МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1978

УДК 539.419:624.074.4

ОПТИМИЗАЦИЯ ОБОЛОЧЕК КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ПО ПРОЧНОСТИ

И. Н. КАЛИНИН, И. Б. ЛЕНКИН

(Горький)

Известна постановка задач механики твердого деформируемого тела, в которой требуется отыскать конструкцию, удовлетворяющую условию равнопрочности [1–4]. При проектировании осесимметричных оболочек эта задача состоит в определении закона изменения толщины $h(s)$ вдоль образующей из условия равенства максимального эквивалентного напряжения $\sigma(s)$ в любом нормальном сечении допускаемому значению σ_*. В [2] доказано, что равнопрочная оболочка, полученная решением задачи в приведенной постановке, является оболочкой минимального веса. Но искомый закон изменения толщины [2, 3], как правило, имеет сложный характер, исключающий возможность изготовления полученной оптимальной конструкции. Это приводит к необходимости поиска других типов конструкций, близких по весу к равнопрочным и обладающих хорошей технологичностью при их изготовлении.

В данной статье рассматривается задача проектирования оптимальных по весу оболочек кусочно-постоянной толщины при ограничениях по прочности. Описывается используемый в расчетах алгоритм оптимизации, приводится эффективный численный алгоритм расчета на прочность оболочек вращения, применение которого позволило решить задачу оптимизации достаточно сложной конструкции с большим числом переменных на ЭВМ среднего класса. Весовая эффективность оболочек кусочно-постоянной толщины подтверждается путем сравнения с другими типами оптимальных конструкций.

1. Постановка задачи. Рассматривается оптимизация по весу произвольной осесимметричной оболочки, состоящей из нескольких участков постоянной толщины h_i $(i=\overline{1, k})$, с заданной распределенной вдоль образующей нагрузкой, граничными условиями, физическими константами материала, геометрией срединной поверхности, допускаемым напряжением σ_*. Требуется найти толщины h_i и координаты точек скачкообразного изменения толщин s_i из условия минимума веса конструкции при ограничениях по напряженному состоянию и геометрических ограничениях на h_i, s_i. Математически задача формулируется следующим образом. Необходимо найти h_i, s_i из условия минимума функции

$$P(h_i, s_i)=2\pi\rho\sum_{i=1}^{k}h_i\int_{s_{i-1}}^{s_i}r(s)\,ds \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$\sigma(h_i, s_i)\leqslant\sigma_* \qquad (i=1, 2, \ldots, k) \tag{1.2}$$

$$a_i\leqslant h_i\leqslant b_i, \qquad c_i\leqslant s_i\leqslant d_i \tag{1.3}$$

где ρ — удельный вес материала, $s_0=0$, $s_k=l$ (l — длина образующей оболочки), $r(s)$ — расстояние от точки s на образующей до оси вращения, $\sigma(h_i, s_i)$ — эквивалентное напряжение, a_i, b_i, c_i, d_i — нижние и верхние пределы допустимого изменения переменных. Число варьируемых параметров в задаче $n=2k-1$.

В силу нелинейности целевой функции (1.1) и ограничений по напряженному состоянию (1.2) поставленная задача является задачей нелинейного программирования.

Для учета ограничения (1.2) использовался метод штрафных функций [5] (метод внешней точки). Модифицированная целевая функция строилась согласно правилу

$$P^*(h_i, s_i) = P(h_i, s_i) + C\delta(\max_s \sigma(s) - \sigma_*) \tag{1.4}$$

$$\delta = 0,\ \text{если}\ \max_s \sigma(s) \leqslant \sigma_*;\quad \delta = 1,\ \text{если}\ \max_s \sigma(s) > \sigma_*$$

где $C>0$ — достаточно большая константа, $\max_s \sigma(s)$ — максимальное эквивалентное напряжение в оболочке.

Геометрические ограничения (1.3) учитывались непосредственно при решении задачи.

2. Алгоритм оптимизации. Для минимизации P^* $(h_i\ s_i)$ применялся комбинированный алгоритм прямого поиска, основанный на методах конфигураций [6] (с некоторыми изменениями) и оврагов [7].

Обозначим вектор переменных через $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Суть алгоритма состоит в следующем. Из произвольно выбранной точки $\mathbf{x}_0{}^\circ = (x_1{}^\circ, x_2{}^\circ, \ldots, x_n{}^\circ)$ делается пробный шаг заданной величины δ_1 по координате x_1. При $P^*(x_1{}^\circ+\delta_1, x_2{}^\circ, \ldots, x_n{}^\circ) < P^*(x_1{}^\circ, x_2{}^\circ, \ldots, x_n{}^\circ)$ принимается $\mathbf{x}_0{}^1 = (x_1{}^\circ+\delta_1, x_2{}^\circ, \ldots, x_n{}^\circ)$, в противном случае сравниваются значения целевой функции в точках $\mathbf{x}_0{}^\circ = (x_1{}^\circ, x_2{}^\circ, \ldots, x_n{}^\circ)$ и $\mathbf{x}' = (x_1{}^\circ-\delta_1, x_2{}^\circ, \ldots, x_n{}^\circ)$. Если $P^*(x_1{}^\circ-\delta_1, x_2{}^\circ, \ldots, x_n{}^\circ) < P^*(x_1{}^\circ, x_2{}^\circ, \ldots, x_n{}^\circ)$, то принимается $\mathbf{x}_0{}^1 = (x_1{}^\circ-\delta_1, x_2{}^\circ, \ldots, x_n{}^\circ)$, а при $P^*(x_1{}^\circ-\delta_1, x_2{}^\circ, \ldots, x_n{}^\circ) \geqslant P^*(x_1{}^\circ, x_2{}^\circ, \ldots, x_n{}^\circ)$ полагаем $\mathbf{x}_0{}^1 = (x_1{}^\circ, x_2{}^\circ, \ldots, x_n{}^\circ)$. Процесс продолжается по описанному правилу для остальных компонент $x_i{}^\circ$ $(i=\overline{2, n})$. После получения $\mathbf{x}_0{}^n$ находится точка $\mathbf{x}_1{}^\circ$ согласно формуле (результирующий шаг)

$$\mathbf{x}_1{}^\circ = \mathbf{x}_0{}^\circ + 2(\mathbf{x}_0{}^n - \mathbf{x}_0{}^\circ) = 2\mathbf{x}_0{}^n - \mathbf{x}_0{}^\circ$$

Сравниваются значения $P^*(\mathbf{x}_0{}^n)$ и $P^*(\mathbf{x}_1{}^\circ)$. Из лучшей точки совершаются пробные шаги. Процесс продолжается до тех пор, пока пробные шаги перестанут быть эффективными. Далее производится уменьшение величин пробных шагов и процесс повторяется. После того, как пробные шаги уменьшатся до заранее заданных величин и целевая функция перестанет уменьшаться, лучшее значение P^* и точка $\mathbf{x}_1{}^*$, в которой оно достигается, запоминаются. Из $\mathbf{x}_1{}^*$ делается большой шаг, т. е. каждой координате дается некоторое приращение. Из вновь полученной точки повторяется описанная выше процедура поиска до получения $\mathbf{x}_2{}^*$. По $\mathbf{x}_1{}^*$, $\mathbf{x}_2{}^*$ находится точка $\mathbf{x}^*$ согласно формулам (овражный шаг)

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_1{}^* + \mu(\mathbf{x}_2{}^* - \mathbf{x}_1{}^*),\quad \text{если}\quad P^*(\mathbf{x}_2{}^*) < P^*(\mathbf{x}_1{}^*)$$
$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_2{}^* + \mu(\mathbf{x}_1{}^* - \mathbf{x}_2{}^*),\quad \text{если}\quad P^*(\mathbf{x}_1{}^*) \leqslant P^*(\mathbf{x}_2{}^*)$$

где $\mu>1$ — коэффициент, позволяющий регулировать величину овражного шага. Из $\mathbf{x}^*$ снова повторяются пробные шаги и т. д. Во избежание зацикливания в окрестности оптимальной точки в алгоритме предусмотрено уменьшение коэффициента μ. Процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится неравенство $|\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_{k-1}^*| < \varepsilon$.

Алгоритм проверялся на большом числе тестовых примеров и на задачах механики твердого деформируемого тела. Он удобен в реализации, надежен и позволяет при большом μ получить «нехудший» локальный минимум, а в некоторых случаях и глобальный.

Алгоритм не требует непрерывности целевой функции и не использует частных производных.

3. Расчет оболочки на прочность. При решении задач оптимизации важную роль играет эффективность алгоритма прямого расчета. Проинтегрировать исходные уравнения удается лишь в простейших частных случаях, что приводит к необходимости использования численных процедур. При оптимальном проектировании к методикам прямого расчета кроме обычных требований (необходимой точности, численной устойчивости, надежности) добавляется еще ограничение на объем вычислений. Значительные вычислительные затраты на расчет не позволяют оптимизировать конструкции с большим числом переменных. Уравнения, описывающие напряженное состояние осесимметричных оболочек переменной толщины, выводились в переменных Е. Мейснера [8]. При этом предполагалось, что координатная поверхность совпадает со срединной поверхностью оболочки и что выполняются гипотезы Кирхгофа — Лява.

Разрешающие уравнения в обозначениях [8] имеют вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 V}{ds^2}+\frac{dV}{ds}\left[-\frac{1}{\Omega}\frac{d\Omega}{ds}+\frac{1}{C_{11}}\frac{dC_{11}}{ds}-\frac{\sin\theta}{r}\right]+\\
+V\left[\frac{\sin\theta}{r}\left(-\frac{\nu}{\Omega}\frac{d\Omega}{ds}+\frac{\nu}{C_{11}}\frac{dC_{22}}{ds}\right)+\frac{\nu}{R_1R_2}-\frac{\sin^2\theta}{r^2}\right]-W\cos\theta=\\
=\frac{F_1}{r}\left(\frac{\nu}{C_{11}}\frac{dC_{22}}{ds}-\frac{\nu}{\Omega}\frac{d\Omega}{ds}-\frac{\sin\theta}{r}\right)+\frac{\nu}{r}\frac{dF_1}{ds}\\
\frac{d^2W}{ds^2}+\frac{dW}{ds}\left[-\frac{\sin\theta}{r}+\frac{1}{D_{11}}\frac{dD_{11}}{ds}\right]+\\
+W\left[\frac{\sin\theta}{r}\left(-\frac{\nu}{D_{11}}\frac{dD_{11}}{ds}\right)-\frac{\nu}{R_1R_2}-\frac{\sin^2\theta}{r^2}\right]+\frac{1}{D_{11}R_2}V=-\frac{F_2}{rD_{11}},
\end{gathered}\tag{3.1}$$

где $V=V(s)$, $W=W(s)$ — функции Е. Мейснера.

Условия закрепления краев оболочки в терминах, соответствующих введенным статическим и геометрическим величинам, формулировались согласно [9].

Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений решалась методом конечных разностей. Производные, входящие в систему (3.1), расписывались на трехточечном шаблоне с использованием центральных и односторонних разностей соответственно для внутренних и граничных точек. Для учета граничных условий в случае необходимости вводилась в рассмотрение законтурная точка.

В результате применения метода конечных разностей получалась система линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{gathered}
a_{ii-1}V_{i-1}+a_{ii}V_i+a_{ii+1}V_{i+1}+a_{in+i}W_i=a_i \quad (i=1,2,\ldots,n),\\
a_{n+in+i-1}W_{i-1}+a_{n+in+i}W_i+a_{n+in+i+1}W_{i+1}+a_{n+ii}V_i=a_{n+i},\\
a_{10}=a_{nn+1}=a_{n+1n}=a_{2n2n+1}=0
\end{gathered}\tag{3.2}$$

Применение стандартных программ решения линейных систем, имеющихся в вычислительных центрах, неэффективно и требует значительных вычислительных затрат. Поэтому разработан специальный алгоритм, учитывающий специфические особенности полученной системы — малую заполненность матрицы коэффициентов и структуру расположения ненулевых коэффициентов в целях уменьшения времени счета.

Идея метода решения системы (3.2) состоит в выборе порядка исключения элементов, препятствующего заполнению матрицы коэффициентов решаемой системы в процессе преобразований ненулевыми элементами и исключении на всех этапах решения действий с нулевыми элементами.

Поиск решения системы (3.2) осуществлялся в два этапа. На первом этапе система (3.2) преобразовывалась к треугольному виду

$$\begin{gathered} b_{ii}V_i+b_{in+i+1}W_{i+1}+b_{in+i+2}W_{i+2}=b_i \qquad (i=1,2,\ldots,n) \\ b_{n+in+i}W_i+b_{n+in+i+1}W_{i+1}+b_{n+in+i+2}W_{i+2}=b_{n+i}, \qquad b_{2n-1\,2n-1}=b_{2n2n+1}=b_{2n2n+2}=0 \end{gathered} \tag{3.3}$$

На втором этапе находилось решение системы с помощью обратного хода [10].

Система (3.2) приводилась к виду (3.3) путем циклического повторения преобразований четырех уравнений. Для описания процедуры вычислений рассмотрим уравнения с номерами i, $i+1$, $n+i$, $n+i+1$:

$$\begin{gathered} a_{ii}V_i+a_{ii+1}V_{i+1}+c_{in+i}W_i+c_{in+i+1}W_{i+1}=c_i \\ a_{i+1i}V_i+a_{i+1i+1}V_{i+1}+a_{i+1i+2}V_{i+2}+a_{i+1n+i+1}W_{i+1}=a_{i+1} \\ a_{n+ii}V_i+c_{n+in+i}W_i+c_{n+in+i+1}W_{i+1}=c_{n+i} \\ a_{n+i+1i+1}V_{i+1}+a_{n+i+1n+i}W_i+a_{n+i+1n+i+1}W_{i+1}+a_{n+i+1n+i+2}W_{i+2}=a_{n+i+1} \end{gathered} \tag{3.4}$$

где коэффициенты c_{kl} ($k=i$, $n+i$; $l=n+i$, $n+i+1$), c_k ($k=i$, $n+i$) получены из элементов матрицы системы (3.2) в результате предыдущих преобразований.

Процесс вычислений производится следующим образом. Последовательно исключаются коэффициенты a_{ii+1}, c_{in+i} при помощи уравнений с номерами $n+i+1$ и $n+i$.

В результате для i-го уравнения окончательно имеется

$$b_{ii}V_i+b_{in+i+1}W_{i+1}+b_{in+i+2}W_{i+2}=b_i$$

Далее исключаются коэффициенты a_{i+1i-1}, a_{n+ii}, $a_{n+i+1n+i}$ с использованием последовательно i-, $n+1$-, $n+i$-х уравнений. Таким образом, уравнения (3.4) приводятся к виду

$$\begin{gathered} b_{ii}V_i+b_{in+i+1}W_{i+1}+b_{in+i+2}W_{i+2}=b_i \\ a_{i+1i+1}V_{i+1}+a_{i+1i+2}V_{i+2}+c_{i+1n+i+2}W_{i+2}+c_{i+1n+i+3}W_{i+3}=c_{i+1} \\ b_{n+in+i}W_i+b_{n+in+i+1}W_{i+1}+b_{n+in+i+2}W_{i+2}=b_{n+i} \\ a_{n+i+1i+1}W_i+c_{n+i+1n+i+1}W_{i+1}+c_{n+i+1n+i+2}W_{i+2}=c_{n+i+1} \end{gathered} \tag{3.5}$$

Нетрудно видеть, что по отношению к уравнениям с номерами $i+1$, $i+2$, $n+i+1$, $n+i+2$ имеется ситуация, аналогичная рассмотренной выше. Циклически повторяя описанный процесс исключения, получим систему треугольного вида (3.3). Из (3.3) легко определяются все неизвестные. Особенностью описанного алгоритма решения системы (3.2) является линейная зависимость числа операций, необходимого для получения решения, от порядка системы. На ЭЦВМ БЭСМ-4 время решения системы 600-го порядка составляло несколько секунд.

После решения системы дифференциальных уравнений (3.1) методом конечных разностей напряжения определялись по формулам из [8]. Для проверки ограничения (1.2) использовалась энергетическая теория прочности.

4. Численные результаты. Рассматривалась оболочка, образованная вращением полуволны синусоиды. Согласно [8], главные радиусы кривизны такой оболочки выражаются по формулам

$$R_1=\frac{L^2}{f\pi^2\sin(\pi s/L)}, \quad R_2=f\sin\frac{\pi s}{L}+c$$

Граничные условия: заделка, допускающая перемещение в осевом направлении и условие симметрии (при $l=L/2$). Нагрузка: всестороннее внутреннее давление интенсивности p. Задача решалась при следующих данных:

$$p=34.335\cdot10^5\ н/м^2,\quad L=2\ м,\quad f=0.2\ м,\quad c=0.45\ м,\ E=2.0601\cdot10^{11}\ н/м^2,$$
$$\nu=0.3,\quad \sigma_*=1962\cdot10^5\ н/м^2,\quad n=5$$

Для проверки на многоэкстремальность задача решалась из различных начальных точек. Результаты расчета для четырех значений начальных точек представлены в таблице, где n – число измерений целевой функции, необходимое для получения оптимального решения, P – вес конструкции, P^* – значение модифицированной целевой функции, σ – максимальное эквивалентное напряжение в конструкции, N – номер варианта расчета (в скобках приведены соответствующие результаты для оптимальных точек).

N	1	2	3	4
h_1, 10^{-2} м	1 (1.55)	0.3 (1.58875)	3 (1.51875)	2 (1.6325)
h_2, 10^{-2} м	1 (0.83125)	0.3 (0.82875)	3 (0.83125)	1.8 (0.80625)
h_3, 10^{-2} м	1 (0.8375)	0.3 (0.8375)	3 (0.8375)	1.2 (0.8375)
s_1, 10^{-2} м	30 (12.75)	10 (12)	45 (13.75)	10 (11.35)
s_2, 10^{-2} м	70 (80)	55 (80)	80 (80)	55 (56.05)
P/ρ, 9.81 н	35 166 (31 821)	10 550 (31733)	105 500 (31913)	53 300 (31 473)
P^*/ρ, 9.81 н	11 519 800 (31 821)	89 631 400 (31 733)	105 500 (31913)	53 300 (31 473)
σ, $9.81\cdot10^5$ н/м^2	3 002 (1998.48)	9 820.9 (1 998.47)	1 027.53 (1 997.61)	1 555.6321 (1 999.36)
n	330	489	249	468

Результаты, полученные в вариантах 1–3, мало отличаются и по значению целевой функции, и по варьируемым параметрам. В варианте 4 оптимальное значение целевой функции мало отличается от предыдущих результатов ($\approx$1.5%), но есть отличие по параметрам (особенно для s_2).

В конечных точках поиска проводились дополнительные исследования для проверки на многоэкстремальность (отслеживание по параметрам, продолжение поиска из малой окрестности, анализ напряженного состояния конструкции). Анализ результатов дает основание предполагать, что отмеченное выше отличие в результатах является следствием многоэкстремальности рассматриваемой задачи. Особенностью полученных локально оптимальных решений является то, что максимальные эквивалентные напряжения в каждом из промежутков оболочки, имеющем постоянную толщину, равны допускаемому.

Для оценки влияния параметров s_i на вес оболочки производилась оптимизация только по толщинам h_i ($i=1, 2, 3$) при фиксированных s_i ($s_1=0.4$ м, $s_2=0.8$ м), равномерно распределенных по образующей. Отличие веса полученной оболочки от веса оптимальной оболочки (вариант 4 табл.) составило 16.33%. Влияние параметров s_i на вес зависит от характера изменения $|dr(s)/ds|$, а также распределения толщин h_i в оптимальной оболочке и может быть весьма значительным. При $dr(s)/ds\equiv\equiv0$ или $h(s)=\text{const}$ (в оптимальной оболочке) вес не зависит от s_i.

Для исследования влияния числа разбиений на вес оболочки решались еще задачи с 9, 13, 17 варьируемыми параметрами. Для этих случаев вес конструкции (P/ρ, 9,81 н) получился равным соответственно: 31317.7439, 31280.8055, 31194.6145. В целях сокращения числа пересчетов конструкции для выбора начальной точки при оптимизации использовались результаты, полученные для пяти переменных (вес конструкции в этом случае равен 31473.1003).

В данном примере вес мало убывает с увеличением числа переменных. Это объясняется малым градиентом эквивалентных напряжений на большей части оболочки. Естественно, отличие может быть велико при другом виде нагрузки, изменении геометрии оболочки и т. д.

Интересно, что характер изменения толщин при большом числе разбиений в оптимальной оболочке не совпадает качественно с распределением эквивалентных напряжений в гладкой оболочке, что можно было предположить. Так, при девяти разбиениях ($n=17$) получилось (см. результаты, приведенные ниже) $h_6<h_7=h_5$, хотя эквивалентные напряжения в этой части гладкой оболочки монотонно возрастают.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h_i, 10^{-4} м	163.25	78.75	78.125	80.00	80.625	83.75	83.125	83.75	83.75
s_i, 10^{-2} м	11.35	18.50	38.50	46.75	56.925	62.75	82.25	89.00	–

Такой характер изменения обусловлен невыпуклостью границы в задаче оптимизации. Нарушение выпуклости происходит под влиянием моментных напряжений в зонах изменения толщин.

Для количественной оценки эффективности данной конструкции проводилось сравнение четырех типов конструкции: оптимальной неподкрепленной оболочки постоянной толщины – 1; оболочки, подкрепленной стрингерами и шпангоутами минимального веса (8 шпангоутов, 16 стрингеров) – 2; равнопрочной оболочки переменной толщины – 3; оптимальной оболочки кусочно-постоянной толщины (5 переменных) – 4. Результаты получены при $p=45.126\cdot 10^5$ *н/м*^{2}, $L=2$ *м*, $f=0.2$ *м*, $c=0.45$ *м*, $E=2.0601\cdot 10^{11}$ *н/м*^{2}, $\nu=0.3$, $\sigma_*=1962\cdot 10^5$ *н/м*^{2}, и представлены ниже[1].

N_1	1	2	3	4
U, $(1/2\pi)\cdot 10^{-6}$ *м*^{3}	11318.8656	6676.0755	5936.2119	6750.5090
γ, %	190.68	112.48	100.00	113.72

Здесь N_1 – тип оболочки, U – объем материала оболочки, γ – весовая эффективность.

Как видно, оболочка кусочно-постоянной толщины даже при сравнительно небольшом числе разбиений по весовой эффективности почти не уступает подкрепленной стрингерами и шпангоутами, мало уступает равнопрочной оболочке переменной толщины и гораздо выгоднее оболочки постоянной толщины. Между тем, нет никакого сомнения в том, что рассматриваемую в данной работе конструкцию гораздо легче изготовить, чем подкрепленную и тем более оболочку переменной толщины. Несмотря на то, что сравнение произведено только для одной оболочки и нет возможности сделать исчерпывающие выводы по сравнительной весовой эффективности различных типов конструкций, тем не менее данный тип конструкций можно рекомендовать к практическому использованию.

Поступила 16 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гололобов В. И., Ильин Л. А.* Определение толщины равнонапряженных упругих оболочек вращения. Прикл. механ., 1970, т. 6, вып. 7.
2. *Горячев О. А.* Об одном методе оптимального распределения материала в тонкой упругой оболочке. Тр. Куйбышевск. авиац. ин-та, 1971, вып. 48.
3. *Иванов Г. В.* О вычислении оптимальной переменной толщины оболочки. В кн.: Проблемы механики твердого деформируемого тела. Л., «Судостроение», 1970.
4. *Ширко И. В.* Осесимметричный изгиб равнопрочной цилиндрической оболочки. Прикл. механ., 1969, т. 5, вып. 4.
5. *Фиакко А. В., Мак-Кормик Г. П.* Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М., «Мир», 1972.
6. *Уайлд Д. Дж.* Методы поиска экстремума. М., «Наука», 1967.
7. *Гельфанд И. М., Вул Е. Б., Гинзбург С. Л., Федоров Ю. Г.* Метод оврагов в задачах рентгеноструктурного анализа. М., «Наука», 1966.
8. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. М., Физматгиз, 1961.
9. *Чернина В. С.* Статика тонкостенных оболочек вращения. М., «Наука», 1968.
10. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений, т. 1. М., «Наука», 1966.

[1] Данные для сравнения взяты из работы: *Калинин И. Н.* К исследованию оптимизации по весу подкрепленных оболочек вращения из условий прочности. Канд. дисс. ГГУ, 1973.