(w_0)]z - [\mu_{yx}L_1(\sigma_0) + L_2(\sigma_0)]\lambda^{2z} \right\} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = G_{xy} & \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \lambda^{1x} \frac{\partial \tau_0}{\partial y} + \lambda^{1y} \frac{\partial s_0}{\partial x} - L_3(w_0)z - L_3(\sigma_0)\lambda^{2z} \right] \\ L_1 & = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad L_2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L_3 = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\lambda^{1x} = \int_0^z \frac{dz}{G_{xz}}, \quad \lambda^{1y} = \int_0^z \frac{dz}{G_{yz}}, \quad \lambda^{2z} = \int_0^z dz \int_0^z \frac{dz}{E_z}$$

Подставляя равенства (1.8) в первое и второе уравнения равновесия (1.1) найдем напряжения τ_{xz} и τ_{yz} :

$$\begin{aligned} \tau_{xz} & = \tau_0 + L_4^1(u_0) + L_6^1(v_0) + L_8^2(\tau_0) + L_{10}^2(s_0) + L_{12}^2(w_0) + L_{14}^3(\sigma_0) \\ \tau_{yz} & = s_0 + L_5^1(u_0) + L_7^1(v_0) + L_9^2(\tau_0) + L_{11}^2(s_0) + L_{13}^2(w_0) + L_{15}^3(\sigma_0) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Произвольные функции интегрирования определяются из условий: при $z=0$, $\tau_{xz}=\tau_0(x, y)$, $\tau_{yz}=s_0(x, y)$. Выражения (1.10) записаны в символическом виде при помощи интегро-дифференциальных операторов

$$\begin{aligned} L_4^1 & = -\eta_1^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \eta_3^1 \frac{\partial^2}{\partial y^2}, & L_5^1 & = -(\eta_{2\mu}^1 + \eta_3^1) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ L_6^1 & = -(\eta_{1\mu}^1 + \eta_3^1) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, & L_7^1 & = -\eta_2^1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \eta_3^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ L_8^2 & = -\lambda_1^{2x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \lambda_3^{2x} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, & L_9^2 & = -(\lambda_{2\mu}^{2x} + \lambda_3^{2x}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ L_{10}^2 & = -(\lambda_{1\mu}^{2y} + \lambda_3^{2y}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, & L_{11}^2 & = -\lambda_2^{2y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \lambda_3^{2y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ L_{12}^2 & = \frac{\partial}{\partial x} \left[\kappa_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x} + (\kappa_{1\mu}^2 + 2\kappa_3^2) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \\ L_{13}^2 & = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\kappa_{2\mu}^2 + 2\kappa_3^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \\ L_{14}^3 & = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_1^{3z} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\lambda_{1\mu}^{3z} + 2\lambda_3^{3z}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \\ L_{15}^3 & = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\lambda_{2\mu}^{3z} + 2\lambda_3^{3z}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda_2^{3z} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\eta_1^1 = \int_0^z E_x^\circ dz, \quad \eta_2^1 = \int_0^z E_y^\circ dz, \quad \eta_3^1 = \int_0^z G_{xy} dz, \quad \eta_{1\mu}^1 = \int_0^z \mu_{xy} E_x^\circ dz, \quad \eta_{2\mu}^1 = \int_0^z \mu_{yx} E_y^\circ dz$$

$$\begin{aligned}
 \kappa_1^2 &= \int_0^z E_x^{\circ z} dz, & \kappa_2^2 &= \int_0^z E_y^{\circ z} dz, & \kappa_3^2 &= \int_0^z G_{xz} dz, & \kappa_{1\mu}^2 &= \int_0^z \mu_{xy} E_x^{\circ z} dz \\
 \kappa_{2\mu}^2 &= \int_0^z \mu_{yx} E_y^{\circ z} dz, & \lambda_1^{2x} &= \int_0^z E_x^{\circ} \lambda^{1x} dz, & \lambda_3^{2x} &= \int_0^z G_{xy} \lambda^{1x} dz, & \lambda_2^{2y} &= \int_0^z E_y^{\circ} \lambda^{1y} dz, \\
 \lambda_3^{2y} &= \int_0^z G_{xy} \lambda^{1y} dz, & \lambda_{1\mu}^{2y} &= \int_0^z \mu_{xy} E_x^{\circ} dz, & \lambda_{2\mu}^{2x} &= \int_0^z \mu_{yx} E_y^{\circ} \lambda^{1x} dz, & \lambda_1^{3z} &= \int_0^z E_x^{\circ} \lambda^{2z} dz \\
 \lambda_2^{3z} &= \int_0^z E_y^{\circ} \lambda^{2z} dz, & \lambda_3^{3z} &= \int_0^z G_{xy} \lambda^{2z} dz, & \lambda_{1\mu}^{3z} &= \int_0^z \mu_{xy} E_x^{\circ} \lambda^{2z} dz, \\
 \lambda_{2\mu}^{3z} &= \int_0^z \mu_{yx} E_y^{\circ} \lambda^{2z} dz
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Подставляя σ_x , σ_y , τ_{xz} и τ_{yz} , согласно равенствам (1.8), (1.9) в третье уравнение равновесия (1.1) и интегрируя его по z , получим

$$\begin{aligned}
 \sigma_z &= \sigma_0 - \left(\frac{\partial \tau_0}{\partial x} + \frac{\partial s_0}{\partial y} \right) z - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [L_4^2(u_0)] + \frac{\partial}{\partial y} [L_5^2(u_0)] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x} [L_6^2(v_0)] + \frac{\partial}{\partial y} [L_7^2(v_0)] \right\} - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [L_8^3(\tau_0)] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} [L_9^3(\tau_0)] + \frac{\partial}{\partial x} [L_{10}^3(s_0)] + \frac{\partial}{\partial y} [L_{11}^3(s_0)] + \frac{\partial}{\partial x} [L_{12}^2(w_0)] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} [L_{13}^3(w_0)] \right\} - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [L_{14}^4(\sigma_0)] + \frac{\partial}{\partial y} [L_{15}^4(\sigma_0)] \right\} \tag{1.13}
 \end{aligned}$$

Произвольная функция интегрирования определяется из условия: при $z=0$ напряжение $\sigma_z = \sigma_0(x, y)$.

В равенстве (1.13) принято

$$\begin{aligned}
 L_4^2 &= -\eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \eta_3^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}, & L_5^2 &= -(\eta_{2\mu}^2 + \eta_3^2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\
 L_6^2 &= -(\eta_{1\mu}^2 + \eta_3^2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, & L_7^2 &= -\eta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \eta_3^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\
 L_8^3 &= -\lambda_1^{3x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \lambda_3^{3x} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, & L_9^3 &= -(\lambda_{2\mu}^{3x} + \lambda_3^{3x}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\
 L_{10}^3 &= -(\lambda_{1\mu}^{3y} + \lambda_3^{3y}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, & L_{11}^3 &= -\lambda_2^{3y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \lambda_3^{3y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\
 L_{12}^3 &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\kappa_1^3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\kappa_{1\mu}^3 + 2\kappa_3^3) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \\
 L_{13}^3 &= \frac{\partial}{\partial y} \left[(\kappa_{2\mu}^3 + 2\kappa_3^3) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa_2^3 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$L_{14}^4 = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_1^{4z} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\lambda_{1\mu}^{4z} + 2\lambda_3^{4z}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]$$

$$L_{15}^4 = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\lambda_{2\mu}^{4z} + 2\lambda_3^{4z}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda_2^{4z} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]$$

(1.14)

$$\eta_1^2 = \int_0^z \eta_1^1 dz, \quad \eta_2^2 = \int_0^z \eta_2^1 dz, \quad \eta_3^2 = \int_0^z \eta_3^1 dz, \quad \eta_{1\mu}^2 = \int_0^z \eta_{1\mu}^1 dz, \quad \eta_{2\mu}^2 = \int_0^z \eta_{2\mu}^1 dz$$

$$\lambda_1^{3x} = \int_0^z \lambda_1^{2x} dz, \quad \lambda_{2\mu}^{3x} = \int_0^z \lambda_{2\mu}^{2x} dz, \quad \lambda_3^{3x} = \int_0^z \lambda_3^{2x} dz,$$

$$\lambda_2^{3y} = \int_0^z \lambda_2^{2y} dz, \quad \lambda_{1\mu}^{3y} = \int_0^z \lambda_{1\mu}^{2y} dz, \quad \lambda_3^{3y} = \int_0^z \lambda_3^{2y} dz$$

$$\kappa_1^3 = \int_0^z \kappa_1^2 dz, \quad \kappa_2^3 = \int_0^z \kappa_2^2 dz, \quad \kappa_3^3 = \int_0^z \kappa_3^2 dz, \quad \kappa_{1\mu}^3 = \int_0^z \kappa_{1\mu}^2 dz, \quad \kappa_{2\mu}^3 = \int_0^z \kappa_{2\mu}^2 dz$$

$$\lambda_1^{4z} = \int_0^z \lambda_1^{3z} dz, \quad \lambda_2^{4z} = \int_0^z \lambda_2^{3z} dz, \quad \lambda_3^{4z} = \int_0^z \lambda_3^{3z} dz$$

$$\lambda_{1\mu}^{4z} = \int_0^z \lambda_{1\mu}^{3z} dz, \quad \lambda_{2\mu}^{4z} = \int_0^z \lambda_{2\mu}^{3z} dz$$

(1.15)

Напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ и перемещения u_x, u_y, u_z выражаются через неизвестные функции двух переменных $u_0(x, y), v_0(x, y), w_0(x, y), \tau_0(x, y), s_0(x, y), \sigma_0(x, y)$. Отметим, что построенная кинематическая модель позволяет точно удовлетворить уравнениям равновесия теории упругости (1.1), геометрическим (1.2) и физическим соотношениям (1.3), (1.4).

Соотношения, связывающие поперечные и нормальные напряжения с соответствующими деформациями (1.4), которые не удовлетворяются в классической теории пластин в рассматриваемом варианте теории, удовлетворяются на исходной поверхности $z=0$. Более точное выполнение равенств (1.2) для $\varepsilon_z, \varepsilon_{xz}$ и ε_{yz} можно осуществить построением итерационного процесса, в котором перемещения u_x, u_y, u_z в каждом последующем приближении определяются равенствами (1.7) при помощи выражений для τ_{xz}, τ_{yz} и σ_z из равенств (1.10) и (1.13) на предшествующем этапе. Построенный вариант уточненной теории пластин может считаться первым приближением итерационного процесса.

2. Разрешающая система уравнений может быть получена из равенств определяющих напряжения τ_{xz}, τ_{yz} и σ_z , в результате удовлетворения статических граничных условий, которые в общем случае нагружения имеют вид при $z=\pm h$:

$$\tau_{xz} = q_{1,2}(x, y), \quad \tau_{yz} = s_{1,2}(x, y), \quad \sigma_z = -p_{1,2}(x, y)$$

Система записывается в смешанной форме, включает в качестве неизвестных три перемещения u_0, v_0, w_0 поверхности $z=0$, три напряжения σ_0, τ_0, s_0 и имеет в совокупности шестнадцатый порядок. Заметим, что значения коэффициентов, характеризующих обобщенную жесткость и податливость пластины и входящих в операторы, зависят от пределов интегрирования $z=h$ или $z=-h$.

Для случая неоднородной слоистой пластины с симметричными относительно срединной плоскости упругими свойствами разрешающая система уравнений может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_0 \pm [L_4^1(u_0) + L_6^1(v_0)] + L_8^2(\tau_0) + L_{10}^2(s_0) + L_{12}^2(w_0) \pm L_{14}^3(\sigma_0) &= q_{1,2} \\ s_0 \pm [L_5^1(u_0) + L_7^1(v_0)] + L_9^2(\tau_0) + L_{11}^2(s_0) + L_{13}^2(w_0) \pm L_{15}^3(\sigma_0) &= s_{1,2} \\ \sigma_0 \pm \left(\frac{\partial \tau_0}{\partial x} + \frac{\partial s_0}{\partial y} \right) h - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [L_4^2(u_0)] + \frac{\partial}{\partial y} [L_5^2(u_0)] + \right. & \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x} [L_6^2(v_0)] + \frac{\partial}{\partial y} [L_7^2(v_0)] \right\} \mp \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [L_8^3(\tau_0)] + \frac{\partial}{\partial y} [L_9^3(\tau_0)] + \right. & \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x} [L_{10}^3(s_0)] + \frac{\partial}{\partial y} [L_{11}^3(s_0)] + \frac{\partial}{\partial x} [L_{12}^3(w_0)] + \right. & \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} [L_{13}^3(w_0)] \right\} - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [L_{14}^4(\sigma_0)] + \frac{\partial}{\partial y} [L_{15}^4(\sigma_0)] \right\} &= -p_{1,2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

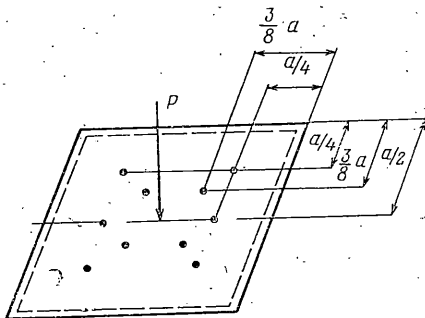
Решение системы (2.1), очевидно, должно удовлетворять граничным условиям на краях $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$. Высокий порядок разрешающей системы уравнений позволяет записать в дополнение к классическим граничным условиям (для усилий, моментов и перерезывающей силы) на краю $\alpha = \text{const}$:

$$T_x = \int_{-h}^h \sigma_x dz, \quad T_{xy} = \int_{-h}^h \tau_{xy} dz, \quad M_x = \int_{-h}^h \sigma_{xz} dz, \quad H_{xy} = \int_{-h}^h \tau_{xyz} dz, \quad Q_z = \int_{-h}^h \tau_{xz} dz$$

граничные условия вида

$$M_x^1 = \int_{-h}^h \sigma_{xz}^2 dz, \quad H_{xy}^1 = \int_{-h}^h \tau_{xyz}^2 dz, \quad Q_z^1 = \int_{-h}^h \tau_{xz} dz$$

соответствующие моментам более высокого порядка. Для постановки геометрических граничных условий на торцах пластины должны быть заданы восемь функций



$$\begin{aligned} u_0, v_0, w_0, \frac{\tau_0}{G_{xz}} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \frac{s_0}{G_{yz}} - \frac{\partial w_0}{\partial y}, \sigma_0, \frac{\partial \sigma_0}{\partial x}, \frac{\partial \sigma_0}{\partial y} \end{aligned}$$

Рассмотрим изгиб многослойной пластины регулярной структуры, составленной из различных изотропных материалов, коэффициенты Пуассона которых равны или близки между собой. В этом случае разре-

шающая система уравнений (2.1) существенно упрощается, так как выражения (1.9), (1.12), (1.15) принимают более простой вид, может быть преобразована попарным сложением и вычитанием уравнений системы

$$\tau_0 - \lambda^{2x} \left[\frac{\partial^2 \tau_0}{\partial x^2} + \frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial y^2} + \frac{(1+\mu)}{2} \frac{\partial^2 s_0}{\partial x \partial y} \right] + \kappa^2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w_0 = 0$$

$$\begin{aligned}
 & -\eta^4 \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{(1+\mu)}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right] + \lambda^{3z} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \sigma_0 = 0 \\
 s_0 - \lambda^{2x} & \left[\frac{(1+\mu)}{2} \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 s_0}{\partial y^2} + \frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 s_0}{\partial x^2} \right] + \kappa^2 \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w_0 = 0 \\
 & -\eta^4 \left[\frac{(1+\mu)}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right] + \lambda^{3z} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \sigma_0 = 0 \quad (2.2) \\
 & \sigma_0 + \eta^2 \nabla^2 \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - \lambda^{4z} \nabla^2 \nabla^2 \sigma_0 = -\frac{p}{2} \\
 & - \left(\frac{\partial \tau_0}{\partial x} + \frac{\partial s_0}{\partial y} \right) h + \lambda^{3x} \nabla^2 \left(\frac{\partial \tau_0}{\partial x} + \frac{\partial s_0}{\partial y} \right) + \kappa^3 \nabla^2 \nabla^2 w_0 = -\frac{p}{2}
 \end{aligned}$$

Уравнения (2.2) записаны для пластины, нагруженной давлением $p_1 = -p$ (при $p_2 = s_1 = s_2 = q_1 = q_2 = 0$).

Преобразуем полученную систему и введем при этом некоторые, дифференцируемые необходимое число раз, функции напряжений $\varphi(x, y)$, приняв $\tau_0 = \partial\varphi/\partial x$ и $s_0 = \partial\varphi/\partial y$, и перемещений $\psi(x, y)$, при этом $u_0 = \partial\psi/\partial x$, $v_0 = \partial\psi/\partial y$.

Приведем окончательный вид разрешающей системы 16-го порядка

$$\begin{aligned}
 & \lambda^{3z} \nabla^2 \nabla^2 \sigma_0 - \eta^4 \nabla^2 \nabla^2 \psi = 0, \quad k_1 \nabla^2 \nabla^2 \sigma_0 + \eta^4 \sigma_0 = -1/2 p \eta^4 \\
 & (k_2 + k_3) \nabla^2 \varphi = -1/2 p \kappa^2, \quad (1 - \lambda^{2x} \nabla^2) \nabla^2 \varphi + \kappa^2 \nabla^2 \nabla^2 w_0 = 0 \quad (2.3) \\
 & k_1 = \eta^2 \lambda^{3z} - \eta^4 \lambda^{4z}, \quad k_2 = \kappa^3 - h \kappa^2, \quad k_3 = \kappa^2 \lambda^{3x} - \kappa^3 \lambda^{2x}
 \end{aligned}$$

3. В качестве примера рассмотрим задачу изгиба шарнирно опертой прямоугольной пластины сосредоточенной силой P , приложенной в заданной точке $x=c, y=d$ (фигура).

Используя метод Навье, представим заданную нагрузку в виде двойного тригонометрического ряда

$$P = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y, \quad p_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin \alpha c \sin \beta d, \quad \alpha = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta = \frac{n\pi}{b} \quad (3.1)$$

Удовлетворяя граничным условиям на продольных краях пластины (равенство прогиба u_z по контуру и $\sigma_x = 0$ на краях $x=0$ и $x=const$ и $\sigma_y = 0$ на краях $y=0$ и $y=const$) представим искомые функции σ_0, φ, ψ и w_0 в форме двойных тригонометрических рядов. Подставляя указанные разложения в исходную систему (2.3), получим алгебраическую систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов $\sigma_{mn}, \varphi_{mn}, \psi_{mn}, w_{mn}$, решая которую, найдем эти коэффициенты

$$\begin{aligned}
 \sigma_{mn} &= -\frac{\eta^4 p_{mn}}{2\pi^4 (\xi_{mn}^2 k_1 + \eta^4/\pi^4)}, \quad \xi_{mn} = \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \\
 \varphi_{mn} &= -\frac{\kappa^2 p_{mn}}{2\pi \xi_{mn} (\pi^2 \xi_{mn} k_3 - k_2)}, \quad \psi_{mn} = -\frac{\lambda^{3z} p_{mn}}{2\pi^4 (\xi_{mn}^2 k_1 + \eta^4/\pi^4)} \\
 w_{mn} &= -\frac{(\lambda^{2x} \pi^2 \xi_{mn} + 1) p_{mn}}{2\pi^4 \xi_{mn}^2 (\pi^2 \xi_{mn} k_3 - k_2)} \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Подставляя функции w_0 и σ_0 в первое из соотношений (1.7), получим нормальное перемещение пластины в следующем виде:

$$u_z = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\gamma_{mn}(\gamma_{mn}k_3 - k_2a^2/\pi^2)} \left(\frac{a^2}{\pi^2\gamma_{mn}} + \lambda^{2x} \right) + \right. \\ \left. + z \frac{\eta^1 \lambda^{1z}}{\gamma_{mn}k_1 + \eta^1 a^4/\pi^4} \right] \frac{2Pa^2}{\pi^4} \sin \alpha c \sin \beta d \sin \alpha x \sin \beta y, \quad \gamma_{mn} = m^2 + n^2$$

Примем $a=b$, $c=a/2$, $d=a/2$. Тогда

$$u_z = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\gamma_{mn}(\gamma_{mn}k_3 - k_2a^2/\pi^2)} \left(\frac{a^2}{\pi^2\gamma_{mn}} + \lambda^{2x} \right) + \right. \\ \left. + z \frac{\eta^1 \lambda^{1z}}{\gamma_{mn}k_1 + \eta^1 a^4/\pi^4} \right] \frac{2Pa^2}{\pi^4} (-1)^{1/2(m-1)} (-1)^{1/2(n-1)} \sin \alpha x \sin \beta y \quad (m, n=1, 3, 5, \dots) \quad (3.3)$$

Прогиб в любой точке пластинки определяется рядом (3.3). Если в полученном соотношении пренебречь третьим членом, содержащим множитель λ^{1z} , что соответствует общепринятому предположению о несжимаемости материала в поперечном направлении $E_z \rightarrow \infty$, то выражение для u_z будет определять прогибы с учетом деформации поперечного сдвига. Пренебрегая далее и вторым членом, т. е. не учитывая тем самым поперечную сдвиговую деформацию $G_{xz}, G_{yz} \rightarrow \infty$, можно получить выражение для u_z , соответствующее классической теории изгиба пластин [10]:

$$u_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Pa^2}{\pi^4 \gamma_{mn}^2 k_2} (-1)^{1/2(m-1)} (-1)^{1/2(n-1)} \sin \alpha x \sin \beta y$$

Рассмотрим случай, реализованный в [4]. Квадратная $a=b=200$ мм семнадцатислойная (восемь слоев заполнителя толщиной 3 мм из оргстекла и девять несущих слоев толщиной 11 мм из дюралюминия Д16Т) пластина нагружена сосредоточенной силой в центре $c=d=a/2$. Общая толщина пластины $2h=33.7$ мм (за h принималась высота от среднего слоя до наружной поверхности). Упругие характеристики материалов пластины: $E_x^I = E_y^I = E_z^I = 7100$ кг/мм², $G_{xy}^I = G_{xz}^I = G_{yz}^I = 2730$ кг/мм², $E_x^{II} = E_y^{II} = E_z^{II} = 320$ кг/мм², $G_{xy}^{II} = G_{xz}^{II} = G_{yz}^{II} = 120$ кг/мм², $\mu_{xy}^I = \mu_{yx}^I = \mu_{xy}^{II} = \mu_{yx}^{II} = 0.3$, где индекс I относится к несущим слоям, а индекс II — к заполнителю.

При расчете предполагалось, что неучет прослойки клея БФ-4, которым соединены несущие слои и заполнитель, вносит незначительные погрешности, так как модуль упругости клея близок к модулю упругости оргстекла. В [4] экспериментальным и теоретическим путем определялся прогиб в трех точках пластины с координатами $x=1/4a$, $y=1/4a$; $x=1/4a$, $y=1/2a$; $x=3/8a$, $y=3/8a$ (фигура).

Значения коэффициентов, характеризующих обобщенную жесткость и податливость пластины представлены ниже (первый столбец):

η^1 , кг/мм	$38.938 \cdot 10^3$	$39.193 \cdot 10^3$
η^2 , кг	$307.236 \cdot 10^3$	$330.199 \cdot 10^3$
χ^2 , кг	$348.857 \cdot 10^3$	$330.199 \cdot 10^3$
χ^3 , кг	$1676.444 \cdot 10^3$	$1854.636 \cdot 10^3$
λ^{2x} , мм ²	$2.23 \cdot 10^3$	$2.051 \cdot 10^3$
λ^{3x} , мм ³	$10.359 \cdot 10^3$	$11.519 \cdot 10^3$
λ^{1z} , мм ³ /кг	$39.374 \cdot 10^{-3}$	$40.261 \cdot 10^{-3}$
λ^{3z} , мм ³	$5.4 \cdot 10^3$	$4.437 \cdot 10^3$
λ^{4z} , мм ⁴	$23.905 \cdot 10^3$	$18.69 \cdot 10^3$

Результаты второго столбца соответствуют другому расчетному случаю, при котором число слоев принимается неограниченно большим. Последнее предположение позволяет считать материал пластины условно-однородным и использовать для определения ее жесткостных характеристик выражения

$$\eta^1 = E_{x1}^\circ h_9, \quad \eta^2 = 1/2 E_{x1}^\circ h_9^2, \quad \kappa^2 = 1/2 E_{x1}^\circ h_9^2$$

$$\lambda^{2x} = 1/2 h_9^2 E_{x1}^\circ / G_{xz1}, \quad \lambda^{3x} = 1/6 h_9^3 E_{x1}^\circ / G_{xz1}, \quad \kappa^3 = 1/6 E_{x1}^\circ h_9^3$$

$$\lambda^{1z} = h_9 / E_{z1}, \quad \lambda^{3z} = 1/6 h_9^3 E_{x1}^\circ / E_{z1}, \quad \lambda^{4z} = 1/24 h_9^4 E_{x1}^\circ / E_{z1}$$

Упругие постоянные E_{x1}° , G_{xz1} , E_{z1} условно-однородного материала определяются по формулам

$$E_{x1}^\circ = E_x^{\circ I} h^I / h + E_x^{\circ II} h^{II} / h$$

$$G_{xz1} = \frac{G_{xz}^I G_{xz}^{II} h}{G_{xz}^I h^{II} + G_{xz}^{II} h^I}, \quad E_{z1} = \frac{E_z^I E_z^{II} h}{E_z^I h^{II} + E_z^{II} h^I}$$

где h^I — суммарная толщина несущих слоев, h^{II} — суммарная толщина слоев заполнителей.

N_i	w_Σ	w_1	w_2	w_3
$n=17$				
1	0.0411	0.0227	0.0186	-0.0002
	(0.0489)	—	—	—
	(0.0414)	(0.0254)	(0.016)	—
2	0.0666	0.0339	0.0329	-0.0002
	(0.0698)	—	—	—
	(0.0630)	(0.0361)	(0.0269)	—
3	0.0910	0.0427	0.0472	0.0001
	(0.1090)	—	—	—
	(0.0887)	(0.455)	(0.0432)	—
$n \rightarrow \infty$				
1	0.0492	0.0257	0.0194	0.0041
	(0.0470)	(0.0302)	(0.0168)	—
2	0.0800	0.0384	0.0342	0.0074
	(0.0703)	(0.0423)	(0.0280)	—
3	0.1095	0.0484	0.0492	0.0119
	(0.0988)	(0.0550)	(0.0488)	—

В таблице приведены экспериментальные и теоретические значения отношений прогибов u_z к силе P ($w = u_z/P$) для точек 1, 2, 3 ($n=17$ и $n=\infty$). В скобках стоят значения, взятые из [4]. Введены следующие обозначения для составляющих суммарного прогиба $w_\Sigma = w_1 + w_2 + w_3$ (w_1 — прогиб, соответствующий классической теории; w_2 — составляющая прогиба, связанная с деформацией поперечного сдвига, w_3 — составляющая прогиба, связанная с поперечной нормальной деформацией).

Анализ данных, представленных в таблице, показывает, что результаты расчетов, полученных согласно (3.3), хорошо согласуются с экспериментальными и теоретическими результатами из [4].

Следует отметить, что уравнения, приведенные в [4], основаны на гипотезе ломаной линии, и их порядок возрастает с увеличением числа слоев. Решение уравнений типа (2.3) существенно проще, так как они основаны на деформационной гипотезе, принимаемой для всего пакета, и порядок системы не зависит от числа слоев.

Из полученных результатов также следует, что в рассматриваемом случае условно-однородная модель материала достаточно хорошо отражает жесткость и податливость многослойной пластины.

Таким образом, при учете поперечной нормальной деформации для однородной пластины плоское напряженное состояние не отделяется от изгибного, и разрезающаяся система имеет 16-й порядок. На примере слоистой пластины показано, что теория, основанная на деформационной гипотезе, принимаемой для всего пакета, позволяет получить результаты, удовлетворительно совпадающие с экспериментальными и с решением, основанным на гипотезе ломаной линии.

Поступила 18 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Еще одна уточненная теория анизотропных оболочек. Механика полимеров, 1970, № 5.
2. Бологин В. В. Об изгибе плит, состоящих из большого числа слоев. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 1.
3. Бологин В. В., Москаленко В. Н. Пластины и оболочки из армированных материалов. Основные уравнения, количественные результаты. В сб.: Докл. научно-техн. конф. по итогам н.-и. работ 1966—1967 г. Моск. энерг. ин-т, 1967.
4. Бавв Л. В. Расчет многослойных пластин с учетом поперечного сдвига и обжатия. В сб.: Динамика сплошной среды, вып. 6, Новосибирск, 1970.
5. Васильев В. В., Назаренко В. Г. Вариант теории толстых, многослойных цилиндрических оболочек. Механика полимеров, 1974, № 6.
6. Григольюк Э. И., Коган Ф. А. Современное состояние многослойных оболочек. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 6.
7. Галинъш А. Г. Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям. В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек, 1967, вып. 5; 1970, вып. 6—7, Изд-во Казанского ун-та.
8. Королев В. И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. М., «Машиностроение», 1965.
9. Пелех В. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев, «Наукова думка», 1973.
10. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., «Наука», 1966.