МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1979

УДК 531.55:521.1

ОРИЕНТАЦИЯ СПУТНИКА В ЗАДАННОМ НАПРАВЛЕНИИ

Л. С. СААКЯН

(Ереван)

Дается способ построения управляющих моментов, приложенных к спутнику, вращающемуся вокруг центра масс [1]. Рассматривается ограниченная постановка задачи, т. е. предполагается, что центр масс спутника движется как материальная точка по кеплеровской круговой орбите. Под действием этих моментов осуществляется стабилизация жестко связанной со спутником оси по направлению радиус-вектора стационарной круговой орбиты. В случае спутника-гиростата рассматривается задача построения управляющих моментов, приложенных к маховикам, под действием которых осуществляется стабилизация жестко связанных со спутником-гиростатом ортогональных осей по направлениям радиус-вектора и нормали круговой орбиты [2, 3].

1. Пусть центр масс спутника описывает круговую орбиту в ньютоновском поле сил. Будем рассматривать ограниченную задачу, пренебрегая влиянием движения вокруг центра масс на движение центра масс.

В качестве начала инерциальной системы координат $O_1\xi\eta\zeta$ примем притягивающий центр O_1, начало подвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$ возьмем в центре масс O спутника и оси направим по главным центральным осям инерции. Введем еще орбитальную систему осей координат $Oxyz$, ось z которой направлена по прямой OO_1, ось x — в сторону движения центра масс по прямой ортогональной оси z и расположенной в плоскости орбиты, ось y дополняет оси x и z до правого триедра. Обозначим через α_i, β_i, γ_i $(i=1, 2, 3)$ косинусы углов между осями xyz и $x_1x_1x_3$:

$$\cos(z, x_i)=\alpha_i, \cos(y, x_i)=\beta_i, \cos(x, x_i)=\gamma_i \quad (i=1, 2, 3)$$

Орты осей z и y обозначим через $\alpha^T=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\beta^T=(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Символ T означает транспонирование.

Пусть в теле задан некоторый орт $\mathbf{n}^T=(n_1, n_2, n_3)$, который занимает неизменное положение в системе координат $Ox_1x_2x_3$.

Задача ориентации спутника в заданном направлении α состоит в отыскании такого управляющего момента $\mathbf{M}$, который, будучи приложенным к спутнику, совмещает вектор $\mathbf{n}$ с вектором α и стабилизирует это направление.

Уравнения абсолютного движения спутника под действием момента $\mathbf{M}$, с учетом моментов гравитационных сил, имеют вид [4]:

$$\begin{gathered}\Theta\omega^{\cdot}+\omega\times\Theta\omega-3\omega_0{}^2(\alpha\times\Theta\alpha)=\mathbf{M}\\ \alpha^{\cdot}=\alpha\times\omega-\omega_0(\alpha\times\beta), \beta^{\cdot}=\beta\times\omega\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь ω_0 — угловая скорость вращения спутника по орбите, ω — вектор мгновенной угловой скорости вращения спутника вокруг центра масс, Θ — тензор инерции спутника для точки O, $\mathbf{M}$ — главный момент управляющих сил, действующих на спутник.

Угловая скорость спутника по отношению к системе координат $Oxyz$ равна

$$\boldsymbol{\omega}_1=\boldsymbol{\omega}-\omega_0\boldsymbol{\beta} \tag{1.2}$$

Подставив значение ω из (1.2) в (1.1), получим

$$\begin{gathered}\Theta\boldsymbol{\omega}_1^{\cdot}+\omega_0\Theta(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\omega}_1)+\boldsymbol{\omega}_1\times\Theta\boldsymbol{\omega}_1+\omega_0(\boldsymbol{\omega}_1\times\Theta\boldsymbol{\beta})+\\ +\omega_0(\boldsymbol{\beta}\times\Theta\boldsymbol{\omega}_1)+\omega_0^2(\boldsymbol{\beta}\times\Theta\boldsymbol{\beta})-3\omega_0^2(\boldsymbol{\alpha}\times\Theta\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{M}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\cdot}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\omega}_1,\ \boldsymbol{\beta}^{\cdot}=\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\omega}_1\end{gathered} \tag{1.3}$$

Рассмотрим движение спутника под действием момента

$$\mathbf{M}=-\boldsymbol{\omega}_1-3\omega_0^2(\boldsymbol{\alpha}\times\Theta\mathbf{n})+\omega_0^2(\boldsymbol{\beta}\times\Theta\mathbf{m})+\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{grad}\,U \tag{1.4}$$

$$U=\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{3}(\beta_i-m_i)^2,\qquad \lambda=\text{const}>0$$

где $\mathbf{m}$ — некоторый единичный вектор, ортогональный орту $\mathbf{n}$, неподвижный в системе координат $Ox_1x_2x_3$; знак $\mathbf{grad}\,U$ означает, что операция градиента берется по компонентам β_i ($i=1, 2, 3$).

Рассмотрим функцию

$$\begin{gathered}2V=Ap_1^2+Bq_1^2+Cr_1^2+3\omega_0^2[A(\alpha_1-n_1)^2+B(\alpha_2-n_2)^2+C(\alpha_3-n_3)^2]-\\ -\omega_0^2[A(\beta_1-m_1)^2+B(\beta_2-m_2)^2+C(\beta_3-m_3)^2]+\lambda\sum_{i=1}^{3}(\beta_i-m_i)^2\end{gathered} \tag{1.5}$$

в которой p_1, q_1, r_1 — проекции относительной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_1$ на оси подвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$; A, B, C — главные центральные моменты инерции спутника.

Функция (1.5) при

$$\lambda>\omega_0^2\max\{A, B, C\} \tag{1.6}$$

является определенно-положительной функцией относительно компонент векторов $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\beta}-\mathbf{m}$, а производная этой функции по времени, составленная в силу системы уравнений движения (1.3), (1.4), имеет вид

$$V^{\cdot}=-\boldsymbol{\omega}_1^2=-(p_1^2+q_1^2+r_1^2) \tag{1.7}$$

т. е. является знакопостоянной отрицательной функцией. Так как $\boldsymbol{\omega}_1=0$, $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{m}$ является решением уравнений движения (1.3), (1.4), то на основании сказанного выше это решение устойчиво по Ляпунову.

Система уравнений (1.3), (1.4) имеет единственное положение относительного равновесия

$$\boldsymbol{\omega}_1=0,\ \boldsymbol{\alpha}=\mathbf{n},\ \boldsymbol{\beta}=\mathbf{m} \tag{1.8}$$

Действительно, указанные векторы удовлетворяют системе (1.3), (1.4). Покажем, что других положений относительного равновесия указанная система не имеет.

Для таких решений $V^{\cdot}=0$. Для рассматриваемого случая $V^{\cdot}=-\boldsymbol{\omega}_1^2$, значит, обязательно должно быть $\boldsymbol{\omega}_1=0$. Тогда из системы уравнений движения (1.3), (1.4) получаем

$$\begin{gathered}3[\boldsymbol{\alpha}\times\Theta(\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{n})]=\boldsymbol{\beta}\times[\Theta(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{m})+K\mathbf{m}]\\ \boldsymbol{\alpha}^{\cdot}=0,\ \boldsymbol{\beta}^{\cdot}=0,\ K>\max\{A, B, C\},\ \lambda=\omega_0^2K=\text{const}\end{gathered} \tag{1.9}$$

Покажем, что при соответствующем выборе величины K уравнение (1.9) имеет единственное решение $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{m}$.

Умножив обе части уравнения (1.9) скалярно на вектор α, соответственно на β, получим

$$(\beta\cdot[\alpha\times\Theta(\alpha-\mathbf{n})])=0,\quad (\alpha\cdot\{\beta\times[\Theta(\beta-\mathbf{m})+K\mathbf{m}]\})=0 \tag{1.10}$$

Из (1.10) следует, что либо

$$\beta\times[\Theta(\beta-\mathbf{m})+K\mathbf{m}]=0,\quad \alpha\times\Theta(\alpha-\mathbf{n})=0 \tag{1.11}$$

либо векторы α, β перпендикулярны соответственно векторам

$$\beta\times[\Theta(\beta-\mathbf{m})+K\mathbf{m}]\ \text{и}\ \alpha\times\Theta(\alpha-\mathbf{n}) \tag{1.12}$$

т. е. векторы $\Theta(\beta-\mathbf{m})+K\mathbf{m}$, $\Theta(\alpha-\mathbf{n})$ лежат в той же плоскости, что и векторы α и β.

Рассмотрим уравнение (1.11). Из $\beta\times[\Theta(\beta-\mathbf{m})+K\mathbf{m}]=0$ следует, что либо

$$\Theta(\beta-\mathbf{m})+K\mathbf{m}=0,\ \text{либо}\ l\beta=\Theta(\beta-\mathbf{m})+K\mathbf{m},\ l=\mathrm{const}$$

Уравнение $\Theta(\beta-\mathbf{m})+K\mathbf{m}=0$ запишем в виде $\Theta\beta=(\Theta-KE)\mathbf{m}$, где E — единичная матрица третьего порядка. Из равенства векторов $\Theta\beta$, $(\Theta-KE)\mathbf{m}$ находим

$$\beta_1=\left(1-\frac{K}{A}\right)m_1,\quad \beta_2=\left(1-\frac{K}{B}\right)m_2,\quad \beta_3=\left(1-\frac{K}{C}\right)m_3$$

Подставив найденные значения β_i ($i=1, 2, 3$) в соотношение $|\beta|=1$, получим ($|\mathbf{m}|=1$)

$$\frac{K}{A}\left(\frac{K}{A}-2\right)m_1^2+\frac{K}{B}\left(\frac{K}{B}-2\right)m_2^2+\frac{K}{C}\left(\frac{K}{C}-2\right)m_3^2=0$$

Очевидно, вектор $\Theta(\beta-\mathbf{m})+K\mathbf{m}$ не может быть нулевым, если число K выбрать согласно условию

$$K>2\max\{A, B, C\} \tag{1.13}$$

Аналогично, из равенства $(\Theta-lE)\beta=(\Theta-KE)\mathbf{m}$ находим

$$\left(\frac{A-K}{A-l}\right)^2 m_1^2+\left(\frac{B-K}{B-l}\right)^2 m_2^2+\left(\frac{C-K}{C-l}\right)^2 m_3^2=1 \tag{1.14}$$

Уравнение (1.14) в пространстве переменных m_1, m_2, m_3 определяет уравнение эллипсоида с полуосями

$$a=(l-A)/(K-A),\ b=(l-B)/(K-B),\ c=(l-C)/(K-C)$$

Очевидно, $a>1$, $b>1$, $c>1$ при $l>K$ и $a<1$, $b<1$, $c<1$ при $l<K$, т. е. при $l\neq K$ эллипсоид (1.14) не имеет со сферой $m_1^2+m_2^2+m_3^2=1$ общих точек. При $l=K$ имеем $\beta=\mathbf{m}$. Таким образом, уравнение $\beta\times[\Theta(\beta-\mathbf{m})+K\mathbf{m}]=0$ при (1.13) имеет единственное решение $\beta=\mathbf{m}$. Из $\alpha\times\Theta(\alpha-\mathbf{n})=0$ следует: $\alpha=\mathbf{n}$ либо $h\alpha=\Theta(\alpha-\mathbf{n})$, $h=\mathrm{const}$. Аналогично из равенства $(\Theta-hE)\alpha=\Theta\mathbf{n}$ находим

$$\alpha_1=\frac{A}{A-h}n_1,\quad \alpha_2=\frac{B}{B-h}n_2,\quad \alpha_3=\frac{C}{C-h}n_3$$

Подставив найденные значения α_i ($i=1, 2, 3$) в соотношение $|\alpha|=1$, получим ($|\mathbf{n}|=1$)

$$\frac{A^2}{(A-h)^2}n_1^2+\frac{B^2}{(B-h)^2}n_2^2+\frac{C^2}{(C-h)^2}n_3^2=1 \tag{1.15}$$

При $h>0$ имеем неравенства $a_1<1$, $b_1<1$, $c_1<1$, а при $h<0$ — неравенства $a_1>1$, $b_1>1$, $c_1>1$ (a_1, b_1, c_1 — полуоси эллипсоида (1.15)), т. е. при $h\neq 0$ эллипсоид (1.15) со сферой $n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$ пересечения не имеет. При $h=0$ имеем $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{n}$.

Итак, уравнения (1.11) при условии (1.13) имеют единственное решение $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{m}$. Пусть теперь существуют такие значения $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0$, $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_0$, отличные от $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$, что векторы $\boldsymbol{\beta}_0\times[\Theta(\boldsymbol{\beta}_0-\mathbf{m})+K\mathbf{m}]$ и $\boldsymbol{\alpha}_0\times\Theta(\boldsymbol{\alpha}_0-\mathbf{n})$ перпендикулярны соответственно векторам $\boldsymbol{\alpha}_0$ и $\boldsymbol{\beta}_0$, т.е. векторы $\Theta(\boldsymbol{\beta}_0-\mathbf{m})+K\mathbf{m}$, $\Theta(\boldsymbol{\alpha}_0-\mathbf{n})$ лежат в той же плоскости, что и векторы $\boldsymbol{\alpha}_0$ и $\boldsymbol{\beta}_0$. Тогда, умножая обе части уравнения (1.9) **векторно на** $\boldsymbol{\beta}_0$, получим

$$3\{\boldsymbol{\beta}_0\times[\boldsymbol{\alpha}_0\times\Theta(\boldsymbol{\alpha}_0-\mathbf{n})]\}=\boldsymbol{\beta}_0\times\{\boldsymbol{\beta}_0\times[\Theta(\boldsymbol{\beta}_0-\mathbf{m})+K\mathbf{m}]\}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_0,\quad \lambda_1=\mathrm{const} \tag{1.16}$$

Раскрывая (1.16) по правилу двойного векторного произведения, будем иметь

$$\boldsymbol{\beta}_0\times[\boldsymbol{\alpha}_0\times\Theta(\boldsymbol{\alpha}_0-\mathbf{n})]=\boldsymbol{\alpha}_0\cdot(\boldsymbol{\beta}_0\cdot\Theta(\boldsymbol{\alpha}_0-\mathbf{n}))-\Theta(\boldsymbol{\alpha}_0-\mathbf{n})(\boldsymbol{\alpha}_0\cdot\boldsymbol{\beta}_0)={}^1/_3\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_0 \tag{1.17}$$

$$(\boldsymbol{\beta}_0\cdot\Theta(\boldsymbol{\alpha}_0-\mathbf{n}))={}^1/_3\lambda_1\ ((\boldsymbol{\alpha}_0\cdot\boldsymbol{\beta}_0)=0)$$

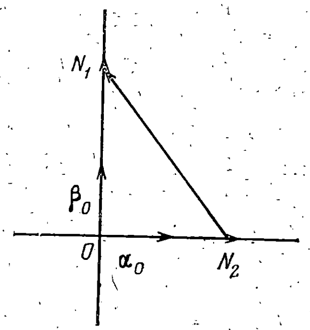
$$\boldsymbol{\beta}_0\times\{\boldsymbol{\beta}_0\times[\Theta(\boldsymbol{\beta}_0-\mathbf{m})+K\mathbf{m}]\}=\boldsymbol{\beta}_0\cdot(\boldsymbol{\beta}_0\cdot[\Theta(\boldsymbol{\beta}_0-\mathbf{m})+K\mathbf{m}])-$$
$$-[\Theta(\boldsymbol{\beta}_0-\mathbf{m})+K\mathbf{m}](\boldsymbol{\beta}_0\cdot\boldsymbol{\beta}_0)=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_0$$

$$\boldsymbol{\beta}_0\cdot(\boldsymbol{\beta}_0\cdot[\Theta(\boldsymbol{\beta}_0-\mathbf{m})+K\mathbf{m}])=[\Theta(\boldsymbol{\beta}_0-\mathbf{m})+K\mathbf{m}]+3(\boldsymbol{\beta}_0\cdot\Theta(\boldsymbol{\alpha}_0-\mathbf{n}))\cdot\boldsymbol{\alpha}_0$$

Из равенств (1.16), (1.17) следует, что треугольник ON_1N_2 прямоугольный ($\mathbf{ON}_1$—$\boldsymbol{\beta}_0\cdot(\boldsymbol{\beta}_0\cdot[\Theta(\boldsymbol{\beta}_0-\mathbf{m})+K\mathbf{m}])$, $\mathbf{ON}_2$—$3(\boldsymbol{\beta}_0\cdot\Theta(\boldsymbol{\alpha}_0-\mathbf{n}))\cdot\boldsymbol{\alpha}_0$), т. е.

$$|\Theta(\boldsymbol{\beta}_0-\mathbf{m})+K\mathbf{m}|^2=|\boldsymbol{\beta}_0\cdot(\boldsymbol{\beta}_0\cdot[\Theta(\boldsymbol{\beta}_0-\mathbf{m})+K\mathbf{m}])|^2+9|(\boldsymbol{\beta}_0\cdot\Theta(\boldsymbol{\alpha}_0-\mathbf{n}))\cdot\boldsymbol{\alpha}_0|^2 \tag{1.18}$$

Обозначим через K_0 наибольший действительный корень квадратного уравнения (1.18). Если $K_0\leqslant 2\max\{A, B, C\}$, то при $K>2\max\{A, B, C\}\geqslant K_0$ равенство (1.18) не имеет места, т. е треугольник ON_1N_2 не прямоугольный. Следовательно, в этом случае вектор $\Theta(\boldsymbol{\beta}_0-\mathbf{m})+K\mathbf{m}$ не может лежать в одной плоскости с $\boldsymbol{\alpha}_0$, $\boldsymbol{\beta}_0$. Значит, из уравнения $(\boldsymbol{\alpha}_0\cdot\{\boldsymbol{\beta}_0\times[\Theta(\boldsymbol{\beta}_0-\mathbf{m})+K\mathbf{m}]\})=0$ следует лишь равенство $\boldsymbol{\beta}_0\times[\Theta(\boldsymbol{\beta}_0-\mathbf{m})+K\mathbf{m}]=0$. Если же $K_0\geqslant 2\max\{A, B, C\}$, то K выбираем согласно условию



$$K>K_0\geqslant 2\max\{A, B, C\} \tag{1.19}$$

Из изложенного выше следует, что многообразие N точек, где $V^{\cdot}=0$ не содержит других целых движений системы (1.3), (1.4), кроме движения (1.8), если выполнено условие (1.19), кроме того, функции (1.5), (1.7) удовлетворяют всем условиям теоремы Барбашина — Красовского об асимптотической устойчивости в целом [5]. Следовательно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Если $K_0\geqslant 2\max\{A, B, C\}$, где K_0 — наибольший действительный корень квадратного уравнения (1.18), то при выполнении условия (1.19) управляющий момент $\mathbf{M}$ (1.4) можно выбрать так, чтобы спутник был сориентирован в заданных направлениях $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$. При этом любое движение спутника либо является положением относительного равновесия, либо асимптотически приближается к такому положению. Положение относительного равновесия $\boldsymbol{\omega}_1=0$, $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{m}$ асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Отметим, что орт $\mathbf{m}$ выбирается только по условию $(\mathbf{m}\cdot\mathbf{n})=0$.

Замечание. В управляющий момент **M** (1.4) входят проекции мгновенной относительной угловой скорости ω_1. Для определения этих величин, вообще говоря, необходимо иметь в составе приборов управления датчики угловой скорости. Поэтому такого рода управляющий момент оказывается невозможным создать, если указанных датчиков не имеется.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть заданы два ортогональных орта **n** и **m**, жестко связанных со спутником. Предположим, что в подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$ измеряются лишь проекции векторов α, β, $\beta^\cdot$. Требуется, используя проекции векторов α, β, $\beta^\cdot$, построить управляющий момент **M**, стабилизирующий заданные направления **n**, **m** по направлениям радиус-вектора и нормали круговой орбиты.

Из системы (1.3) можно установить соотношение

$$\beta\times\beta^\cdot=-[\omega_1-\beta(\omega_1\cdot\beta)] \tag{1.20}$$

Рассмотрим управляющий момент

$$\mathbf{M}=\beta\times\beta^\cdot-3\omega_0^2(\alpha\times\Theta\mathbf{n})+\omega_0^2(\beta\times\Theta\mathbf{m})+\lambda(\mathbf{m}\times\beta),\quad \lambda=\mathrm{const} \tag{1.21}$$

Уравнения движения спутника под действием момента (1.21) имеют вид

$$\begin{gathered}\Theta\omega_1^\cdot+\omega_0\Theta(\beta\times\omega_1)+\omega_1\times\Theta\omega_1+\omega_0(\omega_1\times\Theta\beta)+\omega_0(\beta\times\Theta\omega_1)+\omega_0^2(\beta\times\Theta\beta)-\\-3\omega_0^2(\alpha\times\Theta\alpha)=\beta\times\beta^\cdot-3\omega_0^2(\alpha\times\Theta\mathbf{n})+\lambda(\mathbf{m}\times\beta)+\omega_0^2(\beta\times\Theta\mathbf{m})\\ \alpha^\cdot=\alpha\times\omega_1,\ \beta^\cdot=\beta\times\omega_1\end{gathered} \tag{1.22}$$

Рассмотрим снова определенно-положительную функцию (1.5), (1.6). Производная этой функции по времени, составленная в силу уравнений движения (1.22), имеет вид [6]

$$V^\cdot=[\omega_1\cdot(\beta\times\beta^\cdot)]=-[\omega_1^2-(\omega_1\cdot\beta)^2]=-(\omega_1\times\beta)^2 \tag{1.23}$$

Функция (1.23) является знакопостоянной отрицательной функцией, а многообразие точек, где $V^\cdot=0$, имеет вид

$$(\omega_1\times\beta)^2=0,\qquad \omega_1=h\beta,\qquad h=\mathrm{const}$$

Можно показать, что $\omega_1\times\beta=0$ имеет место только при $\omega_1=0$.

Подставив теперь значение $\omega_1=0$ в уравнение движения (1.22), получим

$$3[\alpha\times\Theta(\alpha-\mathbf{n})]=\beta\times[\Theta(\beta-\mathbf{m})+K\mathbf{m}],\quad \alpha^\cdot=0,\ \beta^\cdot=0 \tag{1.24}$$

где $K>\max\{A, B, C\}$, $\lambda=\omega_0^2 K=\mathrm{const}$.

Выбирая параметр K в выражении (1.24), согласно условию (1.19), получим, что уравнение (1.24) имеет единственное решение $\alpha=\mathbf{n}$, $\beta=\mathbf{m}$ (доказательство теоремы 1).

Следовательно, при выполнении условия (1.19) спутник под действием управляющего момента (1.21) либо находится в положении относительного равновесия $\omega_1=0$, $\alpha=\mathbf{n}$, $\beta=\mathbf{m}$, либо неограниченно приближается к такому положению. Положение относительного равновесия $\omega_1=0$, $\alpha=\mathbf{n}$, $\beta=\mathbf{m}$ асимптотически устойчиво по Ляпунову.

2. Пусть по главным осям инерции спутника расположены оси трех однородных симметричных маховиков. Маховики приводятся во вращение специальными двигателями. Положим, что силовая функция ньютоновского притяжения спутника имеет вид [4]:

$$U_0(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=\mu_0MR_0^{-1}-3\mu_0(2R_0^3)^{-1}[C_1\alpha_1^2+C_2\alpha_2^2+C_3\alpha_3^2-{}^1/_3(C_1+C_2+C_3)]$$

Здесь M — масса спутника-гиростата; C_i ($i=1,\ 2,\ 3$) — его главные центральные моменты инерции; μ_0 — гравитационная постоянная.

Уравнения абсолютного движения спутника-гиростата имеют вид

$$\Theta^*\omega^{\cdot}+\omega\times\Theta^*\omega+\omega\times\mathbf{H}+\mathbf{H}^{\cdot}-3\omega_0^2(\alpha\times\Theta^*\alpha)=0 \qquad (2.1)$$
$$\alpha^{\cdot}=\alpha\times\omega-\omega_0(\alpha\times\beta), \quad \beta^{\cdot}=\beta\times\omega$$

Здесь Θ^* — тензор инерции спутника-гиростата; $\mathbf{H}^T$ — вектор $(I_1\Omega_1, I_2\Omega_2, I_3\Omega_3)$; I_i, Ω_i $(i=1, 2, 3)$ — осевые моменты инерции и относительные угловые скорости маховиков. Уравнения, описывающие вращательное движение маховиков, без учета внутреннего трения имеют вид

$$I_1(\Omega_1^{\cdot}+p^{\cdot})=-M_1,\ I_2(\Omega_2^{\cdot}+q^{\cdot})=-M_2,\ I_3(\Omega_3^{\cdot}+r^{\cdot})=-M_3 \qquad (2.2)$$

где p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости ω спутника на оси подвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$; $-M_i$ $(i=1, 2, 3)$ — моменты двигателей, приводящие маховики во вращение. Из уравнений (2.1), (2.2) следуют уравнения

$$(\Theta^*-\Theta)\,\omega^{\cdot}+\omega\times\Theta^*\omega+\omega\times\mathbf{H}-3\omega_0^2(\alpha\times\Theta^*\alpha)=\mathbf{M} \qquad (2.3)$$
$$\alpha^{\cdot}=\alpha\times\omega-\omega_0(\alpha\times\beta), \quad \beta^{\cdot}=\beta\times\omega$$

где $\mathbf{M}^T$ — вектор (M_1, M_2, M_3), а Θ — матрица 3×3, у которой по главной диагонали элементы I_1, I_2, I_3, а остальные элементы — нули.

Пусть заданы два ортогональных орта $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$, жестко связанных со спутником-гиростатом. Требуется к маховикам приложить управляющий момент $\mathbf{M}$, позволяющий стабилизировать орт $\mathbf{n}$ в направлении радиус-вектора круговой орбиты, а орт $\mathbf{m}$ в направлении нормали к плоскости стационарной орбиты. Подставив значение ω из (1.2) в (2.3), получим

$$\begin{gathered}(\Theta^*-\Theta)\,\omega_1^{\cdot}+\omega_0(\Theta^*-\Theta)(\beta\times\omega_1)+(\omega_1+\omega_0\beta)\times\Theta^*(\omega_1+\omega_0\beta)+\\+\omega_1\times\mathbf{H}+\omega_0(\beta\times\mathbf{H})-3\omega_0^2(\alpha\times\Theta^*\alpha)=\mathbf{M},\ \alpha^{\cdot}=\alpha\times\omega_1,\ \beta^{\cdot}=\beta\times\omega_1\end{gathered} \qquad (2.4)$$

Рассмотрим момент

$$\begin{gathered}\mathbf{M}=-\omega_1-3\omega_0^2(\alpha\times\Theta^*\mathbf{n})+\omega_0^2(\beta\times\Theta^*\mathbf{m})-\omega_0\Theta(\beta\times\omega_1)+\\+\omega_0(\beta\times\mathbf{H})+\beta\times\operatorname{grad}U,\quad U={}^1/_2\lambda[(\beta_1-m_1)^2+(\beta_2-m_2)^2+(\beta_3-m_3)^2] \qquad (2.5)\\\lambda=\mathrm{const}>0\end{gathered}$$

Умножив первую группу уравнений (2.4), (2.5) скалярно на вектор ω_1, получим

$$\begin{gathered}{}^1/_2\frac{d}{dt}\{(C_1-I_1)p_1^2+(C_2-I_2)q_1^2+(C_3-I_3)r_1^2+\\+3\omega_0^2[C_1(\alpha_1-n_1)^2+C_2(\alpha_2-n_2)^2+C_3(\alpha_3-n_3)^2]-\omega_0^2[C_1(\beta_1-m_1)^2+\\+C_2(\beta_2-m_2)^2+C_3(\beta_3-m_3)^2]+2U\}=-(p_1^2+q_1^2+r_1^2)\end{gathered}$$

Функция

$$\begin{gathered}2V=(C_1-I_1)p_1^2+(C_2-I_2)q_1^2+(C_3-I_3)r_1^2+\\+3\omega_0^2[C_1(\alpha_1-n_1)^2+C_2(\alpha_2-n_2)^2+C_3(\alpha_3-n_3)^2]+\\+(\lambda-\omega_0^2C_1)(\beta_1-m_1)^2+(\lambda-\omega_0^2C_2)(\beta_2-m_2)^2+\\+(\lambda-\omega_0^2C_3)(\beta_3-m_3)^2\end{gathered}$$

при $\lambda>\omega_0^2\max\{C_1, C_2, C_3\}$ является определенно-положительной функцией относительно компонент векторов ω_1, $\alpha-\mathbf{n}$, $\beta-\mathbf{m}$, а ее производная по времени, составленная в силу системы уравнений (2.4), (2.5),— знакопостоянная отрицательная функция.

Аналогично тому, как сделано в п. 1, можно показать, что при выполнении условия $K>K_0\geqslant 2\max\{C_1, C_2, C_3\}$ система (2.4), (2.5) имеет единственное положение относительного равновесия

$$\omega_1=0, \quad \alpha=\mathbf{n}, \quad \beta=\mathbf{m} \tag{2.6}$$

т. е. многообразие N точек, где $V^{\cdot}=0$, не содержит других целых движений системы (2.4), (2.5), кроме движения (2.6). Следовательно, положение относительного равновесия (2.6) асимптотически устойчиво по Ляпунову [5].

Уравнения, описывающие вращательное движение маховиков, при наличии момента (2.5) имеют вид

$$\mathbf{H}^{\cdot}+\Theta\omega_1^{\cdot}=\omega_1+3\omega_0^2(\alpha\times\Theta^*\mathbf{n})-\omega_0^2(\beta\times\Theta^*\mathbf{m})-\omega_0(\beta\times\mathbf{H})-\beta\times\operatorname{grad} U \tag{2.7}$$

В выражении управляющего момента M (2.5) входят проекции вектора мгновенной относительной угловой скорости ω_1, а также векторов α, β, $\mathbf{H}$. Поэтому для формирования момента (2.5) в составе приборов управления необходимо иметь соответствующие датчики, измеряющие эти величины. Управляющий момент (2.5) можно построить, зная лишь проекции векторов α, β, $\mathbf{H}$, либо α, β, ω_1, так как при известных α, β, ω_1 уравнение (2.7) представляет собой линейное неоднородное уравнение первого порядка относительно $\mathbf{H}$. Интегрируя (2.7), можно определить $\mathbf{H}$. Аналогично при известных α, β, $\mathbf{H}$ из (2.7) можно определить ω_1.

В положении относительного равновесия (2.6) маховики будут вращаться согласно уравнениям

$$\mathbf{H}^{\cdot}+\omega_0(\mathbf{m}\times\mathbf{H})=3\omega_0^2(\mathbf{n}\times\Theta^*\mathbf{n})-\omega_0^2(\mathbf{m}\times\Theta^*\mathbf{m}) \tag{2.8}$$

Таким образом, если известны ψ, ϑ, φ — углы Эйлера ориентации спутника, то вектор момента количеств движения маховиков должен удовлетворять уравнению (2.8). Следовательно, при заданных начальных значениях гиростатические переменные H_1, H_2, H_3 из уравнения (2.8) определяются однозначно.

Рассмотрим случай, когда гиростатический момент $\mathbf{H}$, являющийся геометрической суммой моментов количеств движения маховиков относительно корпуса спутника, будет постоянным. Из уравнения (2.8) имеем

$$\mathbf{m}\times\mathbf{H}=3\omega_0(\mathbf{n}\times\Theta^*\mathbf{n})-\omega_0(\mathbf{m}\times\Theta^*\mathbf{m}) \tag{2.9}$$

Алгебраические уравнения

$$m_2H_3-m_3H_2=\omega_0(C_3-C_2)(3n_2n_3-m_2m_3) \quad (1\,2\,3) \tag{2.10}$$

допускают решение относительно H_i ($i=1, 2, 3$), если выполнено условие [7]:

$$(C_3-C_2)n_2n_3m_1+(C_1-C_3)n_1n_3m_2+(C_2-C_1)n_1n_2m_3=0$$

(символ (1 2 3) означает, что два других уравнения получаются из (2.10) циклической перестановкой). Таким образом, если известно положение относительного равновесия, уравнения (2.10) требуют ограничений проекций гиростатического момента, но однозначно их не определяют. Сформулируем результат.

Теорема 2. При выполнении условия $K>K_0\geqslant 2\max\{C_1, C_2, C_3\}$, где K_0 — наибольший действительный корень квадратного уравнения

$$|\Theta^*(\beta_0-\mathbf{m})+K\mathbf{m}|^2=|\beta_0\cdot(\beta_0\cdot[\Theta^*(\beta_0-\mathbf{m})+K\mathbf{m}])|^2+$$
$$+9|(\beta_0\cdot\Theta^*(\alpha_0-\mathbf{n}))\cdot\alpha_0|^2$$

управляющий момент $\mathbf{M}$ (2.5), приложенный к маховикам, можно выбрать так, чтобы спутник был сориентирован в заданных направлениях α, β. При этом любое движение спутника-гиростата либо является положением относительного равновесия, либо асимптотически приближается к такому положению. Положение относительного равновесия $\omega_1=0$, $\alpha=\mathbf{n}$, $\beta=\mathbf{m}$ асимптотически устойчиво по Ляпунову [5].

Автор благодарит В. В. Румянцева за ценные советы и замечания.

Поступила 19 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зубов В. И.* Об активном управлении вращательным движением твердого тела. Дифференциальные уравнения, 1970, т. 6, № 11.
2. *Зубов В. И.* Управляемое вращение и динамика относительного движения. Докл. АН СССР, 1974, т. 219, № 3.
3. *Лилов Л. К.* О стабилизации стационарных движений механических систем по части переменных. ПММ, 1972, т. 36, вып. 6.
4. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., «Наука», 1965.
5. *Красовский Н. Н.* Обобщение теорем второго метода Ляпунова. В кн.: Теория устойчивости движения. Доп. 3. М., «Наука», 1966.
6. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М., «Наука», 1975.
7. *Анчев А. А.* Об устойчивости относительного равновесия спутника с роторами. Българска академия на науките. Известия на математический институт, 1970, т. 11.