МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1978

УДК 539.3

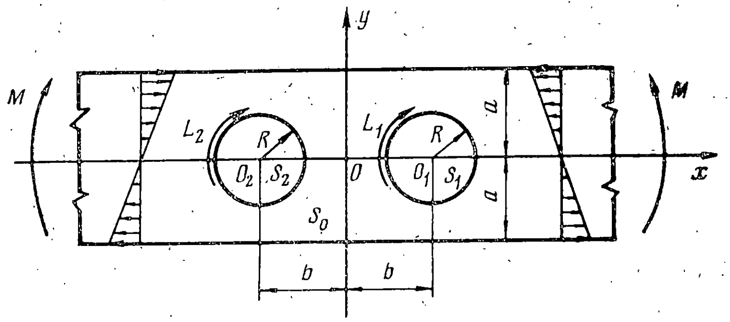
О ЧИСТОМ ИЗГИБЕ ПОЛОСЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ДВУМЯ ОДИНАКОВЫМИ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

Н. И. МИРОНЕНКО

(Алма-Ата)

Для решения задачи применены известный метод Д. И. Шермана [1] и метод интегрального преобразования Фурье, как это было сделано в работе [2]. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений, к которой в конечном счете сводится решение задачи, оказывается при любой близости границ по меньшей мере квазирегулярной. При выводе бесконечной системы уравнений метод Д. И. Шермана несколько упрощен – отпадает необходимость в предварительном построении интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Численный анализ напряженного состояния проведен для $\varepsilon_1=R/a=0.1, 0.2, \ldots, 0.9$ при расстоянии между центрами окружностей, равном $2a$ (R – радиус отверстий, $2a$ – ширина полосы).

1. Граничные условия задачи очевидны: продольные грани и контуры отверстий свободны от нагрузок, напряжения на бесконечности сводятся к чистому изгибу. Необходимые геометрические обозначения и эпюры на-



пряжения X_x в сечениях, значительно удаленных от отверстий, показаны на фигуре. Область сплошной полосы обозначена через $S=S_0+S_1+S_2$.

Введем потенциалы Колосова – Мусхелишвили, соответствующие искомому напряженному состоянию

$$\varphi_{10}(z)=\varphi_1(z)+\frac{Mi}{8J}z^2,\quad \psi_{10}(z)=\psi_1(z)-\frac{Mi}{8J}z^2,\quad J=\frac{2}{3}a^3 \tag{1.1}$$

Тогда для определения потенциалов $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ получим следующие граничные условия:

$$\varphi_1(t)+t\overline{\varphi_1'(t)}+\overline{\psi_1(t)}=-2hi\left[\left(\frac{t-b_j}{R}\right)^2+\left(\frac{R}{t-b_j}\right)^2\right]+2C_j \text{ на } L_j \tag{1.2}$$

$$2h=MR^2/8J,\quad C_j=\text{const}\quad (j=1,2)$$

$$\varphi_1'(t)+\overline{\varphi_1'(t)}+t\overline{\varphi_1''(t)}+\overline{\psi_1'(t)}=0\quad \text{при}\quad y=\pm a$$

Следуя [1], введем функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, аналитические в области S, т. е. в сплошной полосе

$$\varphi(z)=\varphi_1(z)-\sum_{j=1}^{2}\left[\varphi_j^*(z)-hi\left(\frac{R}{z-b_j}\right)^2\right],\quad z\in S_0 \tag{1.3}$$

$$\varphi(z)=-\sum_{n=1}^{2}\varphi_n^*(z)-hi\left(\frac{z-b_j}{R}\right)^2+hi\left(\frac{R}{z-b_{j+1}}\right)^2+C_j,\quad z\in S_j$$

$$\psi(z)=\psi_1(z)+\sum_{j=1}^{2}\left[\psi_j^*(z)+hi\sum_{k=2}^{4}\lambda_{jk}\left(\frac{R}{z-b_j}\right)^k\right]\quad z\in S_0 \tag{1.4}$$

$$\psi(z)=\sum_{n=1}^{2}\psi_n^*(z)+hi\sum_{k=1}^{2}\eta_{jk}\left(\frac{z-b_j}{R}\right)^k+$$

$$+hi\sum_{k=2}^{4}\lambda_{j+1,k}\left(\frac{R}{z-b_{j+1}}\right)^k+2hi+\bar{C}_j,\quad z\in S_j$$

$$b_1=-b_2=b,\quad b_3\equiv b_1,\quad \lambda_{3k}\equiv\lambda_{1k},\quad \lambda_{j2}=-\eta_{j2}=-1,\quad \lambda_{j3}=\eta_{j1}=2b_j/R,\quad \lambda_{j4}=2$$

$$\varphi_j^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_j}\frac{\omega(t)\,dt}{t-z},\quad \psi_j^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_j}\frac{\overline{\omega(t)}+\bar{t}\omega'(t)}{t-z}dt\quad (j=1,2) \tag{1.5}$$

Разлагая $\omega(t)$ на L_j в ряд Фурье

$$\omega(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_{kj}\left(\frac{t-b_j}{R}\right)^k$$

и подставляя это разложение в (1.5) (при $z\in S_0$ и $z\in S_j$), а последние выражения — в (1.3) и (1.4), получим [1]

$$\varphi_1(z)=\varphi(z)+\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{-k,j}^{**}\left(\frac{R}{z-b_j}\right)^k$$

$$\psi_1(z)=\psi(z)-\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=2}^{\infty}\beta_{-k,j}^{**}\left(\frac{R}{z-b_j}\right)^k,\quad z\in S_0 \tag{1.6}$$

$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{k1}\left(\frac{z-b_1}{R}\right)^k-\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{-k,2}^{**}\left(\frac{R}{z-b_2}\right)^k-hi\left(\frac{z-b_1}{R}\right)^2+C_1$$

$$\psi(z)=-\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{k1}\left(\frac{z-b_1}{R}\right)^k+\sum_{k=2}^{\infty}\beta_{-k,2}^{**}\left(\frac{R}{z-b_2}\right)^k+ \tag{1.7}$$

$$+hi\sum_{k=1}^{2}\eta_{1k}\left(\frac{z-b_1}{R}\right)^k+2hi+\bar{C}_1,\quad z\in S_1$$

[1] Интегралы (1.5) вычисляются в направлении движения часовой стрелки.

$$\overset{**}{\alpha}_{\pm 2,j}=\alpha_{\pm 2,j}\pm ih,\quad \overset{**}{\alpha}_{\pm k,j}=\alpha_{\pm k,j}\quad \text{при}\quad k\neq 2,\quad \overset{**}{\beta}_{-1,j}=0$$

$$\overset{**}{\beta}_{-2,j}=\overline{\overset{**}{\alpha}_{2,j}}-\frac{b_j}{R}\overset{**}{\alpha}_{-1,j}$$

$$\overset{**}{\beta}_{-k,j}=\overline{\alpha_{kj}^{**}}-(k-1)\frac{b_j}{R}\overset{**}{\alpha}_{-(k-1),j}-(k-2)\overset{**}{\alpha}_{-(k-2),j}\qquad (k\geqslant 3)$$

$$\beta_{k,j}=\bar{\alpha}_{-k,j}+(k+1)\frac{b_j}{R}\alpha_{k+1,j}+(k+2)\alpha_{k+2,j}\qquad (k\geqslant 0)$$

Несложный анализ величин α_{kj} показывает, что они чисто мнимые, поэтому целесообразно ввести обозначения: $\overset{**}{\alpha}_{\pm k,j}=i\overset{*}{\alpha}_{\pm k,j}$, где $\overset{*}{\alpha}_{\pm k,j}$ — действительные величины. Кроме того

$$\overset{*}{\alpha}_{\pm k,2}=(-1)^k\overset{*}{\alpha}_{\pm k,1}$$

В дальнейшем вместо $\overset{*}{\alpha}_{\pm k,1}$ будем писать $\overset{*}{\alpha}_{\pm k}$.

2. Подставив $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$, согласно (1.6) в (1.2) при $y=\pm a$, получим

$$\varphi'(t)+\overline{\varphi'(t)}+t\overline{\varphi''(t)}+\overline{\psi'(t)}=$$
$$=\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{R}\left\{\overset{**}{\alpha}_{-k,j}\left(\frac{R}{t-b_j}\right)^{k+1}+\overset{**}{\gamma}_{-k,j}\left(\frac{R}{\overline{t-b_j}}\right)^{k+1}-\right.$$
$$\left.-(k+1)\overline{\overset{**}{\alpha}_{-k,j}}\frac{t}{R}\left(\frac{R}{\overline{t-b_j}}\right)^{k+2}\right\},\quad \overset{**}{\gamma}_{-k,j}=\overline{\overset{**}{\alpha}_{-k,j}}-\overline{\overset{**}{\beta}_{-k,j}}\qquad (2.1)$$

Соотношение (2.1) — это граничное условие некоторой задачи для сплошной полосы, поскольку $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны, как уже отмечалось выше, в области S. Решение этой задачи (см., например, [3]) имеет вид

$$\varphi(z)=-i\int_{-\infty}^{\infty}M_1(\mu)e^{-iz\mu/a}\frac{d\mu}{\mu},\quad \psi(z)=i\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(1-\frac{iz\mu}{a}\right)M_1(\mu)+\right.$$
$$\left.+M_2(\mu)\right]e^{-iz\mu/a}\frac{d\mu}{\mu}$$

$$M_1(\mu)=\sum_{j=1}^{\infty}H_j(\mu)\{\alpha_{-j}^*[\alpha_j(\mu)+\gamma(\mu)]-\delta_j\alpha_j^*\}\qquad (2.2)$$

$$M_2(\mu)=\sum_{j=1}^{\infty}H_j(\mu)\{\alpha_{-j}^*[4\mu^2-a_j(\mu)\omega(\mu)]+$$
$$+\delta_j\alpha_j^*\omega(\mu)\},\quad \mu>0$$

$$H_j(\mu)=\frac{\varepsilon_1{}^j}{(j-1)!}\cos\left(j\frac{\pi}{2}+\varepsilon_2\mu\right)\frac{\mu^j}{\operatorname{sh}2\mu-2\mu}$$

$$a_j(\mu)=j-1+(\varepsilon_1\mu)^2/(j+1),\quad \gamma(\mu)=1-2\mu-e^{-2\mu}$$

$$\omega(\mu)=2-\gamma(\mu),\quad \varepsilon_1=R/a,\quad \varepsilon_2=b/a,\quad \delta_1=0,\quad \delta_j=1\quad \text{при}\quad j\geqslant 2$$

Отметим, что $M_1(\mu)$ и $M_2(\mu)$ обратносимметричны по μ. Остается определить $\overset{*}{\alpha}_{\pm}$.

3. Для определения этих коэффициентов в [1] сначала строится интегральное уравнение Фредгольма второго рода с вырожденным ядром, а из последнего уравнения получается необходимая бесконечная система линейных алгебраических уравнений. Оказывается, эту систему уравнений можно получить несколько проще — без предварительного построения уравнения Фредгольма. Для этого обратимся к выражениям (1.7). Взяв n-е производные от них в точке $z=b_1$ (после произведения необходимых выкладок), получим требуемую систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}x_k=g_m \quad (m=1,2,3,\ldots), \quad g_3=-g_4=-2h, \quad g_m=0 \text{ при } m\neq 3,4 \tag{3.1}$$

$$\alpha_{-k}^*=x_{2k-1}, \qquad \alpha_k^*=x_{2k}$$

Коэффициенты a_{mk} системы (3.1) удобно записать в таком виде ($n, j=1, 2, 3, \ldots$):

$$\begin{gathered} a_{2n-1,2j-1}=\delta_{2n-1,2j-1}-\int_0^\infty T_{nj}(\mu)\{4\mu^2+\gamma(\mu)[2+a_n(\mu)+a_j(\mu)]+ \\ +a_n(\mu)a_j(\mu)\}d\mu+je_{nj}\left[C_{n+j}^j-\left(\frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon_2}\right)^2 C_{n+j+2}^{j+1}\right] \\ a_{2n,2j}=\delta_{2n,2j}-\delta_j\int_0^\infty T_{nj}(\mu)\,d\mu, \quad a_{2n-1,2j}=\delta_j\int_0^\infty T_{nj}(\mu)[a_n(\mu)+\gamma(\mu)]d\mu-\delta_j f_{nj} \\ a_{2n,2j-1}=\int_0^\infty T_{nj}(\mu)[a_j(\mu)+\gamma(\mu)]d\mu-f_{nj} \end{gathered} \tag{3.2}$$

$$T_{nj}(\mu)=\frac{2\varepsilon_1^{n+j}}{n!(j-1)!}\frac{\mu^{n+j-1}}{\operatorname{sh}2\mu-2\mu}\cos\left(n\frac{\pi}{2}+\varepsilon_2\mu\right)\cos\left(j\frac{\pi}{2}+\varepsilon_2\mu\right)$$

$$e_{nj}=\left(\frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon_2}\right)^{n+j}\cos(n+j)\pi, \quad f_{nj}=e_{nj}C_{n+j-1}^n, \quad C_s^t=\frac{s!}{(s-t)!t!}$$

где δ_{mk} — символы Кронекера.

Анализ выражений (3.2) показывает, что при любой близости границ система уравнений (3.1) является по меньшей мере квазирегулярной. Из этих же выражений (3.2) следуют важные (в вычислительном отношении) соотношения (если отбросить множитель δ_j)

$$a_{\alpha,\beta}/a_{\beta,\alpha}=n/j, \qquad \alpha=2j-1,\ 2j; \quad \beta=2n-1,\ 2n$$

Заметим, что система (3.1) полностью совпадает с соответствующей системой, полученной по методу Д. И. Шермана [1].

4. Ниже приводится численный анализ напряженного состояния исследуемой полосы. Напряжения определяются по известным формулам [4] с использованием выражений (1.1), (1.6) и (2.2). Все вычисления проводились на ЭВМ БЭСМ-4 для $\varepsilon_1=R/a=0.1$, $0.2, \ldots, 0.8$ и $\varepsilon_2=b/a=1$. Бесконечная система (3.1) «усекалась» при этом соответственно до 12, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36 уравнений.

Число уравнений и пределы интегрирования (при вычислении необходимых интегралов) выбирались таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям с максимальной точностью: по продольным граням напряжения, которые должны обращаться в нуль, имеют порядок от 10^{-12} при $\varepsilon_1=0.1$ до 10^{-7} при $\varepsilon_1=0.8$; на конту-

Таблицы 1, 2

θ°	$\varepsilon_1=0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0.0673	0.1354	0.2075	0.2883	0.3819	0.4901	0.6132	0.7508
30	0.0751	0.1514	0.2340	0.3324	0.4583	0.6230	0.8387	1.1218
45	0.00004	0.0011	0.0076	0.0306	0.0894	0.2136	0.4506	0.8884
60	−0.1299	−0.2596	−0.3884	−0.5123	−0.6190	−0.6804	−0.6318	−0.2917
75	−0.2510	−0.5028	−0.7595	−1.0313	−1.3361	−1.7028	−2.1825	−2.8521
90	−0.3000	−0.6013	−0.9103	−1.2447	−1.6429	−2.1820	−3.0337	−4.7017
105	−0.2510	−0.5029	−0.7597	−1.0308	−1.3341	−1.7000	−2.1810	−2.8520
120	−0.1299	−0.2599	−0.3894	−0.5138	−0.6195	−0.6767	−0.6227	−0.2806
135	0.00001	0.0006	0.0051	0.0223	0.0704	0.1812	0.4089	0.8438
150	0.0750	0.1508	0.2302	0.3163	0.4077	0.4978	0.5838	0.6601
165	0.0673	0.1350	0.2045	0.2736	0.3289	0.3376	0.2602	0.1047
180	0	0	0	0	0	0	0	0

№	$\varepsilon_1=0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	−0.2498	−0.2463	−0.2318	−0.1953	−0.1258	−0.0250	0.0684	0.0728
3	−0.4997	−0.4953	−0.4768	−0.4293	−0.3360	−0.1876	−0.0034	0.1476
4	−0.7498	−0.7469	−0.7347	−0.7028	−0.6369	−0.5199	−0.3311	−0.0482
5	−1.0000	−0.9996	−0.9981	−0.9934	−0.9818	−0.9532	−0.8812	−0.7013
6	−1.2501	−1.2523	−1.2614	−1.2849	−1.3320	−1.4104	−1.5219	−1.6555
7	−1.5003	−1.5045	−1.5224	−1.5699	−1.6684	−1.8440	−2.1285	−2.5839
1	0.3000	0.6013	0.9103	1.2447	1.6429	2.1820	3.0337	4.7017
2	0.4209	0.5565	0.7308	0.9617	1.2709	1.7075	2.3997	3.7460
3	0.6901	0.7834	0.8914	1.0337	1.2368	1.5428	2.0481	3.0500
4	0.9601	1.0215	1.0897	1.1760	1.2991	1.4901	1.8162	2.4775
5	1.2300	1.2603	1.2918	1.3281	1.3776	1.4583	1.6084	1.9318
6	1.4998	1.4966	1.4847	1.4595	1.4222	1.3812	1.3476	1.3282
1	1.5003	1.5054	1.5268	1.5820	1.6954	1.9039	2.2853	3.0496
2	1.5003	1.5050	1.5247	1.5765	1.6858	1.8942	2.2841	3.0613

рах отверстий относительная погрешность изменяется от 10^{-7} при $\varepsilon_1=0.1$ до 10^{-4} при $\varepsilon_1=0.8$.

Основные результаты вычислений сведены в таблицы. В табл. 1 приведены значения напряжения σ_θ (с точностью до множителя M/a^2) по контуру правого отверстия (см. фигуру) для $y\geqslant0$. Угол θ отсчитывается от оси Ox к оси Oy с шагом 15°. Приведенные здесь данные показывают, что в «сжатой» зоне ($y>0$) появляются растягивающие напряжения; взаимное влияние отверстий начинает заметно сказываться только при $\varepsilon_1=0.5$ ($\varepsilon_2=1$).

В табл. 2 (первые семь строк) даны значения напряжения X_x в сечении $x=0$, $0\leqslant y\leqslant a$; номера точек возрастают в положительном направлении оси Oy; шаг точек – $a/6$; значение того же напряжения X_x в сечении $x=a$, $-a\leqslant y\leqslant-(a-R)$ приведены в следующих шести строках; номера точек возрастают в отрицательном направлении оси Oy; шаг точек – $(a-R)/5$. Для получения истинных значений напряжений эти данные также необходимо умножить на M/a^2.

В точках продольных граней определялись как напряжение X_x, представляющее самостоятельный интерес, так и напряжения X_y и Y_y – для выявления точности удовлетворения граничных условий. Точки выбирались с шагом $0.2a$ при $0\leqslant x\leqslant2.6a$. Выявлены следующие особенности поведения напряжения X_x в этих точках: сначала (от точки $x=0$) оно возрастает до некоторого значения, затем (после точки $x=0.4a$) падает, достигая минимума в точке $x=a$, снова возрастает до значения (в точке $x=1{,}6a$), мало отличающегося от предыдущего максимума и снова падает, асимптотически приближаясь к $1.5\ M/a^2$.

Упомянутые максимальные значения (точнее абсолютные величины) напряжения X_x в точках $x=0.4a$ и $x=1{,}6a$ приведены (соответственно) в предпоследней и последней строках табл. 2. (Следует еще раз подчеркнуть, что речь идет не о максимальных значениях напряжения X_x на продольных гранях, а о максимумах среди значений X_x в упомянутых выше точках продольных граней.)

Частичные вычисления проводились и при $\varepsilon_1=0.9$, но точность в удовлетворении граничных условий при этом была 0.5–1%. Максимальное значение напряжения σ_θ на контурах отверстий оказалось равным (по абсолютной величине) $9.68267\ M/a^2$ (оно достигается в точках $x=\pm a$, $y=\pm(a-R)$. Напряжение X_x по сечению $x=a$ распределяется практически линейно, достигая минимума (по абсолютной величине) в точках $y=\pm a$; этот минимум равен $1.32215\ M/a^2$. В точках продольных граней напряжение X_x достигает максимумов при $x=0.6a$ и $x=1.4a$; эти максимумы (абсолютные величины) следующие: $5.59537\ M/a^2$ и $5.59712\ M/a^2$ (соответственно).

Из приведенных выше данных следует, что при $\varepsilon_1<0.6$ наибольшее (по абсолютной величине) значение напряжения σ_θ достигается на продольных гранях ($\sigma_\theta=X_x$), а при $\varepsilon_1\geqslant0.6$ – на контурах отверстий (но и в точках продольных граней напряжение X_x при этом также значительно возрастает).

Поступила 15 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шерман Д. И.* О напряжениях в весомой полуплоскости, ослабленной двумя круговыми отверстиями. ПММ, 1951, т. 15, вып. 3.
2. *Мироненко Н. И.* Чистый изгиб бесконечной полосы, симметрично ослабленной круговым отверстием. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 1.
3. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.