

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ НАРАЩИВАЕМЫХ ТЕЛ, ПОДВЕРЖЕННЫХ СТАРЕНИЮ

Н. Х. АРУТЮНЯН, А. А. ЗЕВИН

(Москва, Ленинград)

Напряженно-деформированное состояние наращиваемых тел из материалов, обладающих свойствами ползучести и старения, существенно зависит от скорости наращивания, которая определяет не только закон нагружения, но и специфическую неоднородность этих тел, обусловленную тем, что возраст материала зависит от пространственных координат [1, 2]. Отмеченные факторы могут значительно повлиять на оптимальные характеристики наращиваемых сооружений.

В предлагаемой работе рассмотрены две характерные задачи оптимизации для наращиваемых тел. В задаче о колонне заданной высоты и объема, которая возводится из материала, обладающего свойством ползучести и старения, определяется оптимальное распределение сечений по высоте из условия минимума приращения перемещения верхнего сечения колонны после приложения внешней нагрузки. Решение этой задачи получено в замкнутом виде. Показано, что оптимальная форма существенно зависит от скорости возведения колонны.

В задаче о полом цилиндра, усиленном многослойной обмоткой из высокопрочной проволоки или ленты, разыскивается закон предварительного натяжения различных слоев обмотки из условия равенства напряжений во всех ее слоях после окончания навивки. Для определения оптимального закона получено интегральное уравнение типа Вольтерра, ядро которого связано простым соотношением с ядром оператора, описывающего реологические свойства цилиндра. Проанализировано влияние скорости навивки, упругих и реологических параметров на оптимальное предварительное натяжение слоев обмотки.

1. Оптимальная форма колонны. Пусть колонна (или группа однотипных колонн) заданной высоты l поддерживает тяжелое оборудование, чувствительное к приращению перемещений после установки. Колонна возводится с постоянной скоростью v , равной объему материала, укладываемого в единицу времени; оборудование, создающее сжимающую нагрузку P , устанавливается через τ_0 единиц времени после возведения колонны. Требуется при заданном объеме колонны V минимизировать приращение перемещения ее верхнего сечения к моменту t_1 после приложения силы P .

Задачу можно рассматривать также в двойственной постановке: найти минимальный объем V^* , при котором приращение перемещения не превосходит заданного. Нетрудно показать, что решение исходной задачи совпадает с решением двойственной, если заданный объем V равен V^* .

Пусть $y(x)$ — площадь поперечного сечения колонны, расположенного на расстоянии x от ее верхнего сечения, и $z(x)$ — объем колонны над сечением x . Время, необходимое на возведение объема $z(x)$

$$T(x) = \frac{z(x)}{v}, \quad z(x) = \int_0^x y(\xi) d\xi \quad (1.1)$$

Определим нагрузку от собственного веса, действующую в сечении x . Начало отсчета времени принимаем в момент приложения силы P .

К моменту времени $-(T(x)+\kappa_0)$ колонна будет возведена до сечения x . Элементарное приращение нагрузки $dQ=g_0v d\tau$ (g_0 — масса единицы объема). Интегрируя в пределах от $-(T(x)+\kappa_0)$ до t , получим

$$Q(x, t) = g_0v [t + \kappa(x)], \quad \kappa(x) = \kappa_0 + T(x) \quad (1.2)$$

Формула (1.2) справедлива, если $t \in [-\kappa(x), -\kappa_0]$; при $t > -\kappa_0$ будем иметь

$$Q(x, t) = Q(x) = g_0v T(x) \quad (1.3)$$

Для определения деформаций воспользуемся уравнением состояния неоднородно-стареющей наследственной среды [1, 2]

$$\varepsilon(x, t) = \frac{1}{E(t + \kappa(x))} \left[\sigma(x, t) + \int_{-\kappa(x)}^t K(t + \kappa(x), \tau + \kappa(x)) \sigma(x, \tau) d\tau \right] \quad (1.4)$$

где $E(t)$ — модуль упругомгновенной деформации; $K(t, \tau)$ — ядро ползучести, связанное с мерой ползучести материала $C(t, \tau)$ соотношением [3]

$$K(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \Delta(t, \tau), \quad \Delta(t, \tau) = \frac{E(t)}{E(\tau)} + E(t) C(t, \tau) \quad (1.5)$$

Учитывая, что напряжения от собственного веса $\sigma_Q(x, t) = Q(x, t)/y(x)$, и используя выражения (1.2), (1.3), после некоторых преобразований получим

$$\varepsilon_Q(x, t) = \frac{g_0V}{y(x)E(\kappa_0 + T(x) + t)} \int_0^{T(x)} \Delta(t + \kappa_0 + T(x), \tau) d\tau \quad (1.6)$$

Деформации от нагрузки P

$$\varepsilon_P(x, t) = \frac{P}{y(x)E(\kappa_0 + T(x) + t)} \Delta[t + \kappa_0 + T(x), \kappa_0 + T(x)] \quad (1.7)$$

Отметим, что переменная x входит в формулы (1.6), (1.7) только посредством функций $y(x)$ и $T(x) = z(x)/v$, поэтому выражение для приращения деформаций к моменту t_1 можно записать в виде

$$\varepsilon_0(x) = \varepsilon_Q(x, t_1) + \varepsilon_P(x, t_1) - \varepsilon_Q(x, 0) - \varepsilon_P(x, 0) = F(z(x))/y(x) \quad (1.8)$$

Для приращения перемещения верхнего сечения колонны имеем

$$u_0 = \int_0^l \varepsilon_0(x) dx = \int_0^l F \left[\int_0^x y(\xi) d\xi \right] \frac{dx}{y(x)} \quad (1.9)$$

Задача состоит в отыскании функции $y(x)$, минимизирующей функционал (1.9), при ограничении на объем колонны

$$V = \int_0^l y(x) dx = \text{const} \quad (1.10)$$

Учитывая, что $y(x) = z'(x)$, запишем выражение (1.9) в виде

$$u_0 = \int_0^l \frac{F(z(x)) dx}{z'(x)} \quad (1.11)$$

Подынтегральное выражение не зависит явно от x , поэтому функция $z(x)$, доставляющая минимум функционалу (1.11), удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка [4]:

$$\frac{F(z)}{z'} - z' \frac{\partial}{\partial z'} \left\{ \frac{F(z)}{z'} \right\} = \frac{2}{D} \quad (1.12)$$

где D — произвольная постоянная.

Разделив переменные, получим

$$dz/F(z) = D dx \quad (1.13)$$

Частный интеграл уравнения (1.13), удовлетворяющий условию $z(0) = 0$, имеет вид

$$\int_0^z \frac{d\xi}{F(\xi)} = Dx, \quad D = \frac{1}{l} \int_0^V \frac{d\xi}{F(\xi)} \quad (1.14)$$

Выражение для D получено из условия $z(l) = V$. Соотношение (1.14) определяет зависимость $z(x)$. Дифференцируя (1.14), найдем

$$z'(x) = y(x) = 1/x'(z) = DF(z) \quad (1.15)$$

Уравнения (1.14), (1.15) определяют параметрически функцию $y(x)$, которая является решением рассматриваемой задачи. Параметр z изменяется в интервале $[0, V]$.

Подставляя $y(x)$ в выражение (1.8), получим

$$\varepsilon_0 = 1/D \quad (1.16)$$

Таким образом, деформации колонны оптимальной формы не зависят от координаты сечения.

Минимальное приращение перемещения

$$u_0 = \int_0^l \varepsilon_0 dx = \frac{l}{D} \quad (1.17)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть время возведения колонны пренебрежимо мало, т. е. колонна однородна и процесс старения в ней протекает одинаково во всех точках.

Учитывая, что

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left[v \int_0^{\tau(x)} \Delta(t + \kappa_0 + T(x), \tau) d\tau = z \Delta(t + \kappa_0, 0) \right]$$

из соотношений (1.6) — (1.8) при $v \rightarrow \infty$ получим

$$F(z) = g_0 A z + P B \quad (1.18)$$

$$A = \frac{\Delta(t_1 + \kappa_0, 0)}{E(t_1 + \kappa_0)} - \frac{\Delta(\kappa_0, 0)}{E(\kappa_0)}, \quad B = \frac{\Delta(t_1 + \kappa_0, \kappa_0)}{E(t_1 + \kappa_0)} - \frac{1}{E(\kappa_0)} \quad (1.19)$$

где A, B — параметры, характеризующие упругие и реологические свойства материала.

Используя зависимости (1.14), (1.15), найдем

$$z = \frac{1}{\mu} [(1 + \mu V)^{\mu l} - 1], \quad \mu = \frac{g_0 A}{B P}$$

$$y(x) = \frac{\ln(1 + \mu V)}{\mu l} (1 + \mu V)^{\mu l} \quad (1.20)$$

Как следует из (1.20), площадь поперечного сечения колонны оптимальной формы возрастает к основанию, что объясняется влиянием собственного веса.

Из выражений (1.14), (1.17) найдем приращение перемещения верхнего сечения

$$u_0 = g_0 A l^2 / [\ln(1 + \mu V)] \quad (1.21)$$

Рассмотрим случай, когда $E(t) = E_0 = \text{const}$, скорость возведения колонны конечна и влиянием собственного веса можно пренебречь. Принимая меру ползучести в виде $C(t, \tau) = \varphi(\tau)\psi(t-\tau)$, из соотношений (1.5), (1.7) и (1.8) получим

$$F(z) = P\psi_1\varphi\left(\kappa_0 + \frac{z}{v}\right), \quad \psi_1 = \psi(t_1) \quad (1.22)$$

Пусть $\varphi(\tau) = C_0 + A_0 \exp(-\beta\tau)$. Уравнения (1.14), (1.15), связывающие x , y и z , принимают вид

$$\gamma z + \ln \frac{C_0 + B_0 \exp(-\gamma z)}{C_0 + B_0} = \vartheta D x, \quad \vartheta = P\psi_1 C_0 \gamma$$

$$y = PD\psi_1 [C_0 + B_0 \exp(-\gamma z)], \quad B_0 = A_0 \exp(-\beta\kappa_0)$$

$$D = \frac{1}{\vartheta l} \left[\gamma V + \ln \frac{C_0 + B_0 \exp(-\gamma V)}{C_0 + B_0} \right], \quad \gamma = \frac{\beta}{v} \quad (1.23)$$

Как видно, площадь сечения колонны к основанию уменьшается. Это объясняется тем, что большая деформируемость материала в верхней части колонны компенсируется увеличением ее сечения.

Приведем результаты вычислений для общего случая, когда скорость возведения колонны конечна и учитывается влияние собственного веса. Модуль упругости и мера ползучести приняты в виде

$$E(\tau) = E_0(1 + \chi \exp(-\rho\tau)), \quad C(t, \tau) = (C_0 + A_0 e^{-\beta\tau})(1 - e^{-\delta(t-\tau)})$$

при следующих числовых значениях параметров: $E_0 = 3.3 \cdot 10^8$ МПа, $\chi = 0.575$, $\rho = 0.072$ сут⁻¹, $\delta = 0.06$ сут⁻¹, $C_0 = 0.2764 \cdot 10^{-4}$ МПа⁻¹, $A_0 = 1 \cdot 10^{-4}$ МПа⁻¹, $\beta = 0.031$ сут⁻¹.

Значения остальных расчетных параметров: $V = 125$ м³, $l = 12.5$ м, $g_0 = 20$ кН/м³, $P = 2500$ кН, $\kappa_0 = 5$ сут.

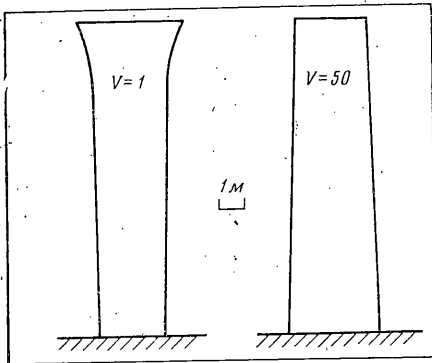
Варьировалась скорость возведения колонны v .

На фиг. 1 показаны очертания колонны квадратного поперечного сечения, соответствующие скорости возведения $v = 1$ и $v = 50$ м³/сут.

Соответствующие значения перемещения u_0 равны 0.13 и 0.45 мм. При относительно медленном возведении колонны перемещение в 3.5 раза меньше.

Скорость возведения оказывает существенное влияние на оптимальную форму. При $v = 1$ колонна резко расширяется в верхней части; при $v = 50$ сечение возрастает к основанию, так как собственный вес оказывает более существенное влияние, чем неоднородность материала.

2. **Оптимальное усиление цилиндра многослойной обмоткой.** Прочность цилиндрических сосудов, подверженных внутреннему давлению, можно повысить путем непрерывной навивки на наружную поверхность нескольких слоев высокопрочной проволоки или ленты с некоторым усилием предварительного натяжения. При этом в цилиндре появляются предварительные напряжения, обратные по знаку напряжениям от внутреннего давления, а в обмотке — растяжение. Целесообразно усилие предварительного натяжения и толщину обмотки подбирать таким образом, чтобы после приложения внутреннего давления полностью использовалась ее несущая способность. Если к моменту окончания навивки напряжения во всех слоях обмотки одинаковы, то можно создать заданное разгружающее давление при минимальном расходе материала обмотки.



Фиг. 1

При навивке каждого последующего слоя предварительное натяжение предыдущих слоев уменьшается, так как эти слои совместно с цилиндром подвергаются внешнему давлению, вызывающему в них напряжения сжатия. Задача состоит в отыскании такого закона $y(x)$ предварительного напряжения слоя, расположенного на расстоянии x от поверхности цилиндра, при котором напряжения в нем и во всех предыдущих слоях становятся равными.

Рассмотрим полый цилиндр с наружным радиусом R , изготовленный из материала, обладающего свойствами ползучести и старения. Перемещение наружной поверхности цилиндра от внешнего давления $q(t)$, приложенного в момент t_0

$$u(t) = w_0 \left[q(t) + \int_{t_0}^t P(t, \tau) q(\tau) d\tau \right] \quad (2.1)$$

Здесь w_0 — мгновенное упругое перемещение наружной поверхности от единичного давления (изменением во времени упругих констант пренебрегаем). Ядро $P(t, \tau)$ совпадает с ядром ползучести при простом растяжении — сжатии, если коэффициент Пуассона $\nu_2(t, \tau) = \nu_0 = \text{const}$. В общем случае функцию $P(t, \tau)$ можно построить, определив из опытов или расчетным путем зависимость $\delta_u(t, \tau)$, представляющую собой перемещение наружной поверхности цилиндра от давления $q(t) = 1$, приложенного в момент τ .

Из соотношения (2.1) следует

$$\delta_u(t, \tau) = w_0 \left[1 + \int_{\tau}^t P(t, s) ds \right] \quad (2.2)$$

Дифференцируя последнее соотношение по τ , получим

$$P(t, \tau) = - \frac{1}{w_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta_u(t, \tau) \quad (2.3)$$

Отметим, что функция $P(t, \tau)$ представляет собой интегральную характеристику ползучести цилиндра и не зависит от радиальной координаты, если даже свойства цилиндра неоднородны в радиальном направлении, например вследствие неоднородного старения.

Рассмотрим процесс навивки на цилиндр высокопрочной проволоки или ленты, полагая, что параметр w_0 и функция $P(t, \tau)$ известны. Пусть навивка осуществляется с постоянной скоростью v и к моменту t доведена до толщины x . Полагаем, что при навивке последующих слоев все предыдущие работают как тонкое кольцо радиуса R (увеличением радиуса пренебрегаем).

Элементарный слой толщиной dx , навиваемый с предварительным напряжением $z(t)$, создает наружное давление на предыдущие слои, равное

$$dq_1 = z(t) v dt / R \quad (2.4)$$

Пусть $q(t)$ — давление между цилиндром и обмоткой. Тогда при навивке слоя dx на кольцо толщиной x действует элементарная дополнительная нагрузка

$$dp = dq_1 - dq = \frac{z(t) v dt}{R} - q'(t) dt \quad (2.5)$$

Приращение радиального перемещения кольца

$$du_k = \frac{R^2 dp}{xE_0} = \frac{R^2}{vtE_0} \left[\frac{z(t)v}{R} - q'(t) \right] dt \quad (2.6)$$

где E_0 — модуль упругости материала обмотки.

Приравняв выражение (2.6) приращению радиального перемещения цилиндра, получим

$$\frac{R^2}{vtE_0} \left[\frac{z(t)v}{R} - q'(t) \right] = w_0 \frac{d}{dt} \left[q(t) + \int_{t_0}^t P(t, \tau) q(\tau) d\tau \right] \quad (2.7)$$

Интегро-дифференциальное уравнение (2.7) связывает давление $q(t)$ с функцией $z(t)$, определяющей закон изменения во времени предварительного напряжения обмотки. Полагая $x=vt$ и $t_0=0$, преобразуем уравнение (2.7) к виду

$$\frac{R^2}{xE_0} \left[\frac{y(x)}{R} - q_0'(x) \right] = w_0 \frac{d}{dx} \left[q_0(x) + \frac{1}{v} \int_0^x K(x, \xi) q_0(\xi) d\xi \right] \quad (2.8)$$

$$y(x) = z \left(\frac{x}{v} \right), \quad q_0(x) = q \left(\frac{x}{v} \right), \quad K(x, \xi) = P \left(\frac{x}{v}, \frac{\xi}{v} \right)$$

Для определения оптимального закона предварительного напряжения $y(x)$ воспользуемся условием постоянства напряжений во всех слоях обмотки.

Элементарное приращение напряжений в кольце толщиной x при навивке слоя dx :

$$d\Delta\sigma(x) = -\frac{R}{x} [dq_{10}(x) - dq_0(x)] = \left[q_0'(x) - \frac{y(x)}{R} \right] \frac{Rdx}{x} \quad (2.9)$$

где $q_{10}(x) = q_1(x/v)$.

Интегрируя в пределах от x до δ (δ — конечная толщина обмотки), будем иметь

$$\Delta\sigma(x) = \int_x^{\delta} \left[q_0'(\xi) - \frac{y(\xi)}{R} \right] \frac{Rd\xi}{\xi} \quad (2.10)$$

Из условия постоянства напряжений следует

$$\sigma(x) = y(x) + \Delta\sigma(x) = \sigma_0 = \text{const} \quad (2.11)$$

Используя выражение (2.10), получим

$$y(x) + \int_x^{\delta} \left[q_0'(\xi) - \frac{y(\xi)}{R} \right] \frac{Rd\xi}{\xi} = \sigma_0 \quad (2.12)$$

С помощью соотношения (2.12) исключим $q_0(x)$ из выражения (2.8). Дифференцируя (2.12), найдем

$$q_0'(x) = \frac{y(x)}{R} + \frac{xy'(x)}{R} = \frac{1}{R} \frac{d}{dx} (xy(x)) \quad (2.13)$$

Интегрируя последнее выражение и учитывая, что $q_0(0) = 0$, будем иметь

$$q_0(x) = y(x)x/R \quad (2.14)$$

Подставляя выражения (2.13), (2.14) в уравнение (2.8) и интегрируя полученное соотношение с учетом начального условия $y(0) = y_0$, получим

$$y(x)(x+\lambda) + \frac{1}{\nu} \int_0^x K(x, \xi) \xi y(\xi) d\xi = \lambda y_0, \quad \lambda = \frac{R^2}{w_0 E_0} \quad (2.15)$$

Интегральное уравнение (2.15) определяет оптимальный закон навивки на цилиндр, материал которого обладает свойствами ползучести и старения.

При $K(x, \xi) = 0$ получим элементарную формулу, определяющую оптимальный закон навивки на упругий цилиндр

$$y(x) = \lambda y_0 / (x + \lambda) \quad (2.16)$$

Положив $\varphi(x) = y(x)(x + \lambda)$, преобразуем уравнение (2.15) к форме

$$\varphi(x) = \lambda y_0 - \frac{1}{\nu} \int_0^x K_0(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi, \quad K_0(x, \xi) = \frac{K(x, \xi) \xi}{\xi + \lambda} \quad (2.17)$$

Если ядро $P(t, \tau)$, определяющее деформативные свойства цилиндра, вырождено, то ядро $K_0(x, \xi)$ также будет вырожденным, и интегральное уравнение (2.17) может быть приведено к дифференциальному. Для ядер вида $K_0(x, \xi) = A(x)B(\xi)$ решение может быть приведено к квадратуре [3, 5].

Рассмотрим пример. Пусть коэффициент Пуассона — константа, навивка производится в возрасте, когда процесс старения материала можно считать завершенным и ползучесть материала при простом растяжении — сжатии описывается экспоненциальным ядром. Как отмечалось, в случае $\nu_0 = \text{const}$ ядро оператора в выражении (2.1) совпадает с обычным ядром ползучести, поэтому при принятых допущениях

$$w_0 = \frac{(1-\nu_0)R^3 + (1+\nu_0)R_1^3 R}{E(R^2 - R_1^2)}, \quad P(t, \tau) = \chi \exp[-\beta(t-\tau)]$$

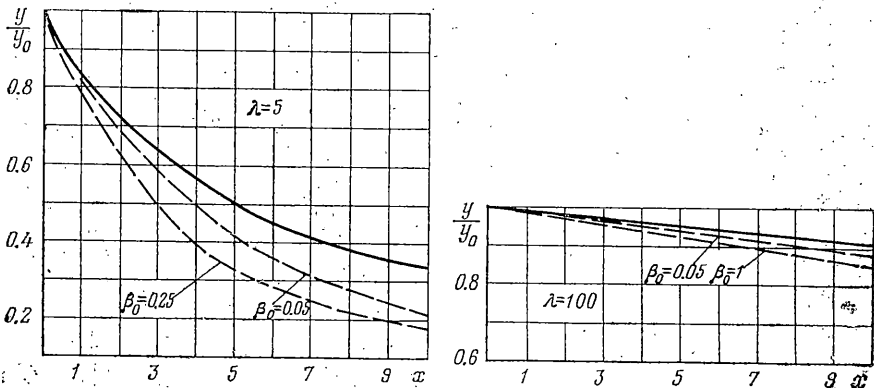
$$K(x, \xi) = \chi \exp[-\beta_0(x-\xi)], \quad \beta_0 = \beta/\nu$$

где E — модуль упругости материала цилиндра, R_1 — его внутренний радиус. В рассматриваемом случае решение уравнения (2.17) имеет вид

$$\varphi(x) = \lambda y_0 \left[1 - \chi_0 \int_0^x e^{-\mu(x-\xi)} \frac{(x+\lambda)^{\vartheta} \xi \, d\xi}{(\xi+\lambda)^{\vartheta+1}} \right] \quad (2.18)$$

$$\chi_0 = x/\nu, \quad \mu = \chi_0 + \beta_0, \quad \vartheta = \lambda \chi_0$$

На фиг. 2 ($\lambda=5$) и 3 ($\lambda=100$) приведены графики функции $y(x)/y_0$ для различных значений параметра β_0 . При вычислениях принято $\chi_0 = 3\beta_0$. Сплошные линии, соответствующие упругому цилиндру, построены по формуле (2.16).



Фиг. 2, 3

Серия кривых на фиг. 3 отвечает случаю, когда жесткость цилиндра велика по сравнению с конечной жесткостью обмотки. При этом оптимальное предварительное напряжение слабо зависит от реологических свойств материала и координаты x . При меньшей жесткости (фиг. 2) эта зависимость оказывается весьма существенной.

Поступила 10 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-старееющих тел. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3.
2. Арутюнян Н. Х. Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела. ПММ, 1977, т. 41, вып. 5.
3. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
4. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., «Наука», 1965.
5. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. М., «Стройиздат», 1968.