

ДИНАМИКА ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ
В РАЗРУШИВШЕМСЯ ВОЛОКНЕ
ПРИ УПРУГОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ КОМПОНЕНТОВ
КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

В. В. МОСКВИТИН, А. С. ОВЧИНСКИЙ

(Москва)

Рассматривается задача динамического перераспределения напряжений в разрушившемся волокне однонаправленного композиционного материала. Перераспределение напряжений, вызванное разрушением отдельных волокон, происходит чрезвычайно быстро, со скоростью порядка скорости звука и сопровождается динамическими эффектами. Развитие модели, изложенной в [1], позволяет исследовать процесс перераспределения напряжений при разрыве волокон в динамике. Получено решение задачи методом преобразования Лапласа и приведено перераспределение напряжений в бороалюминиевом композиционном материале.

1. В процессе перераспределения напряжений концевые участки, образующиеся в месте разрыва волокна, стремительно разгружаются, приходят в движение, стремясь разойтись.

Движению препятствуют касательные силы, возникающие на границе разрушенного волокна и матрицы. Касательные силы выражаются через касательные напряжения, действующие по периметрам волокон и зависящие от угловой координаты θ (фиг. 1).

Касательные напряжения связаны со сдвиговыми деформациями матрицы. В свою очередь сдвиговые деформации матрицы на границе некоторого волокна, согласно принятой гипотезе [1], прямо пропорциональны перемещению этого волокна относительно соседних и обратно пропорциональны расстоянию от его поверхности до поверхности соседних волокон $b(\theta)$ (фиг. 1), которое зависит от укладки волокон и их объемной доли.

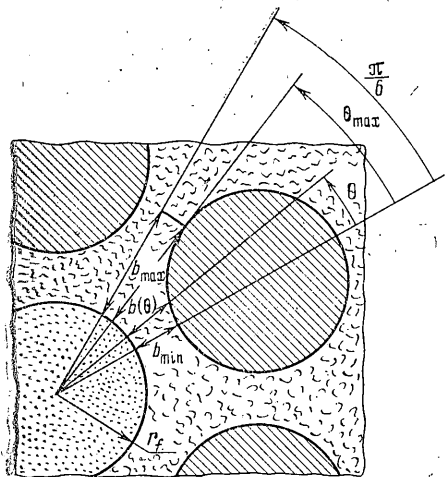
Для разрушившегося волокна, окруженного шестью соседними волокнами (плотная гексагональная укладка), эта гипотеза принимает вид $\gamma_{01} = (u_0 - u_1)/b(\theta)$, где u_0 — перемещение разрушившегося волокна, u_1 — перемещение соседнего волокна.

При анализе перераспределения напряжений в разрушившемся волокне принимается, что соседние волокна закреплены $u_1 = u_2 = u_3 = \dots = 0$. В результате касательные силы, действующие на границе разрушившегося волокна на стадии упругого деформирования матрицы на сдвиг, выражаются через перемещения зависимостью

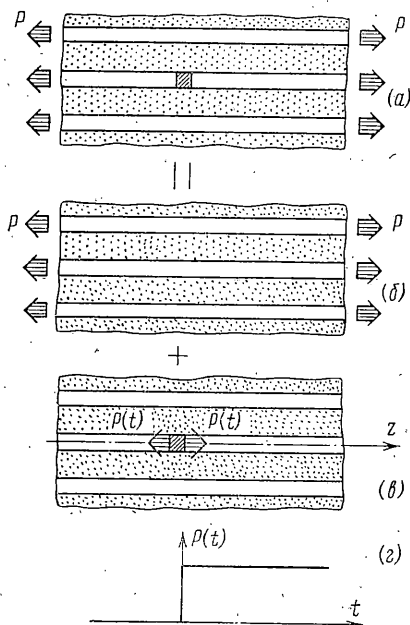
$$\bar{T}_0 = F_f E_f \alpha_y^2 u_0, \quad \alpha_y^2 = \frac{1}{d_f^2} \frac{8}{bE}, \quad b = \frac{b_c}{r_f}, \quad E = \frac{E_f}{G_m}, \quad \frac{1}{b_c} = \frac{6}{\pi} \int_0^{1/\sin} \frac{1}{b(\theta)} d\theta \quad (1.1)$$

где F_f — площадь поперечного сечения волокна, E_f — модуль упругости волокна.

В модели принимается $\sigma_f = N_f / E_f$, т. е. осевые напряжения в волокнах распределены равномерно по сечению, и волокна вплоть до разрушения деформируются упруго $\epsilon_f = \sigma_f / E_f$.



Фиг. 1



Фиг. 2

С учетом связи касательных сил с перемещениями (1.1) уравнение движения элемента разрушившегося волокна в перемещениях при упругом деформировании матрицы на сдвиг имеет вид

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \alpha_y^2 u_0 = 0, \quad a^2 = \frac{E_f}{\rho} \quad (1.2)$$

До разрушения и в начальный момент времени волокно находилось в покое, перемещения всех точек разрушившегося волокна в начальный момент времени, а также их скорости $v_0 = \partial u_0 / \partial t$ равны нулю

$$u_0(z, 0) = 0, \quad \partial u_0(z, 0) / \partial t = 0 \quad (1.3)$$

Граничные условия принимают более простой вид, если реальную схему нагружения (фиг. 2, а) заменить системой, состоящей из равномерно растянутых волокон (фиг. 2, б), и системой с самоуравновешенными силами, мгновенно приложенными к концам разрушившегося волокна (фиг. 2, в).

Нагрузка, прикладываемая к концу разрушившегося волокна, действует на него в течение всего времени, начиная с момента разрушения (фиг. 2, г)

$$\partial u_0(0, t) / \partial z = -\epsilon_f, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} u_0(z, t) = 0 \quad (1.4)$$

Полученное уравнение (1.2) с начальными данными (1.3) и граничными условиями решается методом преобразования Лапласа. При этом изображающее уравнение и граничные условия имеют вид

$$\frac{d^2 U_0(z, s)}{dz^2} - \mu^2(s) U_0(z, s) = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{dU_0}{dz}(0, s) = -\frac{\varepsilon_f}{s}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} U_0(z, s) = 0, \quad \mu^2(s) = \frac{s^2 + a^2 \alpha_y^2}{a^2}$$

Интегрирование уравнения (1.5) приводит к зависимости

$$U_0(z, s) = \frac{1}{s} \frac{\varepsilon_f a}{\sqrt{s^2 + \alpha_y^2 a^2}} \exp \left[-\frac{z}{a} \sqrt{s^2 + \alpha_y^2 a^2} \right]$$

Выражение для изображения деформации разрушенного волокна имеет вид

$$E_0(z, s) = -\frac{1}{s} \varepsilon_f \exp \left[-\frac{z}{a} \sqrt{s^2 + \alpha_y^2 a^2} \right]$$

Обратный переход к оригиналам [2, 3] дает решение поставленной задачи (1.2)–(1.4)

$$\begin{aligned} u_0(z, t) &= \varepsilon_f a \int_0^t J_0 \left(\alpha_y a \sqrt{\tau^2 - \frac{z^2}{a^2}} \right) \kappa \left(\tau - \frac{z}{a} \right) d\tau \\ \varepsilon_0(z, t) &= \varepsilon_f \alpha_y z \int_0^t \frac{J_1 \left(\alpha_y a \sqrt{\tau^2 - \frac{z^2}{a^2}} \right)}{\left(\tau^2 - \frac{z^2}{a^2} \right)^{1/2}} \kappa \left(\tau - \frac{z}{a} \right) d\tau - \varepsilon_f \kappa \left(t - \frac{z}{a} \right) \\ v_0(z, t) &= \varepsilon_f a J_0 \left(\alpha_y a \sqrt{t^2 - \frac{z^2}{a^2}} \right) \kappa \left(t - \frac{z}{a} \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь J_0, J_1 — функции Бесселя, κ — функция Хевисайда.

2. Полученные выражения (1.6) позволяют исследовать упругие волны, возникающие при разрушении, например борных волокон, в бороалюминиевом композиционном материале. Для анализа результатов основные зависимости, а также входящие в них переменные приводятся к безразмерному виду. Как и в [1], вводится параметр $\eta = \varepsilon_f / \gamma_s$, характеризующий уровень деформации волокон в момент разрушения, и параметр $u_g = \gamma_s b_c$, характеризующий перемещение волокон до начала пластических сдвиговых деформаций матрицы. Безразмерные переменные примем в форме $z^\circ = z/d_f$, $t^\circ = ta/d_f$.

В результате первое выражение в (1.6) приводится к следующему безразмерному виду:

$$\frac{u_0}{u_g} = \frac{2\eta}{b} \int_0^{t^\circ} J_0(\beta_y \sqrt{\tau^{\circ 2} - z^{\circ 2}}) \kappa(\tau^\circ - z^\circ) d\tau^\circ, \quad \beta_y = \alpha_y d_f$$

Для получения картины изменения напряжений по длине разрушенного волокна во времени необходимо перейти от системы граничных условий на (фиг. 2, *б*) к системе, показанной на (фиг. 2, *а*). Для этого на полученное решение накладывается напряжение равномерного растяжения σ_f^∞ .

Тогда в безразмерных координатах зависимость для напряжений в разрушившемся волокне примет вид

$$\frac{\sigma_{f0}}{\sigma_f^\infty} = 1 - \kappa(t^\circ - z^\circ) + \beta_y z^\circ \int_0^{t^\circ} \frac{J_1(\beta_y \sqrt{\tau^{\circ 2} - z^{\circ 2}})}{(\tau^{\circ 2} - z^{\circ 2})^{1/2}} \kappa(\tau^\circ - z^\circ) d\tau^\circ$$

Выражение для скоростей также приводится к безразмерному виду

$$v_0/a = \varepsilon_f J_0(\beta_y \sqrt{t^{\circ 2} - z^{\circ 2}}) \kappa(t^\circ - z^\circ) \quad (2.1)$$

Расчеты приводились для следующих значений параметров: $E=E_f/G_m=14.82$, $\eta=0.14$. Параметр η выбирается таким образом, чтобы касательные напряжения на границе волокна и матрицы не превышали предела текучести матрицы на сдвиг.

Как отмечалось в [1], модель, построенная на гипотезе о сдвиговых деформациях матрицы, применима к композиционным материалам с высокими объемными долями волокон. В силу этого, для анализа динамических процессов, происходящих в бороалюминиевом композите при разрыве волокна, объемная доля волокон бралась равной $V_f=0.6$.

На фиг. 3, а представлены кривые перемещений u_0/u_g вдоль разрушенного волокна в различные моменты времени. Кривая 1 соответствует $t^\circ=6$, а кривая 2 построена для $t^\circ=17.5$. На участке волокна, вовлеченного в движение, наблюдается волнообразный процесс перемещения точек, затухающий по мере продвижения волны вдоль волокна ($z^\circ=0$).

На фиг. 3, б представлены колебания конца разрушенного волокна. Из фигуры видно, что колебания конца разрушенного волокна, постепенно затухая, происходят около некоторого положения равновесия. Это положение равновесия соответствует статическому решению [1]. Затухание колебаний конца волокна вызвано отводом энергии, которая перераспределяется бегущими волнами на все большую длину волокна.

Анализ перераспределения напряжений во времени (фиг. 4, а, б) показал, что вслед за волной разгрузки, которая образуется в момент разрыва волокна и пробегает по всей оставшейся длине волокна, формируется волна перегрузки (кривые 1, 2 на фиг. 4, а соответствуют $t^\circ=4.25$ и $t^\circ=17.5$; кривая на фиг. 4, б построена для $t^\circ=25$).

В результате через некоторое время (в частности при $V_f=0.6$ и $\eta=0.14$) это время составляет $t^\circ=4.2$ (фиг. 4, а), волна достигает уровня напряжений, соответствующих неразрушенному волокну и превосходит его.

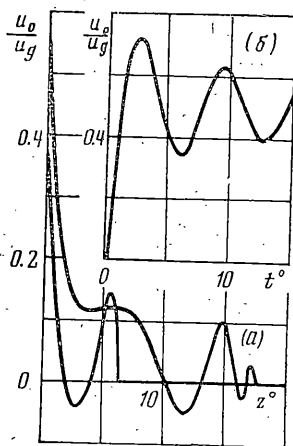
Далее перегрузка возрастает и в момент времени $t^\circ=11$ на длине $z^\circ=10.3$ ($V_f=0.6$, $\eta=0.14$) достигает максимума $\sigma_{f0}/\sigma_f^\infty=1.38$. Достигнув максимума, волна перегрузки пробегает вслед за волной разгрузки по всей оставшейся длине разрушенного волокна с постоянной амплитудой, но сужаясь и постепенно вырождаясь в кратковременное возбуждение (фиг. 4, а, б). Аналогичным образом ведут себя и все последующие волны частичной разгрузки и перегрузки.

Колебания концевых участков затухают, и динамическое распределение напряжений постепенно сходится к статическому равновесию. На фиг. 4, б видно, что уже через промежуток времени $t^\circ=25$ на расстоянии $z^\circ=10$ распределение напряжений имеет уже статический характер.

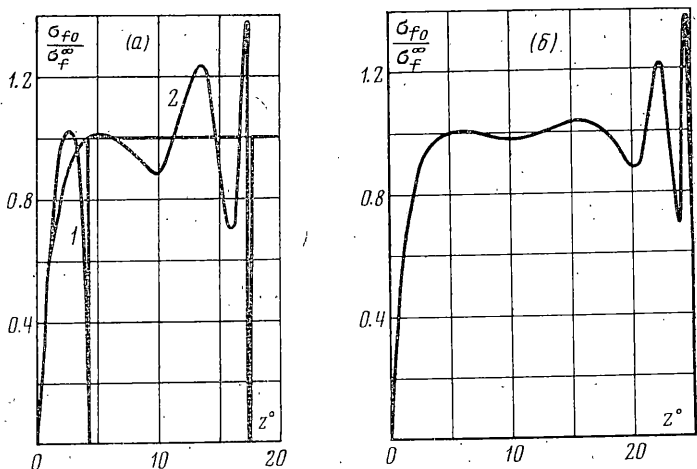
Распределение скоростей частиц также отражает колебательный характер движения разрушенного волокна (фиг. 5, б). Наблюдается картина, аналогичная распределению напряжений (кривые 1, 2 на фиг. 5 соответствуют $t^\circ=6$ и $t^\circ=17.5$). Очередная волна, достигнув своего максимума, продолжает распространяться с постоянной амплитудой, но постепенно сужаясь. Из сопоставления распределения скоростей частиц конца разрушенного волокна (фиг. 6, $z^\circ=0$) и распределения скоростей по длине волокна в некоторый момент времени следует, что очередная волна образуется через определенный промежуток времени, который остается постоянным и является характеристикой этого динамического процесса.

Определить эту константу можно из асимптотического выражения функции Бесселя элементарными функциями для значений аргумента, много больших нуля. Тогда скорость (2.1) конца разрушенного волокна имеет следующее асимптотическое представление:

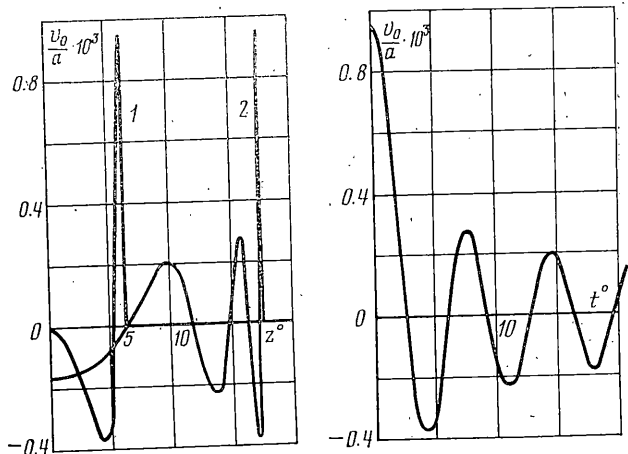
$$\frac{v_0}{a}(0, t^\circ) \approx \varepsilon_f \sqrt{\frac{2}{\pi \beta_v t^\circ}} \cos\left(\beta_v t^\circ - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.2)$$



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Фиг. 6

Время, через которое образуются новые волны, равно полупериоду функции (2.2) $t_b^{\circ} = \pi / \beta_v$. В данном случае $t_b^{\circ} = 3.75$ (фиг. 5, 6). Константа t_b° выражается через β_v , следовательно, она зависит как от соотношения модулей упругости компонентов, так и от их объемных долей. С увеличением объемной доли волокон частота образования волн в динамическом процессе перераспределения напряжений увеличивается.

Наиболее важным из полученных результатов является установление того факта, что вслед за волной разгрузки в разрушившемся волокне формируется волна перегрузки. Эта волна перегрузки пробегает по значительной длине волокна и может вызвать его последующие разрушения, дробления, наблюдаемые экспериментально.

Поступила 1 VIII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Овчинский А. С., Копьев И. М., Сахарова Е. Н., Москвитин В. В. Перераспределение напряжений при разрыве хрупких волокон в металлических композиционных материалах. Механика полимеров, 1977, № 1.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1973.
3. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., «Наука», 1974.