

ОБОЛОЧКА ВРАЩЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ, РАБОТАЮЩАЯ НА КРУЧЕНИЕ

Н. М. ГУРА

(Москва)

Рассматривается задача оптимального проектирования упругой оболочки вращения, нагруженной крутящими усилиями. Ранее в основном исследовались задачи, в которых формы оболочек определялись из условий равнопрочности и минимума потенциальной энергии деформации [1-3].

Представляет интерес нахождение оптимального проекта оболочки вращения максимальной жесткости при заданном объеме оболочки. В работе рассмотрено несколько вариантов этой задачи, в которых в качестве искомых управляющих функций выступают совместно или поочередно: форма меридиана срединной поверхности и распределение толщины вдоль меридиана. Получены необходимые условия оптимальности, в ряде случаев найдены аналитические решения. Исследованы некоторые особенности оптимальных проектов и влияние крутящих моментов на толщину оболочки.

1. Рассмотрим задачу определения оптимальной формы оболочки вращения максимальной жесткости. Объем материала оболочки предполагается заданным. Обозначим через q , S , H , R , R_1 , R_2 соответственно распределенные крутящие усилия сил и моментов $S=S_1-H_2/R_2=S_2-H_1/R_1$ (S_1 , H_1 — крутящая сила и момент, действующие по меридиану оболочки, S_2 , H_2 — крутящая сила и момент, действующие по параллели оболочки), полусумму моментов $H=1/2(H_1+H_2)$, радиус кривизны меридиана оболочки, расстояние по нормали от поверхности до оси вращения, текущий радиус оболочки.

Запишем уравнение равновесия [4]:

$$\frac{d}{d\theta} \left[R^2 \left(S + 2 \frac{H}{R_2} \right) \right] = -qR_1R^2 \quad (1.1)$$

Здесь θ — угол, образуемый нормалью к срединной поверхности.

Обозначим через E , h , ν соответственно модуль Юнга, толщину оболочки, коэффициент Пуассона. Переменные S и H выражаются через смещение u следующим образом:

$$H(\theta) = \frac{Eh^3 \sin \theta}{12(1+\nu)R_1} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{u}{R} \right)$$

$$S(\theta) = \frac{EhR}{2(1+\nu)R_1} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{u}{R} \right)$$

Подставляя эти соотношения в уравнение (1.1), получим

$$\frac{d}{d\theta} \left[\left(hR^3R_1^{-1} + \frac{R^2h^3}{3R_1} \frac{d}{d\theta} \right) \left(\frac{u}{R} \right) \right] = qR^2R_1 \quad (1.2)$$

Радиусы кривизны $R_1(\theta)$, $R_2(\theta)$ связаны между собой зависимостью Гаусса — Кодацци $R' = R_1 \cos \theta$, штрих обозначает операцию дифференци-

рования, и переменная θ связана с переменными z и R геометрической связью $\operatorname{ctg} \theta = R'(z)$ (фиг. 1). Это позволяет перейти от переменной θ к переменной z . Введем далее безразмерные величины $z^\circ = zL^{-1}$, $R^\circ = RL^{-1}$, $h^\circ = hL^{-1}$, $q^\circ = qE^{-1}(1+\nu)^{-1}$, где L — длина оболочки по оси (градус в безразмерных переменных в дальнейшем опускается).

Напишем уравнение равновесия (1.2) в новых переменных

$$L^*(h, R)(u/R) = q(z)R^2\sqrt{1+R'^2} \quad (1.3)$$

$$L^* = \frac{d}{dz} \left\{ [hR^3(1+R'^2)^{-1/2} + \frac{1}{3}h^3R(1+R'^2)^{-1}] \frac{d}{dz} \right\}$$

Рассмотрим два варианта граничных условий, когда оболочка вращения закреплена на обоих краях и когда один край свободен, а другой закреплён.

Граничные условия для этих случаев будут иметь вид

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (1.4)$$

$$u(0) = hR^3[(1+R'^2)^{-1/2} + \frac{1}{3}h^2R^{-2}(1+R'^2)^{-1}](u/R)'|_{z=0} = 0 \quad (1.5)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что дифференциальный оператор L^* является самосопряженным оператором и вместо решения уравнения (1.3) можно рассмотреть эквивалентную задачу минимизации функционала

$$\Phi = \min_u \left\{ \int_0^1 \left[\left(hR^3(1+R'^2)^{-1/2} + \frac{h^3R}{3(1+R'^2)} \right) \times \right. \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{u}{R} \right)'^2 + 2qR^3(1+R'^2)u \right] dz \right\}$$

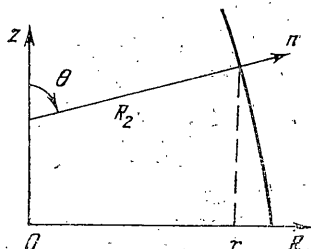


Рис. 1

Будем рассматривать следующий класс нагрузок $M(z) = q_0 R^2 \sqrt{1+R'^2} \delta(z-z_0)$, где $\delta(z)$ — дельта-функция и под величиной жесткости будем понимать величину, обратную смещению

$u(z_0)$ (z_0 — координата точки приложения сосредоточенной нагрузки).

Объем оболочки V будет считаться заданным $V^\circ = V(2\pi)^{-1}L^{-3}$ и радиусы краев оболочки известны $R(0) = r_1$, $R(1) = r_2$:

$$V = \int_0^1 hR\sqrt{1+R'^2} dz \quad (1.6)$$

Смещение $u(z_0)$ равно

$$u(z_0) = -M_0^{-1} \min \left\{ \int_0^1 \left[hR^3(1+R'^2)^{-1/2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{3}h^3R(1+R'^2)^{-1} \right] \left(\frac{u}{R} \right)'^2 dz \right\}, \quad M_0 = q_0 R^2(z_0) \quad (1.7)$$

Рассматриваемая ниже задача оптимизации заключается в отыскании функций $h(z)$ или $R(z)$, или совместно $h(z)$ и $R(z)$, удовлетворяющих изопериметрическому условию (1.6), таких, что реализуется минимум функционала (1.7).

Для оболочки со свободным краем можно вместо функционала (1.7) для случая, когда $q(z) = 0$ и на свободном крае приложена обобщенная крутящая сила S_0 , решить уравнение (1.3) и, принимая за величину

жесткости величину обратную (1.7), получить следующее выражение:

$$u(1) = -r_2 S_0 \int_0^1 \sqrt{1+R'^2} h R \left[1 + \frac{1}{3} h^2 R^{-2} (1+R'^2)^{-1} \right]^{-1} dz \quad (1.8)$$

Будем искать минимум функционалов (1.7) или (1.8) при ограничении (1.6) в классе следующих функций $h \geq 0$, $h \in C[0, 1]$ и $R \in C^2[0, 1]$. Введем величину $\psi = u(z_0) - \lambda V$, где λ — множитель Лагранжа. Необходимым условием минимума функционала (1.7) или (1.8) при ограничении (1.6) является стационарность функционала Лагранжа по переменным $h(z)$ и $R(z)$ и неотрицательность множителя Лагранжа.

2. Получим необходимые условия оптимальности для сформулированной выше задачи. Рассмотрим случай оболочки вращения со свободным краем. Приравнявая полную вариацию по h функционала Лагранжа нулю, получим

$$\begin{aligned} [1 + \frac{2}{3} h R^{-2} (1+R'^2)^{-1}] h^{-2} [1 + \frac{1}{3} h^2 R^{-2} (1+R'^2)^{-1}]^{-2} = \\ = a R^4, \quad a = \lambda S_0 r_2^{-1} L^{-1} / S_1^* \end{aligned} \quad (2.1)$$

Заметим, что для тонких оболочек $\beta = \max_z (h/R) \ll 1$, ограничиваясь в функционале (1.8) членами порядка h^2/R^2 и пренебрегая более высокими степенями, можно упростить выражение (2.1)

$$h^{-2} [1 + \frac{1}{3} \sqrt{1+R'^2} R^{-5}] = a R^4 \quad (2.2)$$

Уравнение Эйлера для переменной $R(z)$ имеет вид

$$\begin{aligned} [R' (h R^3 (1+R'^2)^{-1/2})^{-1} - h R^{-5} (1+R'^2)^{-3/2}]' + 3 (1+R'^2)^{-1/2} h^{-1} R^{-4} - \\ - \frac{5}{2} h R^{-6} (1+R'^2)^{-3/2} - a \{ [h R' (1+R'^2)]' - h (1+R'^2)^{3/2} \} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из условий (2.2) и (2.3) легко получить необходимые условия оптимальности для безмоментной оболочки вращения, работающей на кручение. Для этого достаточно в выражениях (2.2) и (2.3) опустить члены, обуславливающие влияние моментов. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} h(z) = a^{1/2} R^{-2}(z), \quad [R' h^{-1} (1+R'^2)^{-1/2}]' + \\ + 3 (1+R'^2)^{1/2} h^{-1} R^{-4} - a [(h R' (1+R'^2)^{-1/2})' - h (1+R'^2)^{3/2}] = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Условия оптимальности вместе с краевыми условиями и изопериметрическим ограничением (1.6) составляют замкнутую краевую задачу и позволяют определить оптимальное распределение толщины $h(z)$ и форму меридиана срединной поверхности $R(z)$.

3. Определим оптимальный проект оболочки вращения в случае, когда функция $h(z)$ служит управлением, а функция $R(z)$ задана. В этом случае условие оптимальности (2.1) является алгебраическим уравнением. Для определения постоянной a имеется условие (1.6).

Заметим, что при $R(z) = \text{const}$ (цилиндрическая оболочка) оптимальное распределение толщины, как это следует из условия (2.2), будет постоянным и не зависит от переменной z .

Найдем оптимальное распределение толщины для конической оболочки. Тогда $R(z) = r_1 + (r_2 - r_1)z$ и рассмотрим отдельно безмоментную оболочку. Из условия оптимальности (2.3) легко получить, что толщина оптимальной конической оболочки $h_0(z) = a^{-1/2} [r_1 + (r_2 - r_1)z]^{-2}$. Для того чтобы учесть влияние крутящих моментов на оптимальное распределение толщины, необходимо воспользоваться более точным соотношением (2.1), которое можно решить численно.

Численная процедура выглядит следующим образом: задается значение параметра a и после того, как функция $h_0(z)$ определена, находится

соответствующий параметру a объем оболочки. Найденная в результате расчетов функция $h(z)$ представлена на фиг. 2. При проведении вычислений $R(z) = r_1(1+z)$. Из графика видно, что более эффективно распределять материал около заделанного края. Кроме того, оказывается, что влияние крутящих моментов незначительно и с достаточной степенью точности

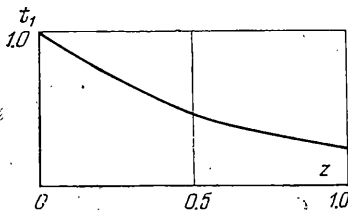


Рис. 2

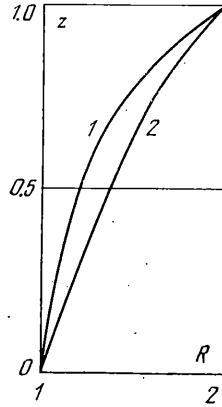


Рис. 3

можно пользоваться условием оптимальности (2.4). Из анализа соотношения (2.1) можно получить, что влияние крутящих моментов будет увеличиваться с ростом производной $R'(z)$ и с уменьшением радиуса оболочки.

Рассмотрим следующую задачу, когда управлением служит форма меридиана срединной поверхности оболочки $R(z)$, а толщина оболочки $h(z)$ — заданная функция.

Найдем оптимальный проект безмоментной оболочки вращения. Условием оптимальности безмоментной оболочки является выражение (2.4). Для простоты рассмотрим случай оболочки постоянной толщины $h(z) = h_0$, тогда можно понизить порядок уравнения (2.4) и свести его к следующему нелинейному уравнению:

$$CR^3(1 - \lambda h_0^2 R^4) = (1 + R'^2)^{1/2}$$

где C — постоянная, определяемая из краевых условий. Решение данного уравнения можно выписать в квадратурах и оно будет иметь следующий вид:

$$z = \pm \int_{r_1}^R [(1 - \lambda h_0^2 R^4)(CR^3)^{-2} - 1]^{-1/2} dR$$

Численные расчеты представлены на фиг. 3 (кривая 1 соответствует $V=0.24$, а 2 — $V=0.32$). Если учитывать влияние крутящих моментов, то необходимо воспользоваться условием оптимальности (2.2), полагая так же, как и в предыдущем случае, $h(z) = h_0$. Порядок уравнения (2.2) можно понизить и уравнение Эйлера написать в следующем виде:

$$L_1 R(z) + h_0 L_2 R(z) = C_1 \tag{3.1}$$

$$L_1 = \left[1 + \left(\frac{d}{dz} \right)^2 \right] h_0^{-1} R^{-3} - \left(\frac{d}{dz} \right)^2 \left[h_0 R^3 \left(1 + \left(\frac{d}{dz} \right)^2 \right) \right]^{-1/2} -$$

$$-\lambda h_0 \left[\left(1 + \left(\frac{d}{dz} \right)^2 \right)^2 R - \left(\frac{d}{dz} \right)^2 R \left(1 + \left(\frac{d}{dz} \right)^2 \right)^{-1/2} \right]$$

$$L_2 = - \left(\frac{d}{dz} \right)^2 \left[3R^5 \left(1 + \left(\frac{d}{dz} \right)^2 \right)^{1/2} \right]$$

где L_1 — дифференциальный оператор первого порядка, учитывающий только влияние крутящих сил, L_2 — дифференциальный оператор, учитывающий влияние крутящих моментов.

Так как h_0 (толщина оболочки) мала по сравнению с длиной оболочки, решение уравнения (3.1) будем искать в виде ряда

$$R = R_0(z) + \sum_{\alpha=1}^N h_0^\alpha R_\alpha(z)$$

При этом $R_0(z)$ — форма меридиана срединной поверхности безмоментной оболочки. Уравнение для определения следующих членов ряда имеет вид

$$L_1 R_{\alpha+1} + L_2 R_\alpha = 0 \quad (3.2)$$

Численный алгоритм выглядел следующим образом: задавалось значение множителя Лагранжа и значение толщины оболочки h_0 , при этих значениях определялась форма меридиана безмоментной оболочки, функция $R_0(z)$. Следующим шагом было решение уравнения (3.2) и определение функции $R_1(z)$. Численные расчеты показали малое влияние моментов на форму меридиана.

Нетрудно показать, что решение для безмоментной оболочки вращения будет также удовлетворять необходимому условию Лагранжа $\Phi_{R'R'} \leq 0$. Здесь Φ — подынтегральная функция в функционале Лагранжа. Необходимо условие Лежандра для безмоментной оболочки приводится к проверке неравенства $[\min_z R(z)]^{-4} \leq \lambda h_0^2$, а для моментной оболочки — к проверке неравенства

$$h_0^{-4} R^{-3} - \lambda h_0 R^{+1} / {}_3 h_0 R^{-5} + {}_3 R'^2 h_0 R^{-5} \leq 0$$

Численные расчеты представлены на фиг. 3. Из вида полученных кривых следует, что если имеется достаточно материала, то форма меридиана стремится, как можно дальше отойти от оси вращения. Если материала мало, то форма меридиана стремится к цепной линии, т. е. к оболочке минимальной поверхности.

4. Рассмотрим случай, когда управлениями являются как толщина оболочки, так и форма меридиана срединной поверхности. Для безмоментной оболочки вращения, т. е. для оболочек, удовлетворяющих условиям оптимальности (2.3) и (2.4), получается тривиальное и легко объяснимое решение. Подставляя толщину из соотношения (2.3) в уравнение Эйлера (2.4), получим, что форма меридиана должна стремиться к бесконечности. Это объясняется тем фактом, что для оптимальной оболочки выгоднее тратить материал на увеличение поверхности вращения, чем на увеличение толщины оболочки. Такое же явление происходило и в задачах оптимизации упругих криволинейных стержней [5]. Необходимо либо вводить ограничение на величину площади поверхности оболочки, либо ограничивать максимальный радиус оболочки.

Рассмотрим первый случай, когда площадь поверхности вращения равна

$$\bar{S}_* = S_*/(2\pi L^2) = \int_0^L \sqrt{1 - R'^2} dz$$

Введем величину $\Phi_1 = u(1) - \lambda_1 V - \lambda_2 S_*$, тогда уравнение Эйлера (2.3) изменится

$$\{R' / [hR^3(1+R'^2)^{1/2}]\}' + 3(1+R'^2)^{-1/2} h^{-1} R^{-4} - \\ - \lambda_1 \{[hR'R(1+R'^2)^{1/2}]\}' - h(1+R'^2)^{1/2} - \\ - \lambda_2 \{[R'R(1+R'^2)^{-1/2}]\}' - (1+R'^2)^{1/2} = 0$$

Используя соотношение (2.4), приведем предыдущее уравнение к уравнению относительно одной искомой функции

$$2(1+R'^2)^{1/2} R^{-2} - \lambda_2 \sqrt{\lambda_1} \{[R'R(1+R'^2)^{-1/2}]\}' + (1+R'^2)^{1/2} = 0$$

Решение данного уравнения можно получить в квадратурах

$$R(p) = C_1 \{ (1+p^2) / [2(1+p^2) + \alpha] \}^{1/(2\alpha)}$$

$$z(p) = \int_{p_1}^p \frac{dR}{p} + C_2, \quad \alpha = \lambda_2 \sqrt{\lambda_1}$$

Постоянные C_1, C_2 определяются из краевых условий. Графики функций $R(z)$ приведены на фиг. 4. Кривая 1 соответствует $\lambda_2 = 0.3$, кривая 2 — $\lambda_2 = 0.15$. Так же, как и в предыдущем случае, форма меридиана срединной поверхности зависит от величины площади поверхности: оптимальной

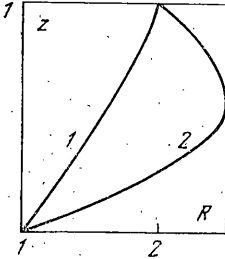


Рис. 4

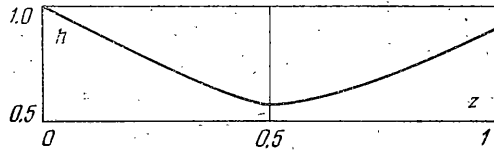


Рис. 5

безмоментной оболочке выгоднее уменьшать крутящие усилия S за счет большего расхода материала, чем экономить материал, уменьшая поверхности оболочки, т. е. увеличивать значения крутящих сил.

5. Выведем необходимое условие оптимальности, которому должна удовлетворять толщина оболочки, для случая, когда заделаны оба края оболочки, и функция $R(z)$ известна.

Тогда, составляя, как и прежде, функционал Лагранжа $\psi = u(z_0) - \lambda V$ и приравнивая вариацию нулю, получим

$$\left[R^3(1+R'^2)^{-1/2} + \frac{h^2 R}{1+R'^2} \right] \left(\frac{u}{R} \right)' = \lambda R \sqrt{1+R'^2} \quad (5.1)$$

Для безмоментной оболочки необходимое условие оптимальности примет простой вид

$$(u/R)^2 R^2 = \lambda (1+R'^2) \quad (5.2)$$

Заметим, что уравнение (5.2) не зависит от функции $h(z)$ и $R(z)$ — известная функция, следовательно, уравнение (5.2) можно проинтегрировать и определить функцию $u(z)$, которая, как нетрудно видеть, будет не зависеть и от вида нагрузки.

Для цилиндрической оболочки, когда $R(z) = R_0 = \text{const}$, будем иметь $u(z) = \lambda(|z^{-1/2}|^{-1/2})/R_0$. Подставляя функцию u в уравнение (1.3) и пренебрегая членом от моментов, получим

$$h(z) = \left[\int_0^z M(z) dz + C_1 \right] / \left(\frac{u}{R} \right)'$$

Если $M(z) = M_0 \delta(z - 0.5)$, то $h(z) = \text{const}$. Определим распределение толщины $h(z)$ для произвольной оболочки вращения. Используя условие оптимальности (5.1) и исключая из уравнения (1.3) член (u/R) , получим одно уравнение относительно искомой функции

$$\begin{aligned} & \pm \lambda \{ [hR^3(1+R'^2)^{-1/2+1/3} h^3 R / (1+R'^2)] \sqrt{R}(1+R'^2)^{1/6} \times \\ & \times [R^3 / \sqrt{1+R'^2} + h^2(1+R'^2)^{-1} R]^{-1/2} \}' = (1+R'^2)^{1/2} R^2 q(z) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Проинтегрировав по z уравнение (5.3), получим алгебраическое уравнение относительно неизвестной функции $h(z)$:

$$\begin{aligned} & \pm \lambda \left\{ [hR^3(1+R'^2)^{-1/2+1/3} h^3 R (1+R'^2)^{-1}] \sqrt{R}(1+R'^2)^{1/6} \times \right. \\ & \left. \times \left[\frac{R^3}{\sqrt{1+R'^2}} + h^2(1+R'^2)^{-1} R \right]^{-1/2} \right\}' = C_1 - \int_0^z M(z) dz \end{aligned} \quad (5.4)$$

Постоянная C_1 определяется из краевых условий (1.4), а множитель Лагранжа — из изопериметрического условия.

Необходимое условие оптимальности для безмоментной оболочки вращения легко получить из соотношения (5.4), опуская в нем член, относящийся к крутящему моменту, и оно будет иметь следующий вид:

$$\lambda h R^2 = C_1 - \int_0^z M(z) dz$$

Для случая конической оболочки были произведены численные расчеты. Оптимальное распределение толщины приведено на фиг. 5. Сосредоточенная нагрузка прикладывалась в точке $z=0.5$, $r_1=1$, $R(z) = (1+z)$.

Автор благодарит Н. В. Баничука за ценные советы и внимание к работе.

Поступила 16 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Ширко И. В. Осесимметричный изгиб равнопрочной цилиндрической оболочки. Прикл. механ., 1969; т. 5, вып. 4.
2. Shield R. T. On the Optimum Design of Shells. Trans. ASME, ser. E. J. Appl. Mech., 1960, vol. 27, No. 2.
3. Drucker D. C., Shield R. T. Design for Minimum Weight. Proc. 9th Internat. Congr. Appl. Mech., Brussels, 1956.
4. Филин А. П. Элементы теории оболочек. Л., Стройиздат, 1975.
5. Баничук Н. В. Определение оптимальных форм упругих криволинейных стержней. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 6.